BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887.

NEUE FOLGE 1. — NOUVELLE SÉRIE 1.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM,
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
[illegible] STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1887.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887.

NEUE FOLGE 1. NOUVELLE SÉRIE 1.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM,
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1887.

[redacted]

[redacted]

Inhalt. — Table des matières.

Corrections.

Page 32, ligne 11, au lieu de: FONTANELLE, lire: FONTENELLE.
» 91, » 11, » » de l'achever, » permis de l'achever.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887. STOCKHOLM. № 1.

NEUE FOLGE. 1.
BERLIN. MAYER & MÜLLER
Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M.
Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 1.
PARIS. A. HERMANN.
Rue de la Sorbonne 8.

Die *Bibliotheca Mathematica*, gegründet im Jahre 1884, hat bisher enthalten: 1° bibliographische Verzeichnisse neu-erschienener Schriften aus dem Gebiete der reinen Mathematik; 2° Aufsätze und Artikel zur Geschichte der Mathematik. Die bibliographischen Listen erforderten jedoch einen so beträchtlichen Raum, dass die historischen Aufsätze auf wenige Seiten jeder Nummer beschränkt werden mussten.

Vom Jahre 1887 an wird die *Bibliotheca Mathematica* ausschliesslich der Geschichte der Mathematik (und der Bibliographie vom historischen Gesichtspunkte aus) gewidmet sein. Ihr Zweck ist, die möglichst grösste Anzahl von mathematisch-historischen Schriftstellern zu vereinigen, um mit ihrer Hülfe zur Entwickelung und zum Fortschritte des Studiums dieser Wissenschaft beizutragen. Die Zeitschrift wird nicht nur Originalaufsätze sondern auch Re-

La *Bibliotheca Mathematica*, fondée en 1884, a contenu jusqu'à présent: 1° des listes bibliographiques d'écrits récemment publiés dans le domaine des mathématiques pures; 2° des notes et des articles se rapportant à l'histoire des mathématiques. Cependant les listes bibliographiques demandaient un espace si considérable que les notes historiques ont dû être restreintes à quelques pages seulement de chaque numéro du journal.

A partir de l'année 1887, la *Bibliotheca Mathematica* sera consacrée exclusivement à l'histoire des mathématiques (et à la bibliographie au point de vue historique). Son but sera de réunir un nombre aussi grand que possible d'auteurs d'histoire des mathématiques, pour contribuer par leur concours au développement et aux progrès de l'étude de cette science. Le journal contiendra, non seulement des notes originales, mais aussi des analyses

[redacted]

censionen und bibliographische Übersichten über neuerschienene Schriften historischen Inhalts, sodann auch Anfragen nebst den zugehörigen Antworten enthalten.

Die folgenden Herren Verfasser haben ihre Mitwirkung versprochen:

G. J. Allman (Galway).
D. Bierens de Haan (Leiden).
C. A. Bjerknes (Christiania).
V. Bobynin (Moskwa).
H. Brocard (Montpellier).
G. Cantor (Halle a/S.).
M. Cantor (Heidelberg).
L. De Marchi (Milano).
A. Favaro (Padova).
E. Gelcich (Lussinpiccolo).
G. Govi (Napoli).
S. Günther (München).
J. L. Heiberg (Köbenhavn).

Alle Mittheilungen die Redaction betreffend sind an Herrn G. Eneström, Kommendörsgatan 21, Stockholm, zu senden.

Jeder Jahrgang wird 4 Hefte von etwa 2 Druckbogen 8° umfassen.

et des listes bibliographiques de publications récentes relatives à l'histoire des mathématiques, enfin des questions et des réponses.

Les auteurs suivants ont bien voulu promettre leur collaboration:

K. Hunrath (Rendsburg).
P. Mansion (Gand).
A. Marre (Paris).
E. Narducci (Roma).
E. Netto (Berlin).
P. Riccardi (Modena).
M. Steinschneider (Berlin).
H. Suter (Zürich).
P. Tannery (Tonneins).
G. Valentin (Berlin).
E. Wohlwill (Hamburg).
R. Wolf (Zürich).
H. G. Zeuthen (Köbenhavn).

Toutes les communications relatives à la rédaction doivent être adressées à M. G. Eneström, Kommendörsgatan 21, Stockholm.

Chaque année contiendra 4 numéros d'environ 2 feuilles in 8°.

Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques.

Par G. Eneström à Stockholm.

L'histoire des mathématiques, cultivée déjà par les Grecs, doit principalement à Montucla (1758) ses premiers progrès dans l'Europe moderne. Les temps suivants, jusqu'au milieu de notre siècle, ont offert un certain nombre de savantes recherches historiques; nous nous permettons de rappeler seulement les ouvrages de Delambre sur l'arithmétique et de Nesselmann sur l'algèbre des Grecs; de Strachey, Taylor et Colebrooke sur les mathématiques des Hindous; de Humboldt et de Vincent sur les signes numéraux; de Biot sur les mathématiques des Chinois; de Rosen sur l'algèbre des Arabes; de Sedillot sur les mathématiques ches les Orientaux; de Cossali sur l'algèbre; de Chasles sur la géometrie; enfin l'ouvrage de Libri sur les mathématiques en Italie.

Cependant, à partir du milieu du 19ᵉ siècle commence une époque plus féconde encore pour l'étude de l'histoire des mathématiques, et dès lors cette étude a reçu un accueil de plus en plus favorable et bienveillant. Aucune période du développement des mathématiques n'a été oubliée par les savants; en premier lieu les recherches ont porté sur l'histoire des peuples anciens.

L'état des mathématiques chez les *Égyptiens,* dont on n'avait auparavant que des notices incomplètes tirées principalement de sources grecques, nous a été connu par le Papyrus Rhind publié par M. Eisenlohr. Les matériaux qui y sont donnés ont été le point de départ de savantes recherches de M. Cantor, ainsi que de MM. Rodet, Favaro et Weyr. De même, certaines notices intéressantes sur les mathématiques chez les *Chaldiens* et les *Babyloniens* nous ont été fournies par les nombreux écrits de M. Sayce et d'autres assyriologues.

L'histoire des mathématiques chez les *Grecs,* sur laquelle il y a eu, dans les ouvrages antérieurs, un si grand nombre de notices fausses, malentendues ou incomplètes, a été l'objet de recherches minutieuses et profondes d'un grand nombre d'auteurs. La période avant Euclide a été traitée par MM. Bretschneider, Hankel, Allman et Tannery; pour ce qui

concerne Platon, nous avons en particulier des écrits de MM Blass, Martin, Dupuis, Hultsch, Friedlein, Günther, Favaro, Rettig et Wex.

Les ouvrages d'Euclide ont été analysés par MM. Chasles Cantor, Ofterdinger, Heiberg, Tannery et Favaro. Sur Archimedes et Apollonios, il y a des ouvrages de MM. Woepcke, Heiberg et Lühmann, et sur le problème des boeufs d'Archimedes des monographies de MM. Tannery, Krummbiegel et Amthor. De précieuses recherches sur les ouvrages de Heron ont été faites par MM. Martin et Cantor ainsi que par MM. Vincent, Hultsch, Friedlein et Tannery, sur Diofantos par MM. Hoche, Tannery et Heath. Les ouvrages de Pappos et de Proklos ont été l'objet d'autres recherches par MM. Martin, Friedlein, Hultsch, Gerhardt, Knoche Hoche et Tannery.

La question si difficile des méthodes d'approximation employées par les anciens a été approfondie par MM. Günther Tannery, Weissenborn, Heilermann, Schönborn, Hunrath et Demme.

Parmi les ouvrages sur les mathématiques des anciens, il faut ne pas oublier le traité de M. Zeuthen sur la théorie des sections coniques chez les Grecs, ni celui de M. Gow sur leurs connaissances mathématiques en général. Signalons encore les éditions précieuses des ouvrages de Heron et de Pappos (par Hultsch), d'Euclide et d'Archimedes (par Heiberg) ainsi que de Nikomachos (par Hoche) et de Proklos (par Friedlein). Les renseignements sur les mathématiciens byzantins ont été augmentés par les recherches de MM. Gerhardt et Waeschke (sur Planudes), Tannery (sur Rhabdas), Günther (sur Moschopoulos) et Friedlein (sur Pediasimos).

Pour ce qui concerne les mathématiques chez les *Romains* nous avons une monographie excellente de M. Cantor, et diverses études par M. Friedlein. La question de l'authenticité de la géométrie dite de Boëthius a été traitée et des notices sur cet ouvrage ont été données par MM. Friedlein, Cantor Weissenborn, Martin et Boncompagni.

Les ouvrages mathématiques des *Hindous* ont été étudiés par MM. Woepcke, Cantor et Martin, ainsi que par MM Marre, Boncompagni, Lucas, Weissenborn et Zeuthen. De bonnes traductions ont été publiées: des *Sulvasutras* par M Thibaut, et d'Aryabhatta par M. Rodet. Sur l'origine et le mode de transportation des chiffres dits indiens, il y a un grand nombre de recherches, par MM. Cantor, Friedlein, Woepcke

Martin, Pihan, Treutlein, Rodet et Taylor. L'état des mathématiques chez les *Chinois*, tirées pour une grande part des Hindous, a été examiné par MM. Biernatzki, Sedillot, Matthiessen et Rodet.

Les mathématiciens *Arabes*, sur lesquels Montucla avait donné des notices peu satisfaisantes, ont été connus plus exactement grâce aux recherches et aux traductions de M. Woepcke, suivi par MM. Steinschneider, Marre, Hankel, Rodet et Hochheim; de même, les connaissances mathématiques des *Juifs* du moyen age ont été analysées par MM. Steinschneider et Zuckermann ainsi que par MM. Schapira et Mahler.

Ce que nous savons à présent sur l'histoire des mathématiques en Europe pendant le moyen age, nous le devons en premier lieu aux recherches du prince Boncompagni sur Leonardo Pisano et sur plusieurs autres mathématiciens de cette période; d'autres études importantes on été publiées par MM. Cantor, Woepcke, Martin, Steinschneider, Friedlein, Weissenborn, Curtze, Narducci, Treutlein, Favaro et Suter.

Pour *le commencement des temps modernes*, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du 16e siècle, nous avons à signaler des recherches de MM. Boncompagni, Cantor, Marre, Curtze, Gherardi, Günther, Favaro, Treutlein, Henry, Giordani, Bierens de Haan et Vorsterman v. Oijen. L'action scientifique de Coppernicus a été étudiée en détail par MM. Prowe, Curtze, Favaro, Günther et d'autres.

Le *17e siècle* jusqu'à l'invention du calcul infinitésimal a attiré l'attention de plusieurs savants, parmi lesquels il convient de signaler MM. Riccardi, Jacoli, Günther, Bierens de Haan, Le Paige, Van Geer, Ritter, Cantor, Tannery, Gelcich et Zanotti Bianco. Sur Kepler, il y a un grand nombre d'ouvrages, par MM. Frisch, Reuschle et d'autres. Les importantes recherches sur Galilei, par M. Favaro et par plusieurs autres auteurs, ne se rapportent qu'en partie aux mathématiques pures.

L'époque qui a suivi l'invention du calcul infinitésimal *jusqu'à la fin du 18e siècle* a également été l'objet d'intéressantes recherches; l'invention du nouveau calcul a été traitée par MM. Gerhardt, Weissenborn, Giesel, Biot et Lefort; d'autres études ont été publiées par MM. Günther, Wittstein, Marre, Hankel, Biadego et Henry. Le prince Boncompagni s'est attaché particulièrement à relever les mérites scientifiques de Lagrange.

Si nous regardons enfin l'étude du développement des ma-

thématiques pendant *notre siècle,* nous pouvons signaler beaucoup de monographies sur ce sujet. Indiquons au moins celles de MM. Boncompagni, Hankel, Stolz, Günther, Todhunter, Königsberger, Enneper, Sachse, duBois Reymond et Baumgart. Il faut mentionner aussi des biographies scientifiques d'une haute valeur, par ex. celles de Bjerknes (sur Abel), de Dirichlet (sur Jacobi) et de Clebsch (sur Plücker), ainsi que les aperçus sur l'état actuel des mathématiques, par MM. Smith (discours prononcé devant la société mathématique de Londres en 1876) et Cayley (discours prononcé devant les membres de l'association britannique).

Aux ouvrages historiques déjà mentionnés, il faut en ajouter quelques uns d'une nature plus générale, par ex. les bibliographies de MM. Riccardi et Bierens de Haan, l'histoire des équations des quatre premiers degrés par M. Matthiessen, l'histoire des mathématiques en Allemagne par M. Gerhardt, l'histoire du calcul des probabilités par M. Todhunter, et le précis du but et des résultats de l'étude de l'histoire des mathématiques par M. Günther.

Bien que nous ayons omis de mentionner une très grande partie des recherches faites pendant les dernières années, il s'ensuit de ce qui précède, que l'histoire des mathématiques a été l'objet d'études très minutieuses et très nombreuses; en effet, il paraît chaque année au moins 100 écrits sur l'histoire des mathématiques. Mais ce qui nous manque encore, c'est une exposition systématique du développement des mathématiques depuis leur origine jusqu'à nos jours. M. Cantor a commencé la publication d'un tel ouvrage, mais malheureusement il n'a paru jusqu'ici que le 1er tome de ses excellentes *Vorlesungen*. Marchant sur les pas de M. Cantor, M. Vastchenko-Zakhartchenko a essayé aussi de traiter (en russe) l'histoire générale des mathématiques, mais nous ne possédons de ce travail que le 1er tome et un fragment du second. Quant à la soi-disante *»histoire des sciences mathématiques et physiques»* de M. Marie, elle doit être considérée plutôt comme un recueil de causeries historiques et de biographies d'hommes de science.

Pour faciliter l'étude de l'histoire des mathématiques, il faudrait aussi en avoir un traité abrégé; malheureusement, celui de Hankel est resté inachevé, et les précis publiés par MM. Arneth, Suter et Hoefer ne peuvent être recommandés sans réserves. Il faut aussi des cours universitaires; jusqu'à présent il n'en a été fait qu'une douzaine environ, dont nous signalons ceux de MM. Nesselmann (à Königsberg), Hankel (à Tü-

bingen), CANTOR (à Heidelberg), GÜNTHER (à Erlangen et München), FAVARO (à Padova), ZEUTHEN (à Köbenhavn) et TANNERY (à Paris).

D'autre part, l'histoire des mathématiques est assez heureuse de pouvoir disposer d'un certain nombre de journaux destinés à son usage; tel avait été le Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques publié par TERQUEM 1855—1862; tels sont la Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik fondée en 1856 et publiée par M. CANTOR, le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publié par le prince BONCOMPAGNI à partir de 1868, la Bibliotheca Mathematica, dont une nouvelle série commence par ce numéro, et en quelque sorte aussi le Bulletin des sciences mathématiques publié à Paris, et le journal Fiziko-matematitcheskaia naouki publié en russe à Moscou.

Par les lignes précédentes, nous avons essayé de faire ressortir le grand mouvement actuel vers l'étude de l'histoire des mathématiques. Cependant, il faut avouer qu'il y reste encore beaucoup de recherches à faire, et que, par conséquent, il y a place encore pour beaucoup de collaborateurs nouveaux. Qu'il nous soit permis d'exprimer, en terminant, l'espoir que cette étude sera accueillie avec une bienveillance toujours croissante et que, de plus, son importance au point de vue pédagogique, scientifique et historique sera de plus en plus reconnue par tous les géomètres.

[redacted]

War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt?

Von S. GÜNTHER in München.

Die Frage, welcher unsere Titelworte Ausdruck verleihen, ist zuerst durch den Engländer WALLIS angeregt worden, welcher ihr eine eigene Abhandlung [1] widmete. Während man allseitig die Ansicht hege, so äussert er sich dort, dass zuerst GALILEI und PASCAL auf die fragliche Kurve aufmerksam geworden seien *, glaube er die Kenntnis derselben bereits bei NICOLAUS CUSANUS und bei CHARLES DE BOUVELLES nachweisen zu können. Die Sache ist jedenfalls interessant genug, um einmal von neuem in Erwägung gezogen zu werden, nachdem zwei Jahrhunderte lang die WALLIS'schen Angaben keiner andern als höchstens einer beiläufigen Erwähnung gewürdigt worden sind.**

Sehr entschieden weist CHASLES [5] die Behauptung von WALLIS zurück, soweit sich dieselbe auf den CUSANER bezieht und wenn als Beweismittel allein die Druckschriften des letztern herangezogen werden, so ist auch CHASLES unbedingt im Rechte. Allein er übersieht, dass WALLIS ausdrücklich vor

* An die Jugendgeschichte der Radlinie knüpfen sich, genauer betrachtet, die Namen fast aller hervorragender Geometer des XVII. Jahrhunderts doch behauptet PASCALS *Histoire de la roulette* den entschiedenen Vorrang. POPPE bemerkt hierüber [2]: »MERSENNE soll zuerst 1615 bei Betrachtung des Nagels an einem Wagenrade die Wahrnehmung gemacht haben, dass dieser Punkt eine teils progressive teils drehende Bewegung habe, somit also keine reine Kreislinie beschreibe. Über die Natur dieser Kurve kam er nicht ins klare, wohl aber sein Freund ROBERVAL, den er 1634 ins Vertrauen zog. 1599 war auch GALILEI auf die Kurve aufmerksam geworden, wie er 1639 seinem Schüler TORRICELLI mitteilte. Es wird auch erwähnt, dass bereits bei CUSANUS und BOUVELLES etwas ähnliches vorkomme, doch hätten dieselben wahrscheinlich nicht bemerkt, dass man es mit einer besondern Linie zu thun habe.»

** Man hat bisher auf das Wiedererstehen der eigentlichen Kurvenlehre dieses höchsten Zweiges der griechischen Geometrie, nicht besonders geachtet, und doch erscheint gerade diese Übergangsperiode wichtig genug, wenn man bedenkt, dass das Mittelalter kaum eine andere Linie kannte als den Kreis. CAMPANO wusste ebenso wie JORDANUS NEMORARIUS dass die Konchoide auf zirkularer Basis zur Trisektion des Winkels diene [3], und in einer alten Regensburger Handschrift ist die archimedische Spirale abgebildet [4], allein die Kegelschnitte wurden erst durch WERNERS *Libellus super viginti duobus elementis conicis* wieder wissenschaftliches Gemeingut, und auf das Gebiet der höheren Kurven wagte sich zuerst ALBRECHT DÜRER als selbstständiger Erfinder.

einem Manuskripte spricht, von welchem er Einsicht habe nehmen können; darin trete der richtige Gedanke ganz unverhüllt zu tage, und nur dem Herausgeber (OMNISANCTUS), der auch erst zu der Basler Ausgabe der Gesamtwerke CUSAS die Figuren hinzugefügt habe, sei es zur Last zu legen, dass er »omnino contra mentem CUSANI« den Zykloidalbogen durch einen Kreisbogen ersetzte. Alles in allem glaubt sich der britische Mathematiker zu der These berechtigt: »Atque hinc satis liquet, cycloidem, quam nunc dicimus, jam ante aliquot secula fuisse consideratam, sed hoc tantum seculo penitius perspectam«. Wir müssen nun freilich, da uns WALLIS' Handschriftenkenntnis abgeht, erklären, dass wir bei CUSA keine derartige Andeutung, ja nicht einmal eine hieher gehörige Stelle aufzufinden vermochten, welche missverständlicher Auffassung des Bearbeiters hätte zum Opfer fallen können. Wohl ist es richtig, dass der Kardinal das Fortwälzen eines Kreises auf horizontaler Bahn mehrfach bespricht; so sagt er z. B. einmal im »Complementum theologicum figuratum in complementis mathematicis« folgendes: »Est etiam non praetereundum: quomodo si circumvolvitur circulus super lineam rectam, non tangit eam nisi in puncto: circumferentia enim aequaliter distat a centro. contingens autem recta non contingit circularem nisi in puncto«. Allein von der Bahn eines willkürlichen Punktes der rollenden Kreislinie ist hier augenscheinlich gar keine Rede. Und ebensowenig bei der eigentlichen Kreisquadratur. [5] Zwar rektifiziert CUSA zuerst den Kreis und trägt vom Berührungspunkte einer gradlinigen Tangente aus auf dieser letztern die Länge des Kreisumfangs ab; es ist ihm demgemäss klar, dass der völlig abgerollte Kreis mit dem früheren Berührungspunkte bis zu dem Endpunkte der abgetragenen Strecke $2r\pi$ gelangen würde. Doch nur eben der Tangentialpunkt findet Beachtung, und CUSA nimmt nicht die mindeste Notiz von der Bahn eines andern Peripheriepunktes.

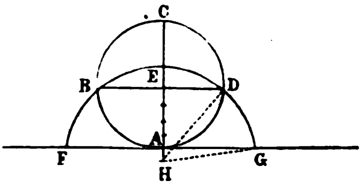
Ungleich begründeter ist dagegen, was WALLIS von BOUVELLES aussagt. Das Werk dieses Gelehrten erschien zuerst 1501 in lateinischer Sprache [6], alsdann wurde es ins französische übertragen [7], und in dieser neuen Form erlebte es noch eine ganze Reihe von Auflagen (1547, 1551, 1557, 1608). CHASLES, der die Verdienste seines Landsmannes um die Förderung der Lehre von den Sternvielecken anerkennend hervorhebt [8], ist der Ansicht, dass BOUVELLES' Kreisquadratur einfach von CUSA entlehnt sei. Dem ist nicht so, denn wenn auch der erstere von seinem deutschen Vorläufer wusste — er nennt ihn unter den Kreisquadrierern neben EUKLIDES, ARCHIMEDES, ARISTOTE-

les und Thomas von Bradwardin —, so geht er doch in der Sache selbst über ihn hinaus. Während nämlich Cusa ausschliesslich auf den Berührungspunkt sein Augenmerk gerichtet hatte, untersucht Bouvelles auch die Bewegung anderer Punkte des Kreisumfanges, und dass er bei dieser Gelegenheit der Entdeckung der Zykloide allerdings sehr nahe kam, dürfte aus seinen eigenen Worten erhellen.

Bouvelles fährt,[8] nachdem er uns seinen früheren sehr skeptischen Standpunkt gegenüber dem Probleme der Kreisquadratur geschildert hat, in folgender Weise fort: »Car nous estant une fois sur le petit pont de Paris, en regardant les roes dung chariot tournans sur le plat pavé: me surveint visible et facile occasion de venir à fin de mon intention. Il est notoire que quant une roe à fait ung tour entier, est esgalle à la circunference de ladicte roe. Parquoy ne restait plus, que de trouver les certaines incidences des poinctz du quadrant de la roe, et de la moytié, et de la roe entiere sur le pavé: affin que par ce moyen lon peust trouver une ligne droicte esgalle aux partyes de la circunference, et aussi à toute la circunference.»

Es seien AC der vertikale, BD der horizontale Durchmesser eines Kreises vom Mittelpunkt E und vom Radius r, und im tiefsten Punkte A der Peripherie sei an diese eine (horizontale) Berührungslinie gezogen (Fig. 1). Rollt der Kreis

Fig. 1.



gegen die rechte Seite, so trifft der Punkt D die Tangente in G, rollt er gegen links, so kommt der Punkt B mit der Horizontalen in F zusammen, es ist also

$$AG = AF = \text{arc } AD = \text{arc } AB = \frac{1}{2} r\pi,$$

und es kommt alles darauf an, die Lage der Punkte G und F richtig zu bestimmen. Bouvelles versucht diese Bestimmung, allein leider ist es an sich nicht möglich, den Gedankengang sich klar zu vergegenwärtigen, welcher ihn bei der Lösung die-

ser vorbereitenden Aufgabe geleitet hat. Dass die von D beschriebene Kurve ein Kreis sein müsse, stand für ihn ohne weitere Überlegung fest, und es kann sich nur noch darum handeln, dessen Halbmesser zu ermitteln, denn dass das Centrum irgendwo auf AC liegen müsse, ist einleuchtend, weil ja die Rollkurve die beiden Punkte B und D in sich aufnehmen muss. BOUVELLES verlängert den Radius EA über A hinaus und trägt auf der Verlängerung $EH = \frac{r}{4}$ ab, zieht HB und HD und beschreibt um H als Mittelpunkt mit HB als Halbmesser den bewussten Kreis, welcher der Horizontallinie in den beiden gesuchten Punkten F und G begegnet. Warum diese und keine andere Art der Konstruktion gewählt ward, geht, wie schon bemerkt, aus dem Texte nicht klar hervor, doch wird einiges Licht auf die Beweggründe fallen, wenn wir die rechnerische Kontrolle folgen lassen. Es ist

$$HD = HG = \sqrt{\overline{HE}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{\frac{25}{16}r^2 + r^2} = \sqrt{\frac{41}{16}r^2};$$

geht man dann zu dem rechtwinkligen Dreiecke AHG über, so hat man weiterhin

$$AG = \sqrt{\overline{HG}^2 - \overline{HA}^2} = \sqrt{\frac{41}{16}r^2 - \frac{1}{16}r^2} = \sqrt{\frac{40}{16}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10}.$$

Es ist aber auch, wie wir oben sahen,

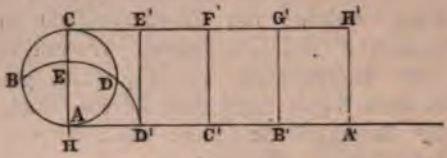
$$AG = \frac{1}{2}r\pi = \frac{r}{2}\sqrt{10}; \quad \pi = \sqrt{10}.$$

Und damit sind wir denn auf einen Näherungswert für die Zahl π geraten, welcher sich durch sein ehrwürdiger Alter vor den meisten übrigen auszeichnet, welche man kennt. CANTOR weist das Vorkommen dieser Zahl bei HERON ALEXANDRINUS [9] und bei den Indern [10] nach, und HANKEL [11] gab sich viele Mühe, die Ursprungsgeschichte jener aufzuklären. BOUVELLES hatte zweifelsohne auch von diesem Näherungswerte Kenntnis; es war ihm erwünscht, die kinematische Methode der Kreisrektifikation, welche er sich ausgedacht hatte, mit der Tradition zur Übereinstimmung zu bringen, und um dies zu erreichen, scheute er von einer Erschleichung nicht zurück, denn anders wird man die unbewiesene und selbst durch die Verwechslung des Zykloidalbogens mit einem Kreisbogen nicht zu rechtfertigende An-

nahme, dass (s. o.) $HG = \frac{5}{4}r$ sein müsse, kaum bezeichnen können.

Das weitere erledigt sich bei BOUVELLES nun begreiflicherweise sehr einfach [12]: »Lentiere revolution dung cercle, sur une ligne droicte esgalle à toute sa circunference: fait ung quadrangle longue et quadruple audict cercle, et contenant quatre fois autant que luy.« In Fig. 2 verhält sich alles wie in 1; Punkt

Fig. 2.



D gelangt beim Wälzen des Kreises nach D' *, Punkt C nach C', Punkt B nach B' und endlich Punkt A nach A'; es wird also

$$AD' = \frac{1}{2}r\pi,\ AC' = r\pi,\ AB' = \frac{3}{2}r\pi,\ AA' = 2r\pi,$$

und das aus den vier kongruenten Rechtecken $ACE'D'$, $D'E'F'C'$, $C'F'G'B'$, $B'G'H'A'$ bestehende rechtwinklige Viereck $ACH'A'$ ist gleich $2r^2\pi$; nimmt man somit zwischen AC und $AC' = \frac{1}{2}AA'$ die mittlere geometrische Proportionale, so ist das über derselben errichtete Quadrat dem Kreise um E an Flächeninhalt gleich.

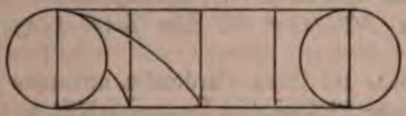
BOUVELLES' Kreisquadratur ist vollständig übergegangen in ein gelehrtes Sammelwerk, welches zu Anfang des XVI. Jahrhunderts alles Wissen der Zeit enzyklopädisch zusammenzufassen sich bestrebte: in die *Margaritha Philosophica* des Karthäusermönches GREGORIUS REYSCH. Es muss auffallen, dass in diesem Buche, das 1503 erschien, bereits Ideen reproduziert werden, welche erst 1501, also nur zwei Jahre vorher, an die Öffentlichkeit gelangt waren, auch wird nach schlimmer Zeitsitte keine Quelle namhaft gemacht, und zudem verrät auch die Darstellung des REYSCH eine gewisse Selbständigkeit, ** allein trotz-

* Die beigesetzten Indizes fehlen natürlich im Texte, der ungescheut einunddenselben Buchstaben mehr denn einmal verwendet.

** REYSCH besitzt anscheinend bereits eine ganz klare Vorstellung von jener Methode der Quadratur krummlinig begrenzter Flächen, welche nachmals GREGORIUS A S. VINCENTIO so geistvoll zu handhaben wusste. Auch

dem kann kein Zweifel obwalten, dass nur eine Reproduktion vorliegt. Unsere Fig. 3 ist aus der »Margaritha« entnommen;

Fig. 3.



sie stimmt im wesentlichen mit derjenigen des BOUVELLES (unsere Fig. 2) überein, allein sie geht in dem einen Punkte über jene hinaus, dass in ihr die Bahnen der beiden Punkte D und C (Fig. 2) vollständig ausgezogen sind. Wer im Originale von REYSCH diese Kurvenzüge betrachtet, wird sich der Überzeugung nicht entschlagen können, dass der Zeichner, mochte er auch theoretisch noch in dem Irrtume der BOUVELLES'schen Voraussetzung befangen sein, die Kreisfigur wenigstens als etwas ganz nebensächliches behandelte.

Dies alles berücksichtigend, bringen wir unsere Studie zum folgenden Abschlusse:

WALLIS' Angaben über CUSA sind kaum haltbar, diejenigen über BOUVELLES dagegen sind begründet. Dieser französische Mathematiker hat die erste genetische Konstruktion der Zykloide gegeben, wenn er auch deren Natur durchaus misskannte und seiner vorgefassten Meinung über den Wert von π zuliebe notwendig misskennen musste. REYSCH endlich eignet sich zwar den konstruktiven Teil von BOUVELLES' Darlegung an, vermeidet aber in seinen eigenen Figuren möglichst, die Rollkurve als wirklichen Kreis zu zeichnen. Durch alle diese unvollkommenen Vorarbeiten kann das Verdienst eines GALILEI, PASCAL und ROBERVAL nicht im allermindesten geschmälert werden, selbst wenn man diesen Männern einige Kenntnis jener älteren Versuche zuschreiben wollte.

[1] WALLIS, *An extract of a Letter, of May 4. 1697, concerning the Cycloeid known to Cardinal Cusanus, about the Year 1450; and to Carolus Bovillus about the Year 1500*, Philosophical Transactions 1697. P. 561 ff.

[2] POPPE, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur*, Nürnberg 1802. S. 120 ff.

in dem an die Kreisberechnung sich anschliessenden *Liber cubacionis sphere* wird mit Hilfe der Bewegung das archimedische Resultat herzuleiten gesucht. Doch ist auch hier BOUVELLES das Vorbild.

[3] CHASLES, *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch von* SOHNCKE, Halle 1839. S. 597.

[4] GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525,* Berlin 1887. S. 128.

[5] D. NICOLAI DE CUSA Cardinalis, utriusque Juris Doctoris, in omnique Philosophia incomparabilis viri Opera, Basileae 1565. P. 1024 ff.

[6] BOVILLUS, *Geometriae introductionis libri sex, breviusculis annotationibus explanati, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura, et de cubicatione sphaerae, et introductio in perspectivam,* Parisiis 1501.

[7] BOUVELLES, *Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Geometrie, Composé nouvellement en Francoys,* Paris 1542. Fol. 32, b.

[8] CHASLES, a. a. O., S. 551.

[9] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 1. Band, Leipzig 1880. S. 551.

[10] Ibid. S. 615.

[11] HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter,* Leipzig 1874. S. 216 ff.

[12] BOUVELLES, a. a. O., fol. 34, a.

Nota relativa ad una edizione del Nuncius sidereus del Galilei.

Per PIETRO RICCARDI in Modena.

Nella mia *Biblioteca matematica italiana* (Parte I, vol. I, col. 508), citai, sulla fede dell' ALBÈRI, una edizione del *Nuncius sidereus* del GALILEI pubblicata a Londra nel 1653. In ossequio della esattezza richiesta nelle indicazioni bibliografiche, mi preme di far conoscere che codesta edizione non è una separata ristampa di quel famoso libro del sommo Filosofo Toscano, ma forma parte di una collezione di alcuni scritti interessantissimi, dei quali con la descrizione dell' esemplare da me posseduto di quella edizione, ora darò particolareggiato ragguaglio.

La prima carta del volume in 8° che la costituisce contiene il titolo generale della collezione:

Petri Gassendi | INSTITUTIO | ASTRONOMICA, | Juxta Hypotheses | Tam Veterum quàm Recentiorum. | CUI ACCESSERUNT | *Galilei Galilei* | NUNTIUS SIDEREUS, | ET | *Johannis Kepleri* | DIOPTRICE. | Secunda Editio priori correctior. [1]

LONDINI, | Typis *Jacobi Flesher*. | Prostant apud *Gulielmum* | *Morden* Bibliopolam Cantabrigiensem [2]. | MDCLIII.

Il libro è diviso in due parti con separata numerazione di pagine.

La prima è intitolata nel *recto* della 2ª carta:

INSTITUTIO | ASTRONOMICA, | Juxta Hypotheseis | TAM VETERUM | QUAM COPERNICI | ET TYCHONIS, | Dictata à *PETRO GASSENDO* | Regio Matheseos Professore. | EJUSDEM *Oratio Inauguralis* | *iteratò edita*.

Ed in calce la ripetizione delle note tipografiche.

Nel *verso* vi ha un avviso dell' editore in cui espone le ragioni per le quali unì al trattato del GASSENDI quelli del GALILEO e del KEPLER. Seguono altre sei carte con lettera dedicatoria, indice ed *errata;* e quindi il testo in 199 faccie numerate, con figure astronomiche incise sul legno.

La seconda parte è intitolata (car. 1ª *recto*):

SIDEREUS | NUNCIUS, | MAGNA LONGEQUE ADMI- | rabilia Spectacula pandens suspiciendaque pro- | ponens unicuique, praesertim vero | *PHILOSOPHIS atque ASTRONOMIS, quæ à* | GALILEO GALILEO ec.

come nella prima edizione di questo libretto;[2] e con le note tipografiche sopra indicate. Segue nelle successive tre carte (fac. 3—8) la dedicatoria del GALILEI, e poscia il testo (fac. 9—50), oltre 4 tavole di figure astronomiche. Nella successiva carta havvi il titolo dello unitovi trattato di diottrica del KEPLER:

JOANNIS KEPLERI S.Æ C.Æ M[IS] MATHEMATICI | DIOPTRICE: | SEU | Demonstratio eorum quæ visui & | visilibus (*sic*) propter Conspi- | cilla non ita pridem | inventa accidunt. | Præmissæ Epistolæ Galilæi de iis quæ | post editionem Nuncii Siderei, ope | Perspicilli, nova & admiranda | in coelo deprehensa sunt. | *Item* | Examen Præfationis *Joannis Penæ* Galli | in Optica Euclidis, de usu Optices | in Philosophia.

Ed in calce le stesse note tipografiche.

Le materie indicate nel titolo sono contenute nelle faccie da 51 a 173, cui fa seguito nel fine l'ultima carta bianca; ed esse non sono che una ristampa della prima edizione della diottrica del KEPLER (*Augustæ Vindelicorum, typis Davidis Franci*, 1611, in 4°).

Ho ritenuto che la descritta collezioncina alquanto rara, poco citata e contenente scritti di nota importanza per la storia degli avanzamenti dell' astronomia copernicana, d'insigni scienziati quali furono i tre precursori di NEWTON, il GASSENDI, il GALILEI ed il KEPLER, meritasse di essere segnalata agli studiosi della bibliografia matematica.

Fu poscia ripubblicata col titolo:

PETRI GASSENDI | Institutio Astronomica | juxta | HYPOTHESEIS | Tam Veterum quam Recentiorum. | Cui accesserunt | *GALILEI GALILEI* | Nuncius Sidereus | ET | *JOHANNIS KEPLERI* DIOPTRICE. | Tertia editio prioribus Correctior. | *LONDINI*, Impensis *Hen. Dikinson*, Bibliop. Cantab. | M.DC.LXXXIII.

Ne possiede un esemplare il Prof. FERDINANDO JACOLI, il quale me ne ha cortesemente favorita la indicazione.

[1] La prima edizione è di Parigi, 1647.

[2] L'esemplare di questa edizione posseduto dal Prof. FERDINANDO JACOLI, in luogo di questa, ha la seguente indicazione del luogo di vendita:

Prostant apud *Cornelium* | *Bee*, in vico vulgo vocato *Little Britain*.

[3] Venetiis, 1610, in 4°.

L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.

Par Paul Tannery à Paris.

Dans son *Triparty*,[1] daté de 1484, et copié par Estienne de la Roche dans son *Arithmétique* imprimée en 1520, Nicolas Chuquet a donné, pour le calcul des valeurs approchées en général, pour celui des racines carrées incommensurables en particulier, un procédé que l'on peut expliquer comme suit:

Soient $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_1}{q_1}$, deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut, on forme

$$p' = p_0 + p_1, \qquad q' = q_0 + q_1,$$

et par l'élévation au carré, s'il s'agit de l'extraction d'une racine, ou par une substitution, dans le cas général, on vérifie si la nouvelle approximation $\frac{p'}{q'}$, qui est intermédiaire entre les deux précédentes, se trouve par excès ou par défaut. En la combinant ensuite par le même procédé avec celle des deux valeurs précédentes qui se trouve approchée en sens contraire, on forme de même une nouvelle valeur $\frac{p''}{q''}$, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ soient deux réduites successives de la fraction continue qui représente le nombre incommensurable à calculer. Soit d'ailleurs $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_0 + z p_1}{q_0 + z q_1}$, la réduite suivante; il est aisé de voir que le procédé donnera successivement les *fractions convergentes intermédiaires* entre $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, fractions qui seront toutes approchées en sens contraire de $\frac{p_1}{q_1}$ et dans le même sens que $\frac{p_0}{q_0}$, jusqu'à ce que l'on arrive à $\frac{p_2}{q_2}$. Toutes ces fractions, y compris la réduite $\frac{p_2}{q_2}$,

seront donc successivement combinées avec $\frac{p_1}{q_1}$ et l'on arrivera ainsi, à la fin de ces combinaisons, à la valeur

$$\frac{p_0 + (z+1)p_1}{q_0 + (z+1)q_1} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2},$$

c'est à dire à la première des fractions convergentes intermédiaires entre $\frac{p_2}{q_2}$ et $\frac{p_3}{q_3}$. Cette première devra être combinée avec $\frac{p_2}{q_2}$, et dès lors on aura de même toutes les convergentes suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

Or l'hypothèse que nous avons introduite, que l'on parte de deux réduites successives, s'applique au procédé de NICOLAS CHUQUET, celui-ci partant systématiquement des deux nombres entiers qui comprennent le nombre incommensurable à calculer. Ce procédé donne donc régulièrement *la suite complète des fractions convergentes intermédiaires et les réduites du développement de ce nombre en fraction continue.*

Si, en particulier, il s'agit de poursuivre l'approximation de la racine carrée d'un nombre entier A, jusqu'à l'obtention d'une solution de l'équation de Pell:

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

le procédé de NICOLAS CHUQUET conduira nécessairement à cette solution.

Il est clair que l'arithméticien qui nous a enseigné ce procédé, devait être incapable de démontrer la propriété que nous venons d'énoncer; mais il n'en est pas moins certain que le problème était posé pour lui, car, dans les exemples assez nombreux qu'il donne d'extractions de racines carrées, il s'arrête toujours à un reste ayant pour numérateur l'unité; d'un autre côté, comme il calculait effectivement tous les restes, il lui était facile de reconnaître empiriquement la périodicité des numérateurs.

Le procédé de NICOLAS CHUQUET a donc théoriquement une importance considérable, comme l'ont déjà reconnu M. SIEGMUND GÜNTHER[1] et M. LÉON RODET.[2] Toutefois en pratique, il est tellement fastidieux que, malgré sa publication par ESTIENNE DE LA ROCHE, il était permis de croire qu'il n'a jamais exercé une influence réelle.*

---

* Il convient de signaler que la méthode de CHUQUET a été men-

J'ai cependant trouvé un indice qui semble prouver le contraire et qui me conduit dès lors à modifier assez profondément certaines conclusions de mon essai: *Questions héroniennes*, inséré dans le Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 8_2, 1884, p. 329—344, 359—376.

J'y ai montré (pages 364—365), sur douze solutions d'équations de Pell signalées par M. Perott[4] dans l'édition de 1534 du *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* du dominicain Juan de Ortega, qu'elles pouvaient avoir été obtenues par l'application du procédé proposé par M. Radicke.[5] J'en ai conclu que l'existence de pareilles approximations ne pouvait suffire pour faire admettre l'emploi, par leurs auteurs, d'un autre procédé que celui-là, qui se déduit si simplement de la méthode que l'on est conduit à supposer comme connue des anciens, d'après les approximations héroniennes.

En dehors des douze approximations en question, j'ai fait quelques remarques sur une valeur fautive de $\sqrt{2000}$, indiquée par M. Perott comme se trouvant dans le même Traité d'Ortega.

Comme je le disais, la correction de cette valeur fautive, $44\frac{2079}{2582}$, ne pouvait être qu'aventureuse. En dehors de la valeur que je supposais pouvoir être la véritable, il en était une autre, $44\frac{2079}{2882}$, qui m'apparaissait comme étant *a priori* certainement plus probable.

Au moment où je communiquais cette seconde hypothèse à M. Perott, il constatait que c'était bien effectivement la valeur imprimée dans l'édition de 1534, tandis qu'il avait emprunté la fautive à l'édition de 1542.

Or cette valeur, $44\frac{2079}{2882}$, comme approximation de $\sqrt{2000}$, est en fait très satisfaisante, sans qu'elle puisse être obtenue par le procédé Radicke, pas plus que par aucun autre que je connaisse.

---

tionnée aussi par le géomètre français Butéon, dans l'ouvrage: *Logistica que et Arithmetica vulgo dicitur, in libros quinque digesta.* Lugduni, apud Gulielmum Rovillium M.D.L.IX., p. 76—77. Butéon applique la méthode à l'invention de $\sqrt{13}$; il trouve successivement

$$3\tfrac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\tfrac{2}{3}$$
$$3\tfrac{3}{5} < \sqrt{13} < 3\tfrac{2}{3}$$
$$3\tfrac{3}{5} < \sqrt{13} < 3\tfrac{5}{8}.$$

(G. E.)

Sous sa forme ci-dessus, elle ne paraît susceptible d'être obtenue directement que par des combinaisons assez improbables, qui supposent en tous cas la connaissance du procédé de NICOLAS CHUQUET;* mais ce même procédé permet de l'obtenir régulièrement sous la forme équivalente $44\frac{189}{262}$.

Il y a donc là un indice plus ou moins grave de l'emploi par ORTEGA du procédé de NICOLAS CHUQUET; et cet indice se trouve d'autre part, corroboré par ce fait que, d'après son essence, le même procédé a pu servir au calcul des douze racines formant solution d'équations de PELL; qu'il donne enfin également les deux autres racines qui se rencontrent dans le même chapitre d'ORTEGA, et semblent, à première vue, calculées par la formule:

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}.$$

Ces deux racines sont:

$$\sqrt{9600} \sim 97\frac{191}{194}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{4100} \sim 64\frac{1}{32}.$$

La recherche de documents analogues, postérieurs à 1563, (date de la dernière édition d'ORTEGA), me paraît donc offrir un certain intérêt pour déterminer dans quelle mesure le procédé de NICOLAS CHUQUET aura pu continuer à être appliqué et dès lors servir à l'invention des fractions continues, invention à laquelle conduit immédiatement sa simplification.

Quant à l'origine de ce procédé, on peut aussi se demander si NICOLAS CHUQUET en est bien l'inventeur, comme il le dit. L'arithméticien du XV^e siècle a certainement eu assez d'originalité pour réduire au moins en règles systématiques une pratique d'essence en réalité très simple. Mais nous ne possédons, pour ainsi dire, aucune trace antérieure de l'emploi de telles pratiques. Si le procédé de NICOLAS CHUQUET permet d'obtenir, sauf trois,** toutes les racines héroniennes à faire entrer

* En appliquant ce procédé à l'extraction de $\sqrt{242000}$, on arrive à $484\frac{2079}{262}$, et en divisant par 11, on retrouve la valeur d'ORTEGA.

** $$\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}} \sim 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26}, \qquad \sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9},$$
$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{68}.$$

en ligne de compte, si l'on pourrait l'appliquer aussi aux approximations d'ARCHIMÈDE, il ne m'en semble pas moins trop primitif d'une part, et de l'autre, trop opposé au principe de l'expression des fractions par des suites de quantièmes, pour que l'on doive croire qu'il ait été couramment pratiqué par les Grecs.

Comme fractions convergentes intermédiaires qui ne peuvent être fournies par des méthodes plus probables, on ne connaît guère que les approximations suivantes indiquées par M. SIEGMUND GÜNTHER.[6]

$\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, supposée par M. CANTOR chez les Hindous, d'après une relation donnée dans les *Çulvasûtras;* (la déduction de cette valeur reste passablement douteuse).

$\sqrt{3} \sim \frac{12}{7}$, chez GERBERT.

Enfin la réduite $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$, chez les Rabbins, d'ailleurs très rare, peut être assimilée aux approximations précédentes.

Ces indices sont insuffisants pour établir l'existence effective, avant NICOLAS CHUQUET, de pratiques ayant pu donner naissance à son procédé.

[1] *Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien* [*publié par* A. MARRE]. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, p. 696—699.

[2] GÜNTHER, Analyse de l'ouvrage de TREUTLEIN, Die deutsche Rechenkunst im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. f. d. Realschulwesen **2**, 1877, p. 430.

[3] RODET, *Sur les méthodes d'approximation chez les Arabes.* Bullet. de la soc. mathém. de France **7**, 1879, p. 162.

[4] PEROTT, *Sur une arithmétique espagnole du 16ème siècle.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, p. 163—170.

[5] Voir GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden.* Abhandl. zur Geschichte der Mathematik **4** (Leipzig 1882, 8°).

[6] GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten*, p. 50.

[redacted]

On the name of the so-called »theorem of the gnomon».

By GEORGE J. ALLMAN in Galway.

BRETSCHNEIDER (*Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, p. 79) says: »the theorem (EUCLID I, 43) is known by the name of the *theorem of the gnomon*». In my paper: *Greek Geometry from Thales to Euclid*, (Hermathena, Vol. III., p. 193, n. 87) I said: »I do not know of any authority for this statement».

I have since found in BILLINGSLEY'S EUCLIDE* the following note on I: 43:

»This proposition PELITARIUS calleth Gnomicall, and misticall, for that of it (Sayth he) spring infinite demonstrations and uses in geometry». (Fol. 54.)

On referring to PELETARIUS, however, it will be found that he only calls the figure *Gnomic*: not the proposition. After the the demonstration of I: 43, he says: »Vix enim usquam in toto opere Geometrico occurrit Figuratio magis fecunda quam haec Gnomica: hoc est quae uno Parallelogrammo et Gnoma conflatur». He adds further that this is the best place for defining a Gnomon: »Nam hic Gnomonis explicandi locus est maxime oportunus; licet EUCLIDES ad secundum librum distulerit». (PELETARIUS, *in Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum libri sex*, 1610.) The first edition of this work of PELETARIUS was published at Lyon, 1557, in fol.; the edition of 1610 was, I believe, only a reprint. BILLINGSLEY'S EUCLIDE — which was the first english edition of EUCLID — was printed in 1570 by the celebrated John Daye.

---

* *The elements of Geometrie of the most auncient Philosopher* EUCLIDE *of Megara Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by* H. BILLINGSLEY, *Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inventions of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.* Imprinted at London by John Daye. 1570.

1886, Nov. 8.

Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans la première notice sur ce mémoire, insérée dans la Bibliotheca Mathematica 1884, col. 15—16, j'ai dit que GOLDBACH avait probablement, dans sa jeunesse, visité la Suède et que le mémoire dont il s'agit doit avoir été imprimé pendant son séjour à Stockholm. Je suis maintenant en état de confirmer cette assertion. En effet, GOLDBACH a fait mention lui-même de ce mémoire, dans une lettre adressée à DANIEL BERNOULLI le 4 nov. 1723 et publiée par FUSS dans la Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle (S:t Pétersbourg 1843, in-8°), t. II, p. 183—187.

Dans cette lettre, après avoir mentionné ses occupations pendant l'année 1717, GOLDBACH écrit (l. c., p. 184):

> Postea in Suecia familiariter usus sum Cl. DUHRIO[1] in Arithmetica et Mechanica valde exercitato, — — — unde mihi subnatum est *Specimen methodi ad summas serierum* quod cum nonnullis amicis communicavi et eorum nescio quis Actis Erud. A. 1720 curavit inserendum, quin et Cl. RASTIUS[2] idem specimen peculiari dissertatione, mihi necdum visa, illustravit. Interea ego, paulo post editum specimen, apud bibliopolam germanum qui Lipsia Holmiam venerat in Jacobi Bernoullii artem conjectandi incido — — —.

Il s'ensuit de cet extrait que le mémoire de GOLDBACH a été inséré aussi dans l'année 1720 des Acta Eruditorum. En effet on y trouve (p. 27—31): un mémoire intitulé: C. G. *Specimen methodi ad summas serierum*, dont l'auteur est, selon l'indice du tome, C. GOLDBACH. GOLDBACH dit qu'il ignore par qui ce mémoire a été remis à la rédaction du journal; il convient de faire observer que le mémoire suit immédiatement après une analyse d'un ouvrage de DUHRE publié en suédois, et que, par conséquent, il a été envoyé sans doute par quelque mathématicien suédois (par DUHRE lui-même?). Quant à la thèse de RAST indiquée par GOLDBACH, il s'agit sans doute de l'écrit

Specimen methodi ad summas serierum analytice demonstratum publié par RAST à Königsberg en 1720.[3] Malheureusement, je n'ai pu avoir recours à aucun exemplaire de cet écrit.

[1] ANDERS GABRIEL DUHRE, mathématicien suédois, précepteur de SAMUEL KLINGENSTJERNA et auteur des ouvrages: *En grundelig anledning til mathesin universalem och algebram* (publié par G. BRANDT; Stockholm, 1718, in-4°) et *Första delen af en grundad geometria* (Stockholm, 1721, in-4°).

[2] GEORG HEINRICH RAST, né à Königsberg le 7 Août 1695, professeur extraordinaire de mathématiques à l'université de cette ville en 1719, mort à Königsberg le 29 Janvier 1726.

[3] Voir p. ex. POGGENDORFF, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, B. 2 (Leipzig 1863, 8°), col. 572.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

La géométrie de René Descartes. Nouvelle édition. Paris, A. Hermann MDCCCLXXXVI. In-4°, (6)+91 pages. — 5 fr.

La géométrie de Descartes a été publiée pour la première fois en 1637, comme appendice à son *Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.* Elle est divisée en trois parties dont la première contient les principes de l'application de l'algèbre à la géométrie et la solution par là du problème connu de Pappos relatif au *locus ad tres et quatuor lineas.* La seconde partie est un traité de la géométrie analytique, et la troisième se rapporte essentiellement à la théorie des équations.

Le rôle important qu'a joué cet ouvrage dans le développement des mathématiques est trop connu pour qu'il nous faille insister ici sur ce point. Donc, les anciennes éditions ou traductions n'étant que difficilement accessibles, l'éditeur, M. A Hermann a rendu un grand service à la science en en publiant une nouvelle édition. Cette édition est conforme à la première; seulement, on a substitué à quelques signes employés par Descartes, les symboles modernes, toutes les fois que ces changements n'en ont pas apporté dans le principe de la notation. Ainsi, on trouve ici le signe d'égalité =, au lieu de celui usité par Descartes et de ses élèves.

Avant de terminer cette courte annonce, nous nous permettons d'appeler l'attention sur un fait qui semble ne pas être généralement connu, savoir que Descartes a appliqué la méthode des coordonnées aussi aux courbes considérées dans l'espace. En effet on trouve dans la géométrie (p. 52 de cette édition) le passage suivant:

> — — il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à — — un espace qui a trois dimensions: à savoir, en tirant deux perpendiculaires de chacun des points de la ligne courbe qu'on veut considérer, sur deux plans, qui s'entre-coupent à angles droits, l'une sur l'un et l'autre sur l'autre; car les extrémités de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une sur chacun de ces plans, desquelles on peut en la façon ci-dessus expliquée déterminer tous les points et les rapporter à ceux de la

ligne droite qui est commune à ces deux plans, au moyen de quoi ceux de la courbe qui a trois dimensions sont entièrement déterminés.

C'est donc à tort que HOEFER (*Histoire des mathématiques*, 1874, p. 457—458) attribue le premier exemple d'une telle application à VAN SCHOOTEN.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Siegmund Günther. DIE GEOMETRISCHEN NÄHERUNGSKONSTRUKTIONEN ALBRECHT DÜRERS. (Beilage zum Jahresbericht der Königl. Studienanstalt Ansbach für 1885—86.) Ansbach 1886. 8°, (4) + 31 p. + 1 pl.

È un piccolo opuscolo di 30 pagine, che per quanto breve destà pure sommo interesse, trattandosi di un personaggio storico, l'importanza del quale nella storia della matematica non fù ancora bene schiarita.

Il chiarissimo autore D^r GÜNTHER esordisce con un ragguaglio delle opinioni emesse da parecchi autori sul DÜRER censurando le espressioni del GERHARDT il quale si spinse troppo oltre, fino a guidicare essere stato il DÜRER il primo autore di un' opera di geometria descrittiva redatta in lingua tedesca, mentre si accorda col LAMBERT che DÜRER diede l'impulso al trattamento scientifico delle projezioni scenografiche (prospettive). Passa quindi in breve rassegna lo sviluppo storico delle costruzioni geometriche approssimate, che sino al principio del secolo XII progredirono ben poco, mentre nell' epoca accennata la geometria costruttiva si vedeva spinta alle strette, dai progressi dell'arte architettonica. Sono però scarsi i prodotti relativi di quei tempi, ed il DÜRER aveva ben pochi predecessori, allorchè nel 1525 mise mano alla sua opera intitolata: *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien Ebnen und gantzen Corporen, durch* ALBRECHT DÜRER *zusammengezogen und zu nutz aller kunstliebhabenden, mit zugehörigen Figuren in truck gebracht* ed alla quale il GÜNTHER dedica appunto l'opuscolo sopra citato.

Nei paragrafi 2 fino 5 del suo opuscolo il D^r GÜNTHER riproduce anzitutto i metodi proposti dal DÜRER, per la costruzione dei poligoni regolari di cinque, sette, nove, undici e tredici lati, traduce il linguaggio antiquato del secolo XVI nel modo di esprimersi attualmente, esamina matematicamente l'esattezza del processo e conclude analiticamente tanto sul merito delle soluzioni, quanto sulla loro originalità. Segue il problema della

trisezione dell' angolo trattato da ARCHIMEDE (Lemmata Prop. VIII) che il Prof. GÜNTHER esamina mediante la geometria analitica constattando essere il processo approssimato talqualmente passabile per angoli ottusi, all' incontro abbastanza inesatto per angoli acuti, ed indi la trasformazione delle figure, per terminare poi coi celebri problemi dell' antichità: la quadratura del circolo e la duplicazione del cubo.

Per la quadratura del circolo dà la seguente regola:

»Operae pretium est scire quadraturam circuli, hoc est, quadratum constituere proposito circulo aequale. Sed hoc a philosophis nondum mathematice demonstratum est. At in hunc modum id expediri potest verisimiliter, ita quod in opere parum aut nihil fallat. Describe quadratum et divide diametrum ejus in decem partes aequales, ex quibus octo sume pro diametro circuli, velut hic protaxi.»

Sia adunque il raggio x, la diagonale del quadrato di egual area y, il lato del quadrato z. Si avrà:

$$x = \frac{4}{5} \cdot y,$$

$$z^2 = \frac{1}{2} y^2 = \frac{25}{32} x^2.$$

Ma

$$\frac{1}{4} x^2 \pi = z^2,$$

quindi

$$\frac{1}{4} x^2 \pi = \frac{25}{32} x^2,$$

$$\pi = 3.125.$$

Avendo ARCHIMEDE di già trovato

$$3 \frac{10}{70} > \pi > 3 \frac{10}{71}$$

il valore di π dedotto dal DÜRER non puossi registrare fra i più esatti.

Le costruzioni per la duplicazione del cubo delle quali il DÜRER ne dà tre, non sono originali, ma precisamente quelle contenute in EUTOCIO il commentatore d'ARCHIMEDE.

Lussin piccolo (Austria), Febbrajo 1887. E. GELCICH.

A. Favaro. MISCELLANEA GALILEIANA INEDITA. STUDI E RICERCHE. Memorie dell' Istituto Veneto, vol. 22. Venezia 1887. In-4°, 340 p.

L'infatigable savant qui s'est dédié particulièrement à des recherches sur la vie et l'action scientifique de GALILEI, vient de publier un nouvel ouvrage très volumineux sur le même sujet. Cet ouvrage contient les articles suivants: I. *Sul giorno della nascita di Galileo.* II. *Intorno ad un brano di lettera inedita di Galileo.* III. *Postille Galileiane inedite ad Archimede.* IV. *Sulla priorità della scoperta e della osservazione delle macchie solari.* V. *Sulla pubblicazione della sentenza contro Galileo, e sopra alcuni tentativi del Viviani per far rivocare la condanna dei Dialoghi Galileiani.* VI. *Galileo Galilei ed Elia Diodati.* VII. *Documenti per la storia del processo originale di Galileo.* VIII. *A proposito di »Alcuni scritti inediti di Galileo«.* IX. *Notizie sull' anello linceo inviato da Federico Cesi a Galileo.* X. *Spigolature dall' Archivio della Famiglia Galilei.* XI. *Documenti inediti sulla legittimazione di Vincenzio Galilei.* XII. *La libreria di Galileo.*

Parmi ces articles, ceux qui ont un intérêt plus immédiat pour l'histoire des mathématiques pures sont le n° III, contenant les annotations faites par GALILEI dans un exemplaire de l'ouvrage *De sphaera et cylindro* d'ARCHIMÈDE et en quelque sorte aussi le n° XII, qui est un catalogue, dressé par M. FAVARO, des livres qu'a possédés notoirement ou probablement l'éminent savant florentin.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

P. Tannery. NOTICE SUR LES DEUX LETTRES ARITHMÉTIQUES DE NICOLAS RHABDAS (TEXTE GREC ET TRADUCTION). Extrait des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale. Tome XXXII, 1er partie. Paris MDCCCLXXXVI. In-4°, 136 p.

Il ne nous reste aucun traité de la logistique des anciens grecs, et les renseignements donnés, en passant, par quelques auteurs sur leur manière de calculer, sont très incomplets. Mais, dans le moyen âge byzantin, il y a un ouvrage qui peut passer pour un traité de calcul; son auteur est NICOLAS ARTAVASDE de Smyrne, surnommé le RHABDAS, et c'est cet ouvrage que M. P. TANNERY a publié et annoté.

L'ouvrage de RHABDAS, composé vers l'an 1341, est divisé en deux parties, rédigées sous forme de lettres à deux

amis. La première en porte le titre: »Exposition abrégée et très claire de la science du calcul, improvisée à Byzance de Constantin, par Nicolas Artavasde de Smyrne, arithméticien et géomètre, le Rhabdas, sur la demande du très honoré maître des requêtes, M[r] George le Khatzyce.» Il contient six chapitres élémentaires de calcul, savoir: exposition des signes (avec la méthode de numération sur les doigts), addition, soustraction, multiplication, division et extration des racines carrées, enfin des notices sur les ordres différents des nombres et des tables auxiliaires pour faciliter les quatre opérations fondamentales; ces tables sont dites par RHABDAS »du sage Palamède». Dans les tables de division, les fractions sont décomposées en suites de quantièmes.

La seconde partie de l'ouvrage de RHABDAS porte la rubrique: »A mon très cher ami de coeur, Théodore Tsavoukhe de Clazomène, Nicolas Artavasde de Smyrne, le Rhabdas, écrit ceci de Byzance». Cette partie est plus élévée que la première; elle donne d'abord des règles pour la multiplication et la division de nombres fractionnaires exprimés avec des suites de quantièmes (les nombres sont réduits pour cet effet au dénominateur commun), pour l'extraction approximative des racines carrées, et pour le comput pascal; puis l'auteur expose la règle des trois, en en indiquant trois cas particuliers, et résout à la fin 18 problèmes plus compliqués.

Le texte grec, collationné sur 5 manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris, est accompagné d'une traduction française. Il est précédé par une introduction, contenant des notices biographiques, historiques et critiques, et suivi de trois indices: de mots peu usités, de noms, et de termes arithmétiques du texte grec.

Parmi les particularités intéressantes de l'ouvrage de RHABDAS, nous nous permettons de signaler la méthode pour le calcul approché d'une racine carrée incommensurable; cette méthode concorde, quant au fond, avec celle de LEONARDO PISANO (voir *Scritti, pubblicati da* B. BONCOMPAGNI, I, 1857, p. 353 et suiv.), mais il semble peu probable que RHABDAS l'ait empruntée de ce géomètre.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von — rédigée par G. Eneström. Stockholm. 4°.
1886: 4. — [Notice sur ce journal:] Vjestnik elem. matem. **2**, 1887, 39—40.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.
19 (1886): 2—3—4. — [Analyse du tome 18 (1885):] Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 43—44. (H.)

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
32 (1887): 1.

Anschütz, C., Über die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. (Schluss.)
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 1—15.

Eneström, G., Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi.
Biblioth. Mathem. 1886, 236—239.

Favaro, A., Ricerche ulteriori intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 99—114.

Favaro, A., Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche. [1887.]
| *Venezia*, Istituto Veneto, Memorie **22**. 340 p.

Favaro, A., Serie seconda di scampoli Galileiani. [1887.]
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e Memorie **3**, 1886—1887. 32 p.

Genocchi, A., Brevi cenni sulla vita dell' ingegnere Savino Realis.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 55—58.

Henry, Ch., Sur quelques billets inédits de Lagrange.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 129—135.

Henry, Ch., Lettres inédites d'Euler à d'Alembert.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 136—148.

Henry, Ch., Lettres inédites de Laplace publiées avec une première rédaction de sa méthode pour déterminer les orbites des comètes et une notice sur les manuscrits de Pingré.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 149—178.

J[acoli], F., Isaaco Newton (a proposito di un prossimo centenario).
Annuario astro-meteorologico (Venezia) **5** (1887), 153—157.

Narducci, E., Catalogo delle pubblicazioni di Enrico Narducci. Roma 1887.
4°, (4) + 16 p.

Pringsheim, A., Historische Notiz, betreffend die Original-Ausgabe von Chr. Rudolff, »Behend und hübsch Rechnung etc.»
Biblioth. Mathem. 1886, 239—244.

Realis, S., Giovanni Plana, né à Voghera le 8 novembre 1781, mort à Turin le 2 janvier 1864.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 121—128.

Riccardi, P., Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 59—66.

Tannery, P., Sur la représentation des fractions chez lès Grecs.
Biblioth. Mathem. 1886, 235—236.

Tannery, P., La technologie des éléments d'Euclide.
Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887, 17—28.

Question.
Biblioth. Mathem. 1886, 244.

Euclides, Elementa. Edidit et interpretatus est J. L. Heiberg. Vol. III. Librum X continens. Leipzig, Teubner 1886. 8°.
Liter. Centralbl. 1887, 61. (—z—r.)

Favaro, A., Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini. Bologna, Zanichelli 1886. 8°.
Bullet. des sc. mathém. **11**$_2$, 1887, 12—16. (P. T.)

Govi, G., L'ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia, scrittore del secolo XII ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo greco imperfetto ora per la prima volta conforme a un codice della Biblioteca Ambrosiana per deliberazione della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicata. Torino 1885. 8°.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 115—120. (A. Favaro.)

Register, naar de onderwerpen gerangschikt, op eenige wiskundige tijdschriften.
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief, **13**, 1886, 85—116. — Cette liste se rapporte à une dixaine de journaux mathématiques. Malheureusement, les noms des auteurs sont trop souvent corrompus. Ainsi on trouve *Leidschedt* (= Lindstedt), *Gousset* (= Goursat), *Hamack* (= Harnack), *Reenge* (= Runge), *Heinrike* (= Hermite), *Staler* (= Stolz), *Giamalitiata* (= Giambattista), etc.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 67—98, 179—218. — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 39—40. — Biblioth. Mathem. 1886, 145—234. — Fiziko-matematitcheskaia naouki (Moskwa) **1**, 1885, B: 30—32, 62—64, 79—80, 110—112, 139—144, 159—160, 189—192, 207—208, 222—224, 253—256, 285—288, 326—328; **2**, 1886, B: 30—32, 46—48, 75—80, 95—96, 139—144.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

14. M. Ch. Henry, dans la note *Sur l'origine de quelques notations mathématiques* (Revue archéologique **37**, 1879, 325—333; **38**, 1879, 1—10), a donné quelques notices historiques sur l'emploi du symbole ∞. Il y dit (p. 331): »L'emploi de la lemniscate pour signifier l'indétermination est assez récent; il apparaît pour la première fois, à notre connaissance, dans l'algèbre de Bossut (1773).»

Il convient de faire observer, que le symbole ∞ a été employé par plusieurs auteurs, antérieurs de beaucoup à Bossut. Ainsi on trouve dans la *Géométrie de l'infini* de Fontanelle (Paris, 1727, in-4°) page 30, le passage suivant: » . . . il y a un dernier terme qui est ce même infini. On l'exprime par ce caractère ∞». Et dans une note de Goldbach publiée en 1720 dans les Acta Eruditorum, on lit (p. 31): »seu omnium terminorum (posita scilicet $x = \infty$, et ∞^2 evanescente præ ∞^3) $\frac{11}{18}$». Quel est le premier auteur qui a employé le symbole ∞, et quels sont les autres signes dont on s'est servi pour le même but? MM. Prouhet et Henry (l. c., p. 4) ont émis aussi l'opinion que le symbole ∞ a été choisi, parce que, chez les Romains, le nombre 1000 a eu un signe similaire. Peut-on confirmer ou réfuter cette hypothèse? (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1887.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 1. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 1.

BERLIN. MAYER & MÜLLER Französische Strasse 38/39. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Der byzantinische Mathematiker Leon.

Von J. L. HEIBERG in Kjöbenhavn.

Am Schluss der Abhandlung des ARCHIMEDES von der Parabelquadratur hat die Florentinerhds. des ARCHIMEDES folgende Zeilen

εὐτυχοίης λέον γεωμέτρα
πολλοὺς εἰς λυκάβαντας ἴοις πολὺ φίλτατε μούσαις,

und dieselben Verse finden sich in der einen Pariserhds. B an derselben Stelle wieder, standen also jedenfalls im Archetypus unserer ARCHIMEDEShdss., dem verlorenen cod. Vallae antiquus. NIZZE, der sie als Motto seiner Übersetzung voransetzt, hat offenbar *λέον γεωμέτρα* als eine ehrende Bezeichnung des ARCHIMEDES aufgefasst, und ich glaube irgend wo die Übersetzung »geometrischer Leu» gelesen zu haben. Aber selbst wenn man diesen sonderbaren Ehrennamen sich gefallen liesse, und den zweiten Vers auf die *Werke* des »geometrischen Löwen» bezöge, so deutet doch *εὐτυχοίης* so bestimmt auf eine *noch lebende Person*, dass dadurch allein schon die genannte Auffassung unmöglich wird. Wir müssen uns also nach einem zur Zeit der Niederschreibung des codex Vallae lebenden (byzantinischen) *Mathematiker* LEON umsehen. So verstand die Worte schon BANDINI, der bei der Beschreibung des cod. Florent. die Zeilen anführt mit der Note[1] »nullum LEONEM geometram FABRICIUS nominat».

In dem unvergleichlich schönen cod. Bodleianus des EUKLID, der 888 für den Diacon ARETHAS, später Erzbischof zu

Caesarea, von Stephanos *clericus* geschrieben wurde, findet sich nun fol. 120—121 unter anderen byzantinischen Kleinigkeiten mathematischen Inhalts, die im V. Bande meiner Ausgabe der Elemente herausgegeben werden sollen, ein kleiner Aufsatz von Multiplication und Division der Brüche, wie sie in vielen Hdss. an Elem. VI def. 5 geknüpft werden, mit der Überschrift: *ὑπόμνημα σχολικὸν εἰς τὰς τῶν λόγων σύνθεσίν τε καὶ ἀφαίρεσιν Λέοντος* (commentirende Vorlesung von Leon über etc.).

Da der cod. Vallae aus palaeographischen Gründen ins IX. oder X. Jahrh. gesetzt wird,[2] ist es sehr wahrscheinlich, dass dieser Aufsatz eben von jenem Leon herrührt, dem zu Ehre der Schreiber des cod. Vallae das angeführte poetische Versuch am Schluss seiner Hds. anbrachte.

Wer war nun aber dieser Leon?

Der Zeit wegen könnte es der Kaiser Leon der Weise (886—911) sein, der sich auch mit Mathematik beschäftigte.[3] Aber das strenge byzantinische Ceremoniel würde es gewiss nicht erlaubt haben, den Kaiser als Leon den Geometer oder Leon schlecht und recht zu bezeichnen. Wir finden aber einen anderen gleichzeitigen Leon, auf den alles passt; er ist u. a. von Fabricius[4] erwähnt, und hat im höheren Unterrichtswesen Constantinopels eine bedeutende Rolle gespielt, ist aber noch nicht als Mathematiker gebührend beachtet worden. Nach mehreren byzantinischen Quellen[5] war sein Schicksal, wie folgt. Er war ein Verwandter des Patriarchs Joannes von Constantinopel und hatte daselbst die Grammatikerschule durchmacht, aber sonst in der Hauptstadt, wo seit Leo dem Isaurier keine öffentlichen Lehranstalten mehr bestanden, und wo die Unruhen des Bilderstreites unter Bibliotheken und Klöstern tüchtig aufgeräumt hatten, keine Befriedigung seines wissenschaftlichen Dranges gefunden. Auf Andros betrieb er dann, von Michael Psellos dem älteren angeregt, eifrig Rhetorik, Philosophie und Mathematik, indem er die reichen Klosterbibliotheken der Insel durchstöberte und die stäubigen Bücher hervorsuchte. Nachdem er sich vollständige Einsicht in diesen Wissenschaften erworben hatte, ging er wieder nach Constantinopel und lebte eine Zeit lang in bescheidenen Verhältnissen als Schulmeister und Lehrer in allen Zweigen des damaligen Wissens. Da geschah es, dass einer seiner Schüler, der bei ihm die Mathematik getrieben hatte, nachher aber eine Stellung als Schreiber beim Heere angenommen hatte, von den Arabern gefangen wurde und bei seinem Herrn von dem Interesse hörte, das der Chalif Al Mamun für griechische Wissenschaft, namentlich Mathematik, hegte

(AL MAMUN starb 834; auch in arabischen Quellen ist davon die Rede, dass er Handschriften von Constantinopel kommen und aus ihnen viele griechische Werke arabisch übersetzen liess; auf seinem Antrieb übersetzte z. B. HAJJAJ den EUKLID. Diese Übereinstimmung giebt dem ganzen Bericht der Byzantiner erhöhte Glaubwürdigkeit). Da er zu verstehen gab, dass auch er Mathematiker sei, wurde er zu einer Lehrstunde der arabischen Gelehrten zugelassen, welche er mit dem EUKLID beschäftigt fand. Als er sie dann in den tiefern Zusammenhang und die verborgene Bedeutung der Theoreme (wohl in neuplatonischem Sinne, ungefähr wie PROKLOS in seinem Commentar) einweihte, lenkte er ihre Aufmerksamkeit auf seinen Lehrer LEON hin, den der Chalif mit einem eigenhändigen Schreiben zu sich einlud. Der Brief kam aber dem Kaiser THEOPHILOS (829—843) vor Augen, LEON wurde von seinem Winkel hervorgezogen und hielt fortan öffentliche Vorlesungen in der Kirche der 40 Märterer, während AL MAMUN sich damit begnügen musste ihm brieflich einige Probleme vorzulegen. Kurz darauf wurde LEON zum Metropoliten in Thessalonicha erhoben, aber unter MICHAEL III als Bilderfeind wieder entledigt. Aber MICHAELS Minister BARDAS übertrug ihm dann die Leitung der von ihm wieder eingerichteten höheren Lehranstalt, an welcher LEON Philosophie vortrug, sein Schüler THEODORUS Mathematik. Daher führt LEON gewöhnlich den Beinamen *φιλόσοφος*, er wird doch aber auch *μαθηματικός* genannt.[6] Er lebte noch unter BASILIOS (867—886), wie aus *Georg. Monach. de Basil.* p. 840 geschlossen werden kann, und war namentlich wegen seiner astrologischen und magischen Thätigkeit berühmt;[7] doch wird er auch als Mechaniker erwähnt.[8] Man ist geneigt ihm einige erhaltene astrologische Schriften beizulegen.[9]

Wenn diese Combinationen richtig sind, hat also ARETHAS, dessen Studienzeit um 850 fallen kann, eine Vorlesung LEONS an der Universität über EUKLIDS Elem. VI def. 5 niedergeschrieben und später von STEPHANOS auf einige leere Blätter in seinem EUKLID eintragen lassen. Und von LEON angeregt hat einer seiner Schüler die von ISIDOROS besorgte Ausgabe des ARCHIMEDES abgeschrieben und seine Dankbarkeit gegen seinen berühmten Lehren in den Zeilen ausgedrückt, welche diese kleine Untersuchung veranlasst haben.

Selbstverständlich ist LEONS Grösse sehr relativ; mit dem absoluten Maasstab gemessen verschwindet er vor unseren Blicken. Aber in seinem Kreise ragt er unbedingt hervor; von seiner Anstellung an datiren die byzantinischen Geschicht-

schreiber den Anfang der Renaissancebewegung in Constantinopel im IX.—X. Jahrh., welcher wir unsere besten und schönsten Handschriften der griechischen Classiker verdanken. Unter ihnen war also auch die einzige nach dem Occident gerettete Handschrift des ARCHIMEDES, und hat LEON zur Erhaltung der Schriften dieses »geometrischen Löwen» etwas beigetragen, haben wir alle Ursache ihm dankbar zu sein.

[1] BANDINI, *Catalogus codicum græcorum bibliothecæ Laurentianæ*. T. II. Florentiæ 1768, p. 14 not. 3.

[2] ARCHIMEDIS *Opera omnia cum commentariis* EUTOCII, *rec.* J. L. HEIBERG. Lipsiæ 1880—1881, T. III, p. XIX, wo ich ihn eben mit dem genannten Bodleianus auf eine Linie gestellt habe.

[3] Über ein von ihm gestelltes Rechenproblem siehe NICOMACHI *Geraseni introductio arithmetica*, *rec.* R. HOCHE. Lipsiæ 1866, p. 151.

[4] FABRICIUS, *Bibliotheca Græca*. T. VI. Hamburgi 1726, p. 366, auch p. 358, wo zwei verschiedene aus ihm gemacht werden, ein LEO *mathematicus* und ein *philosophus*.

[5] *Corpus scriptorum Historiæ Byzantinæ*. Editio emendatior. Bonnæ 1828 u. folg. — *Theophanes continuatus* (1838), p. 185 ff. — *Cedrenus* II (1839), p. 166 ff. — *Genesius* (1834), p. 98. — *Georgius monachus de Theophilo* (1838), p. 806, der doch in der Chronologie unklar ist. — *Zonaras ed.* DINDORF (Lipsiæ 1868 ff.) XVI, 4.

[6] *Theophanes continuatus*, a. a. O., p. 197, 4.

[7] *Theophanes continuatus*, a. a. O., p. 191, 197. — *Symeon Magister de Michaele et Theodora* (1838), p. 676, 688. — *Georgius Monachus de Michaele et Theodora* (1838), p. 820.

[8] *Symeon Magister de Michaele et Theodora*, a. a. O., p. 681 ff.

[9] FABRICIUS, a. a. O., p. 366.

Études sur Diophante.

Par Paul Tannery à Tonneins.

I. Les problèmes déterminés.

D'après le numérotage adopté par Bachet, les problèmes traités dans les six livres des *Arithmétiques* de Diophante sont rangés sous 208 questions, savoir:

Livre I	43
II	36
III	24
IV	46
V	33
VI	26
Total	208.

Si l'on considère la forme des équations auxquelles conduisent immédiatement les énoncés de ces questions, celles du *premier livre* se classent, au prime abord, comme suit:

A. Problèmes déterminés du 1er degré (quest. 1 à 13, 15 à 24, 43)	24
B. Problèmes indéterminés du 1er degré (quest. 25 à 28). .	4
C. Problèmes déterminés du 2e degré (quest. 29 à 42). .	14
D. Problèmes indéterminés du 2e degré (quest. 14). . . .	1
Total	43.

La série *A* se réduit effectivement à 21 problèmes, car les questions 19, 21, 24 sont simplement de secondes solutions des questions précédentes.

D'après le nombre des inconnues, ces 21 problèmes se subdivisent comme suit:

a. une inconnue (quest. 7 à 11, 43*)............	6
b. deux inconnues (quest. 1 à 6, 18)...........	7
c. trois inconnues (quest. 16, 18, 22, 23)	4
d. quatre inconnues (quest. 12, 17, 20)..........	3
f. six inconnues (quest. 13)	1
Total	21.

* La question 43 offre cette particularité que l'énoncé permet trois hypothèses distinctes, pouvant conduire à trois solutions différentes.

L'intérêt qu'ils peuvent offrir est aujourd'hui purement historique.

Il en est de même pour les quatre de la série *B*, où le nombre des inconnues, trois (25, 27) ou quatre (26, 28), est supérieur d'une unité à celui des équations. Car rien, dans ce qui nous reste de DIOPHANTE, ne ressemble à ce que nous appelons aujourd'hui *analyse indéterminée du premier degré*. Il ne recherche nullement les solutions entières dans les problèmes indéterminés. Les quatre dont il s'agit ici conduisent à des équations *homogènes*, et en les résolvant, DIOPHANTE montre nettement par la marche même qu'il suit qu'il ne s'agit pour lui que de déterminer les rapports des inconnues. Ce ne sont donc en fait que des problèmes déterminés à deux ou trois inconnues.

A cette même classe se rattachent étroitement les deux questions II, 18, 19, certainement interpolées dans un autre livre. Il s'agit là d'un même problème à deux équations du premier degré entre trois inconnues, équations qui, cette fois pourtant, ne sont pas homogènes. Il est résolu en nombres fractionnaires de deux manières différentes, en se donnant d'abord le rapport de deux inconnues, puis l'une d'entre elles. L'énoncé II, 19, détermine même complètement le problème, en donnant la somme des trois inconnues. Mais la solution fait défaut.

Les 14 questions déterminées du second degré (série *C*) sont toutes à deux inconnues. Elles renferment 20 énoncés et seulement 13 solutions. Mais elles se réduisent toutes au premier degré, sauf trois, savoir 30, 31, 33, dont la seconde peut d'ailleurs être facilement amenée à la précédente.

Les problèmes 30, 33 — *trouver deux nombres, connaissant leur produit et leur somme ou leur différence* — conduisent à la solution complète de l'équation du second degré telle que les anciens pouvaient se la proposer, c'est-à-dire en rejetant les solutions négatives ou imaginaires.

De même qu'en géométrie, ils ramenaient tous les problèmes du second degré à une *parabole* avec *ellipse* ou *hyperbole*, c'est-à-dire en fait à ces questions élémentaires : *trouver deux droites dont on connaît le rectangle et la somme ou la différence*, de même, sur les nombres, ils ne pouvaient envisager autrement les questions du second degré, et l'on doit faire remonter la solution de ces problèmes fondamentaux, tant d'un côté que de l'autre, au moins jusqu'aux successeurs immédiats de PYTHAGORE.[1]

Si, par le choix d'une inconnue auxiliaire, DIOPHANTE évite, dans son livre I, la formation de l'équation trinôme, il avait dû en donner la résolution, probablement dans des *porismes* (corollaires) sur ces mêmes questions 30, 33; car il annonce dans son préambule qu'il le fera, et d'autre part, pour résoudre des inégalités du second degré, il rappelle accidentellement plus tard la construction de l'inconnue dans des équations de la forme moderne:

$$ax^2 - bx - c = 0, \qquad \text{IV, 45,}$$
$$ax^2 - bx + c = 0, \qquad \text{V, 13.}$$

Si dans le dernier cas, il n'indique que la plus grande des deux racines positives, il est clair que l'omission de la seconde est volontaire, en raison du but particulier qu'il se propose.

Enfin, lorsque nous voyons (VI, 21) DIOPHANTE décomposer un trinôme du second degré à termes positifs en deux facteurs linéaires, nous ne pouvons douter que les Grecs n'eussent poussé la théorie de l'équation du second degré aussi loin qu'il était possible de le faire sans la convention relative aux valeurs négatives.

A cette même classe C et en particulier aux problèmes à deux inconnues du second degré se ramenant au premier, doivent être rattachées les sept premières questions du livre II, qui y sont évidemment interpolées, ce livre ayant son commencement naturel à la question 8, c'est à dire au problème fondamental de l'analyse indéterminée du second degré:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Les questions II (1 à 5) sont notamment des répétitions des questions I (34 à 37), et en particulier II, 3 donne la solution de deux énoncés contenus dans I, 33, mais non traités alors. Toutefois, dans l'énoncé de ces cinq premières questions du livre II, une des conditions a été supprimée à tort, en sorte qu'à première vue, les problèmes apparaissent comme indéterminés.

Quant au problème unique de la série D, peut-être au contraire interpolé dans le livre I, on peut le considérer comme une simple variante de IV, 41, et, en tout cas, il n'appartient pas en réalité à l'analyse indéterminée du second degré.

Le livre IV renferme de fait trois questions 37, 39, 41, dans lesquelles, d'une équation entre deux inconnues, où figure

leur produit avec des termes du premier degré, DIOPHANTE tire l'une des inconnues en fonction rationnelle de l'autre, ce qu'il appelle résoudre le problème avec indétermination (ἀορίστως). Au fond, ces questions ne sont que des lemmes pour la solution des suivantes, IV, 38, 40, 42, qui sont déterminées et comportent chacune trois équations du second degré. Ces lemmes correspondent donc au procédé d'élimination par substitutions.

La question IV, 42 se réduit d'ailleurs au premier degré; les deux autres sont du second. DIOPHANTE a donc à exprimer une condition de rationnalité, ce qu'il fait d'ailleurs en imposant une trop grande restriction.

Les questions suivantes valent encore comme déterminées.

Les trois IV, 16, 43; V, 10, conduisent, comme celles dont je viens de parler, à trois équations du second degré entre trois inconnues, et se ramènent, la seconde au premier degré, les deux autres au second. Il est à remarquer que V, 10 est traité sous forme *poristique*.

Les deux IV, 1, 2 — *trouver deux nombres connaissant leur somme et celle de leurs cubes ou leur différence et celle de leurs cubes* — sont ramenées du troisième degré au second.

Enfin IV, 36 nous offre deux équations du second degré entre trois inconnues

$$x + zy = a(y - zy), \qquad y + zx = b(x - zx)$$

où z d'une part, $\frac{x}{y}$ de l'autre, se trouvent déterminés.

Ainsi, en dehors des 43 questions du livre I, il s'en trouve encore dans les autres 21, savoir II (1 à 7, 17, 18), IV (1, 2, 16, 36 à 43), V, 10 qui n'appartiennent pas à l'analyse indéterminée. Reste sur les 208 de l'ensemble, 144 pour cette dernière branche; mais à cause des secondes solutions II, 9; III, 6, 8, 18; IV, 8, 30, 34, elles se réduisent à 137, dont nous traiterons plus amplement dans les études suivantes.

Les quelques problèmes déterminés des livres IV et V offrent un peu plus d'intérêt que ceux du livre I, surtout si l'on étudie les procédés d'élimination qu'emploie DIOPHANTE pour réduire le degré de l'équation finale. IV, 36 est particulièrement remarquable en ce que le procédé moderne ordinaire conduit naturellement pour z à une équation du second degré, qui admet deux racines rationnelles dont l'une est illusoire. DIOPHANTE évite la formation de cette équation par le choix d'une inconnue auxiliaire, procédé dont, en général, il fait grand

usage, mais qui est tout indiqué par la forme plus ou moins symétrique des équations qu'il a à traiter.

Quelle que soit en tout cas l'élégance que présentent parfois ses artifices de ce genre, ils restent toujours essentiellement élémentaires; la systématisation et le perfectionnement technique ses procédés d'élimination exigeaient avant tout un développement des notations bien supérieur à ce que connurent jamais les Grecs.

La question la plus importante qui puisse se poser au sujet de l'analyse déterminée des anciens, est relative à la limite qu'avaient atteinte leurs travaux. Si, comme nous le pensons, la solution de l'équation du second degré remonte au premier âge de la science, n'est-on pas conduit à regarder comme probable que les degrés supérieurs furent abordés, au moins le troisième et le quatrième, alors surtout que, comme l'a récemment démontré M. Zeuthen, la solution géométrique des problèmes du même ordre fut poussée très loin? Comment dès lors la solution de l'équation du troisième degré, par exemple, n'a-t-elle pas été obtenue par les Grecs, comme elle le fut dès le début de la Renaissance?

A prendre à la lettre les expressions du préambule de Diophante, il saurait résoudre les équations trinomes quelconques (jusqu'au sixième degré); mais on ne peut entendre sans doute ce qu'il dit que des équations du second degré ou de celles qui s'y ramènent immédiatement.

Que cependant la solution d'une équation supérieure pouvait au moins être tentée, il en donne une preuve bien nette en énonçant, sans même aucune réflexion, (VI, 18) la solution réelle unique de l'équation

$$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1,$$

d'où

$$x = 4.$$

Que cette solution apparaisse aussitôt que l'on ramène l'équation à sa forme canonique pour Diophante, c'est à dire

$$x^3 + x = 4x^2 + 4,$$

même réduit ainsi à sa juste valeur, le fait n'en est pas moins frappant.

D'autre part, il suffit d'étudier quelque peu les procédés de Diophante relatifs au changement d'inconnues, pour reconnaître que l'annulation du terme en x^2 dans une équation du

troisième degré n'eût été qu'un jeu pour lui. Enfin il est facile de montrer que, pour résoudre l'équation

$$(1) \qquad x^3 \mp 3px - 2q = 0,$$

les Grecs n'avaient à faire qu'un pas bien simple.

A propos des problèmes IV, 1, 2, BACHET a constaté qu'ils devaient être suivis d'une lacune qu'il a essayé de combler en résolvant divers problèmes, parmi lesquels celui de trouver deux nombres connaissant leur produit et soit la somme soit la différence de leurs cubes.

$$x^3 \pm y^3 = 2q,$$

$$xy = p.$$

Il est certain que ce problème n'eût pas arrêté DIOPHANTE un instant, et il est plus que probable qu'il a été posé et résolu par les Grecs.

Si, à la façon de DIOPHANTE, on prend pour inconnue

$$2z = x^3 \pm y^3,$$

comme d'ailleurs $x^3y^3 = p^3$, le problème se résout immédiatement comme les questions fondamentales du second degré (I, 30, 33), et l'on a finalement

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 \mp p^3}},$$

$$\pm y = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 \mp p^3}}.$$

Or, pour résoudre avec cela l'équation (1), que fallait-il? Qu'on essayât simplement de résoudre le problème d'une autre façon, en posant

$$z = x \pm y.$$

On tombe alors sur l'équation (1) et elle apparaît dès lors comme nécessairement soluble dans le cas irréductible.

La simplicité d'une telle déduction ne fait qu'augmenter la gloire de FERRO et de TARTAGLIA, car un pas si facile, personne ne semble l'avoir fait avant eux. Si l'on trouvait l'équation du troisième degré résolue chez les Arabes ou même chez les Hindous, il y aurait de fortes présomptions pour admettre au moins la possibilité d'une tradition hellène. Mais il paraît certain au contraire que la solution fut ignorée de l'un et de l'autre peuple. On doit également en conclure qu'elle le fut également des Grecs.

Quant à expliquer comment ils s'arrêtèrent devant un problème relativement aussi simple, voici ce qu'on en peut dire.

La solution des problèmes du second degré a été trouvée à peu près simultanément pour la géométrie et pour les nombres. Jusqu'à ce degré, il existe une correspondance parfaite entre les constructions algébriques et géométriques. Pour le troisième et quatrième degré, la solution fut obtenue géométriquement dès le IVe siècle av. J.-C., et elle semble bien avoir été aussi complète que possible, sinon dès cette époque, au moins après Apollonius. Mais la correspondance des constructions faisait défaut pour les nombres, et elle ne pouvait être comblée qu'à l'aide de constructions et de symboles qui appartiennent exclusivement à la mathématique moderne.

Les efforts de l'analyse numérique prirent donc, après sans doute quelques tentatives infructueuses, une direction tout autre; on se tourna vers les problèmes indéterminés. Quel fut le véritable caractère de ce travail, quels en furent les résultats, c'est ce que je chercherai à préciser en poursuivant ces études.

[1] Voir mon essai: *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide*, dans les Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 5_2, p. 395 suiv.

Die Söhne des Musa ben Schakir.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Über die drei Brüder, MUHAMMED, AHMED und HASAN, welche sich um die Mitte des X. Jahrh. als Mathematiker berühmt gemacht haben, finden sich Artikel und Notizen zertreut, welche man jetzt mit Hilfe der ältesten arabischen Quelle (*Fihrist* von NADIM ed. FLÜGEL) genauer prüfen kann.[1] Ich beabsichtige eine kurze Bibliographie der ihnen beigelegten *Schriften* und beginne mit einem jüngst in lateinischer Übersetzung veröffentlichen Werke.

I. Liber trium fratrum.

Die Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Band XLIX N° 2 (Halle 1885) enthalten die Schrift *Verba filiorum Moysi, filii Sekir* [lies *Schâkir*] etc. *Der Liber trium fratrum de geometria. Nach der Lesart des Cod. Basil. etc., herausg. von* MAXIMILIAN CURTZE — auch in Sonderabdruck mit doppelter Pagination (ich gebe die Seitenzahlen 109—167 der Acta an).[2]

Ich bin leider nicht Mathematiker von Fach, wie der wohlbekannte Herausgeber, und meine Bemerkungen können sich nur auf die äussere Geschichte des Buches beziehen, wie auf die Hilfsmittel, durch welche ein Mathematiker, der arabisch versteht, noch etwas für den Inhalt leisten könnte. Ich fühle mich zu diesen Bemerkungen um so mehr veranlasst, als Hr. CURTZE in seiner kurzen Einleitung, wie es scheint absichtlich, auf die nothwendigsten Angaben über die lateinische Übersetzung, auf welche schon CHASLES die Aufmerksamkeit gelenkt hat, sich beschränkt;[3] er erwähnt zwar (p. 160), dass der ungenannte lateinische Übersetzer GERARD VON CREMONA[4] sei, aber nicht dass das *arabische Original* erhalten sei. Man findet es in den mir bekannten Handschriften aufgenommen in der Sammlung welche die Araber »die mittleren Bücher» (zwischen EUCLID u. PTOLOMAEUS zu studirenden) nennen, und die meistens dem »kleinen Astronomen» im Griechischen entsprechen,[5] und zwar in einer Redaction des bekannten Astronomen TUSI (gest. 1274).[6] Bei genauer Erforschung der Handschriften dieser Sammlung wird man vielleicht noch weitere Exemplare unserer Schrift ent-

decken. Wir kennen bereits ein ms. der *Bodleiana* bei URI 960, in *Florenz*, Medic. 286 (bei ASSEMANI, p. 392);[7] ein drittes schönes ms. ist vor etwa 15 Jahren auf meine Empfehlung von der Berliner K. Bibliothek erworben (ms. or. 559 Qu.). Eine kurze Notiz darüber findet sich nur in dem (vielfach verbesserten und vermehrten) Sonderabdruck der *Vite di matematici arabi di* B. BALDI *con note di* M. STEINSCHNEIDER, *estratto dal Bullettino di bibliogr. d. sc. matem.* T. V. Roma 1874 (p. 89)», nicht im Bullettino. Diese Notiz ist gewiss Vielen entgangen.

Das Schriftchen führt den Titel: »Buch der Kenntniss der Messung der flachen und sphaerischen Figuren». Genau denselben Titel giebt HAGI KHALFA (V, 634 n. 12414), auch mit Weglassung des Wortes »Kenntniss» (V, 150 n. 10481) und verkürzt, als Bestandtheil der Redaction des TUSI (II, 213 n. 2496, wo FLÜGEL in der latein. Übersetzung: »auctoribus filii Musae» ergänzt).[8] Dafür hat das latein. Pariser ms. 9335 (hinter »Verba filiorum Moysi etc.») den eigentlichen, von CURTZE nicht erwähnten Titel: »Tractatus de mensuratione superficierum et solidorum in primis autem circuli et sphaerae», ebenfalls mit Weglassung des selbstverständlichen Wortes »Kenntniss», (am Anfang: »sciencie mensure figurarum superficialium et magnitudinis corporum»), aber auch des wesentlichen Wortes »Figuren» (s. weiter unten), und mit einer Paraphrase des Inhaltes.

Vergleichen wir nun damit die älteste Quelle über dieses Buch. Im *Fihrist* (p. 271) wird als letzte Schrift der Söhne des MUSA angegeben: »Buch der Messung der Kugeln (*plur.*) und Theilung der Winkel (*plur.*) in 3 gleiche Theile, und Aufstellung einer Quantität (*Mikdar*) zwischen zwei Quantitäten damit sie (oder: welche) nach einer einzigen Theilung (*Kisme*, Proportion) fortschreite(n).» Diesen Titel hat auch das unedirte biographische Lexicon von AL-KIFTI in den Handschriften, die ich kenne, nur mit wenigen Varianten; für Kugeln und Winkel im plur. steht dort die Einzahl — für ersteres bietet schon eine corrumpirte Lesart im *Fihrist*[9] den Übergang. Wichtiger ist die Abtrennung der Trisection des Winkels als einer *besonderen* Schrift durch Einschiebung des Wortes *Kitab*. CASIRI (I, 418) übersetzt: »de aequali Anguli *rectilinei* (!) trisectione» und lässt den letzten Theil des Inhalts weg, oder fand ihn nicht in seinem ms.[10]

Fihrist ist im Rechte, wenn er von nur *einem* Buche spricht. Das Problem der mittleren Proportionalen ist im Latein. n.

XVI (p. 150) so ausgedrückt: »Volo [11] ostendere, quomodo ponantur inter duas quantitates due quantitates ita ut continuentur quantitates quatuor secundum proporcionem unam.» Dieses XVI. Problem ist auch arabisch in ms. 1043, III des India Office in London mit Angabe des vollen Titels des Buches excerpirt, und LOTH theilt in seinem Catalog (London 1877, p. 298) den Anfang mit: »Wir wollen zwei Quantitäten finden etc.» Die Trisection des Winkels (quemcumque angulum) ist das Thema von n. XVIII (p. 155), aber in n. XIX (p. 157), also zuletzt, kommt die Anwendung der Proportionalen auf die Extraction der Kubikwurzel. Dazu stimmt sehr gut was AL-KIFTI von HASAN berichtet, dass er nämlich zuerst Probleme gelöst, wie die Trisection des Winkels (CASIRI hat auch hier: rectilinei) und der beiden Proportionalen. Es sei auch hier bemerkt, dass das arabische Original nur 18 Figuren oder Theoreme [12] zählt, da in der That n. XIX weder eine Figur, hat, noch eigentlich ein besonderes geometrisches Problem repräsentirt. Schwerlich waren die nn. XVI ff. ursprünglich besondere kleine Arbeiten des HASAN, welche nachträglich an die gemeinschaftlichen Arbeiten angefügt wurden.

Wichtig ist auch der Umstand, dass die arabischen Handschriften den *Anfang* der lateinischen Übersetzung *nicht enthalten*. Sie beginnen mit der Definition der Länge, wie das Fragment der latein. Übersetzung in Thorn (vgl. die Edition p. 116 und CURTZE's Note). [13] Da mir früher nur die ersten Zeilen des Buches bekannt waren, so vermuthete ich (siehe *Vite di matematici arabi* etc., p. 90), dass jener Anfang ein Vorwort des Übersetzers sein dürfte. Das ist nicht der Fall, und man muss jetzt umgekehrt fragen: wer hat den Anfang weggelassen? Doch nicht TUSI? Wie kommt es, dass diese Kürzung sich in den bekannten arabischen mss. und nur in dem Thorner lateinischen ms. findet? Darauf weiss ich keine genügende Antwort.

N. VII enthält 2 Beweise für die Fläche des Dreiecks als Function der 3 Seiten. Einer derselben ist vielleicht nicht von den 3 Brüdern. In dem Berliner arabischen ms. findet sich »ein anderer Beweis der VII. Figur des Buches der Söhne MUSA's» am *Ende* der ganzen Abhandlung, offenbar identisch mit dem »anderen Beweise», welcher dem isolirten Texte von n. VII in dem oben erwähnten ms. 1043 II des India Office *vorangeht*. LOTH (p. 288) meint, dieser Beweis sei wahrscheinlich von ABU DJA'AFER AL-KHAZIN; giebt aber keinerlei Grund für diese Vermuthung. Dieser Autor war ein Zeitgenosse des

ABU ZEID AHMED BEN SAHL AL-BALKHI, der um die Mitte des X. Jahrhunderts starb,[13] also auch ein Zeitgenosse der Söhne des MUSA. In einem Excerpt aus seinem Werke »Zidj as-Safâih»[14] sagt er: »Wenn ich die Trisection des Cirkels kennte, so wüsste ich die Sehne von $^1/_{360}$ (= Grad) des Kreises.» Darf man daraus schliessen, das AL-KHAZIN die Trisection der Söhne MUSA's noch nicht kannte? Wie sich die Beweise im Arabischen und Lateinischen zu einander verhalten, habe ich noch nicht untersucht.

Ich habe in der erwähnten Schrift: *Vite di matematici arabi*, etc., darauf hingewiesen, dass das arabische Original für die Herausgabe der lateinischen Übersetzung zu benutzen wäre; das ist nicht geschehen. Es würde sich aber wohl noch lohnen, einzelne Stellen aus dem Original zu übersetzen. Ich selbst bin auf ein einziges Auge angewiesen, das für meine Amtsgeschäfte und andere literarische Arbeiten mehr als rathsam angestrengt ist. Vielleicht sieht sich ein Arabist durch obige Notiz veranlasst, eines der drei mss. des Originals zu studiren und mit der Übersetzung zu vergleichen.

[1] Quellen über die Söhne des MUSA sind von mir angegeben in Zeitschrift der Deutschen Morgenländ. Gesellschaft, Bd. 24, 1870, S. 384, Note 97 (wo schon CURTZE's Ausgabe angekündigt wird), vgl. Bd. 25, 1871, S. 420; *Fihrist* II, 126 u. weiter unten.

[2] Recensionen der Ausgabe des *Liber trium fratrum* vom literaturhistorischen Standpunkt aus sind mir nicht bekannt.

[3] Er verweist z. B. nicht auf die specielle Besprechung des Buches und der Originalhandschriften in Zeitschr. für Mathem. etc., Bd. 10, 1865, S. 488. — Gleich das 2. Wort *quia* im Texte ist besser *quod* in ms. Paris 9335.

[4] Zeitschr. für Mathem., l. c. — LECLERC, *Hist. de la médecine arabe* (1876), II, 411, nennt nicht ms. Basel, F. WÜSTENFELD, *Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische,* (Göttingen 1877, S. 61), nicht das Thorner Fragment (n. I—VI), das eine verkürzte Redaction zu sein scheint. Vergl. weiter unten. Ein Fragment enthält ms. Digby 168[27] (*Catalog* MACRAY p. 175).

[5] CANTOR, *Vorlesungen*, S. 380; vgl. meine Abhandlung: *Euclid bei den Arabern;* Zeitschr. für Mathem., Bd. 31, 1886; Hist.-lit. Abth. S. 97.

[6] Vgl. über ihn: *Euclid bei den Arabern,* l. c., S. 97.

[7] Zeitschr. für Mathem., Bd. 10, 1865, S. 488.

[8] Über die werthlosen Varianten des Bodleianischen ms. von HAGI KHALFA s. Zeitschr. für Mathem., Bd. 10, 1865, S. 488.

[9] *Fihrist*, Bd. I, Lesarten, S. 24.

[10] L. P. E. A. SEDILLOT, *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg* (Paris 1847), p. XXII, druckt CASIRI's lateinische Übersetzungen durchweg ohne Berichtigung ab; die Lücke im Texte hat er hier durch Puncte anzugeben vergessen. Auch HAMMER-PURGSTALL, *Literaturgesch. der Araber*, Bd. 4, S. 311, giebt, wie CASIRI, »rechtwinkligen» Dreiecks, trotzdem er den arabischen Titel beifügt. — Das Excerpt aus AL-KIFTI im *Fihrist*, Bd. 2, S. 126, bricht vor der Aufzählung der Schriften ab.

[11] Hier und n. VII[a], p. 131 (s. weiter unten) für: volumus.

[12] Über diese Bedeutung des arabischen *Schakl*, *Aschkal*, s. *Euclid bei den Arabern*, l. c., S. 88, Note 10.

[13] Zeitschr. für Mathem., Bd. 10, 1865, S. 487, 497.

[14] *Catal. Codd. or. Lugd. Bat.*, t. III, p. 63 n. 1013, IV. Dieses Citat ist nachzutragen in meinen: *Études sur Zarkali*, p. 63 (Bullettino di bibliogr. d. sc. matem., T. 18, 1885, p. 351). Dort ist das Richtige über zwei andere mss. in Leyden angegeben, so wie über zwei Schriften AL-KHAZIN's. In der Abhandl. *Euclid bei den Arabern*, S. 89, Zeile 22, ist Etwas ausgefallen und nach Obigem zu berichtigen.

Otto anni d'insegnamento di Storia delle Matematiche nella R. Università di Padova.

Per ANTONIO FAVARO in Padova.

Accadendomi sovente di dover rispondere alle interpellanze, le quali da varie parti mi vengono dirette a proposito dell' insegnamento di storia delle matematiche da me impartito; mi pare non inopportuno esprimere con quella concisione, che è rigorosamente imposta dalle proporzioni stesse di questo periodico, il mio pensiero così intorno alla essenza di questa disciplina ed all' insegnamento di essa, giovandomi della esperienza da me fatta, come ancora intorno all' avvenire ch' io stimo ad essa serbato; e che, per l'affetto e la diligenza con cui l'ho finora coltivata, non ostante la indifferenza che nelle sfere ufficiali si è per questo mio tentativo dimostrata, vivamente le auguro.

A tale insegnamento io mi accinsi, avendo innanzi a me due scopi ben definiti. Anzitutto quello immediato di diffondere tra coloro, che sono chiamati a continuare le gloriose nostre tradizioni matematiche, la conoscenza delle vicissitudini, attraverso le quali in varie epoche andarono passando i diversi rami della nostra scienza. In seçondo luogo quello di guadagnare nuovi cultori agli studi di storia scientifica.

E, per quanto concerne il primo di tali scopi, dirò subito che io credo fermamente non possa cadere alcun dubbio sulla utilità, ed anzi sulla necessità, che i giovani, i quali si dedicano allo studio delle matematiche, ne conoscano la storia. Nè si può senza meraviglia considerare come mentre la storia del diritto in generale e quella del diritto romano in particolare, la storia della filosofia, la storia delle letterature, e presso alcune Università financo quella della medicina, tengono luogo fra le materie di studio reputate tra le più importanti, non siasi mai pensato a far posto nell' insegnamento superiore ufficiale alla storia delle matematiche. Imperocchè, se una qualche obbiezione potrà sollevarsi contro la necessità di far approfondire nello studio di questa disciplina tutti gli allievi delle nostre Facoltà di Scienze, la massima parte dei quali, trascorso il primo biennio, si avvia agli studi d'ingegneria, non ho mai saputo comprendere come tutti quelli che si destinano all' insegnamento possano conseguirne l'abilitazione, essendo affatto di-

giuni di qualsiasi nozione concernente la storia della disciplina, alla quale si propongono di dedicare tutta la loro vita.

Si dirà senza dubbio non darsi alcun insegnante di qualche levatura, il quale nelle sue lezioni non faccia una qualche parte alla storia, ed ogniqualvolta gli accada di trattare di una qualche celebre proposizione non tocchi degli scienziati, i quali contribuirono a risolverla od a dimostrarla; ma per quanto venga pur riconosciuta tutta la utilità che per l'efficacia dell' insegnamento può trarsi da questa lieve concessione, non deve credersi ch'essa abbia luogo abbastanza di frequente, nè che, quand'anche succedesse con maggiore larghezza, potesse in qualche misura supplire alla mancanza di un corso di storia scientifica, il quale non può in alcun modo essere sostituito da saltuarie e non concatenate nè proporzionate indicazioni fornite senza nesso logico e senza alcun riguardo all' ordine cronologico. Ed è non senza un effetto di dolorosa meraviglia che mi accadde ripetutamente di notare come da parte di taluni, anco tra coloro che vanno per la maggiore, e che affettano un certo disprezzo od almeno una assai marcata indifferenza per gli studi di storia scientifica, si ricorra ad essa in qualche solenne occasione per incatenare l'attenzione di un uditorio, per cattivarsene la benevolenza e strapparne un applauso, non riuscendo però il più delle volte che ad abboracciare una erudizione di seconda o di terza mano, fornita a buon mercato da enciclopedie o da dizionarii — la quale fa sorridere quelli i quali ben sanno a prezzo di quali fatiche si può far progredire di qualche passo la storia delle matematiche.

D'altronde la storia delle scienze non deve risguardarsi altrimenti che come la storia del metodo d'invenzione; ed è certo che l'esame dei mezzi impiegati e delle vie seguite per arricchire la scienza di scoperte feconde, conducendo a seguire passo a passo i più fortunati novatori, non potrà riuscire che di vantaggio sommo a chi, pur volendo alla sua volta ricalcare quelle traccie, dovrà pur giovarsi della esperienza del passato per tentare l'avvenire. Ed invero se lo studio dei tempi che furono non dovesse riuscir profittevole ai nostri, la importanza della storia sarebbe notevolmente diminuita. Nè mi ristarò dal domandare se sia giusto, ragionevole, e soprattutto conforme alle regole di un buon metodo didattico, il lasciare, come nella maggior parte dei casi avviene, che una scienza venga esposta come se fosse uscita nel suo attuale assetto dal cervello dell'umanità, o per meglio dire non si sa di dove, facendo sparire sotto una esposizione quasi dogmatica tutto quel lento e penoso

lavoro di mosaicista, al quale ogni generazione ha contribuito coi proprii sforzi, esposizione che non rappresenta più la immagine vera d'una scienza coi suoi soggetti di discussione continua, profonda; ma apparisce piuttosto come una rivelazione, un sistema, il quale non si sa nè d'onde abbia tratte le origini, nè come abbia progredito, nè, per conseguenza, come potrà perfezionarsi?

Questi concetti, nei quali abbiamo brevemente riassunte le principali e più stringenti argomentazioni degli studiosi più autorevoli di storia scientifica, sono tali per fermo da non aprire l'adito ad esitanze o ad obiezioni per parte di alcuno.

Che se, almeno finora, non fummo abbastanza felici nel raggiungimento del secondo degli scopi che ci eravamo proposti, noi crediamo che il motivo sia da cercarsene non già nella disconosciuta importanza, o nella non abbastanza riconosciuta utilità delle indagini intorno alla storia delle scienze, ma piuttosto nell' ordinamento stesso degli studi superiori in Italia.

Anzitutto, per potersi applicare con qualche profitto alla storia delle scienze, si richiede un corredo di coltura filologica, il quale permetta di risalire alle fonti, poichè senza di esso non è possibile compulsarle colla dovuta profondità, con affidamento cioè di essere per trarne tutto ciò che possono dare per lo studio di un determinato argomento, o per condurre a dovere una indagine determinata. Ora, ove si rifletta che buona parte degli studenti inscritti nella Facoltà di Scienze, la quale fornisce naturalmente il maggior contingente di uditori al corso di storia delle matematiche, proviene dagli Istituti Tecnici, nei quali non si studia nè il greco nè il latino, chè anzi questi scolari possono conseguire la laurea dottorale, dando soltanto un saggio estremamente imperfetto di conoscenza delle lingue classiche, si comprenderà senz' altro come siano sforniti delle cognizioni indispensabili per poter con qualche frutto leggere gli scritti dei sommi maestri, non solo nell' originale greco, ma nemmeno nelle traduzioni latine, che per molti tra essi sono le sole più facilmente accessibili. Per modo che sono costretto a ricordare come un caso di eccezione quello verificatosi una sola volta nel corso di otto anni, e nel quale, con numero per verità assai scarso di uditori, mi fu possibile di leggere ai miei scolari nell' originale il trattato delle spirali di ARCHIMEDE. Ma non è questa la sola difficoltà dipendente dalla causa accennata e che si opponga ad una maggiore diffusione di questi studi nel nostro ambiente universitario. Ve n'ha ancora un' altra, la quale, ripetendo le sue origini da altre circostanze, cospira tuttavia in pari e for-

corpo principale del lavoro, completare questo, giovandomi di tutto quel ricco materiale che per la storia delle scienze matematiche in Italia era dopo il LIBRI andato accumulandosi, e finalmente aggiungervi tutta la parte che comprende la storia delle scienze dalla morte di GALILEO fino a LAGRANGE. Con questo disegno in prospettiva e coi molti materiali, che per attuarlo avevo già raccolti, io inaugurai il mio corso di storia delle matematiche, esponendone ordinatamente lo sviluppo a partire dalle prime origini. Ricordo benissimo che, quando sottoposi questo mio piano ad un autorevolissimo cultore degli studi di storia delle matematiche, mi venne da lui opposto che avrei incontrate difficoltà gravissime nell' attuarlo, chè anzi non mi sarebbe stato possibile mandarlo ad effetto senza fortissime digressioni, andando, per ripetere le sue stesse parole, da Padova a Roma passando per Vienna e Costantinopoli. E la cosa si manifestò vera, nè intorno ad essa mi facevo illusioni di sorte alcuna; ma la possibilità di dare maggiore o minore estensione ad alcune parti piuttosto che ad altre, mi permise in generale di mantenermi abbastanza fedele al mio piano, anzi quasi del tutto fedele per qualche intervallo abbastanza lungo, come è quello per esempio che intercede fra LEONARDO PISANO e GALILEO. Degli otto anni trascorsi uno fu per intero dedicato ad ARCHIMEDE, un altro quasi per intero a LEONARDO ed i due ultimi lo furono completamente a GALILEO ed alla sua scuola, chiudendo colla morte del VIVIANI. Nel riprendere in quest' anno le lezioni fui lungamente incerto se avessi dovuto proseguire a trattare della storia delle matematiche in Italia nel secolo decimottavo; ma un pò perchè relativamente a questo periodo si accentuava maggiormente la sopraccennata difficoltà, un pò perchè i materiali da me raccolti per quest' epoca presentano tuttavia parecchie lacune, ne abbandonai il pensiero, e preferii rifarmi daccapo, là cioè di dove avevo preso le mosse nel 1878, avendo cura di lumeggiare maggiormente alcune parti che nella prima trattazione avevo lasciato piuttosto in ombra, cogliendo così la occasione per ritornare su quel lavoro già da me condotto sull' opera del LIBRI, per il caso in cui una volta o l'altra volessi servirmene per una qualche pubblicazione.

Se con tutto questo nuovo aggravio di lavoro, al quale mi sono volontariamente sobbarcato, io abbia acquistato qualche titolo di benemerenza, non tocca a me giudicare; la maggiore ricompensa ch' io n'avrei sperata, quella cioè di veder altri insegnanti delle nostre Università seguire il mio esempio, mi è purtroppo finora completamente mancata.

[redacted]

sole lezioni orali, date nella misura di tre per ogni settimana, e quindi, salvo in quel caso di eccezione che ho superiormente menzionato, senza che mi sia mai stato possibile, attesa la »libértà del corso», di chiamare almeno alcuni degli scolari a partecipare a lavori determinati, affine di far loro conoscere così il metodo che adoperar si deve nella indagine, come i principali materiali bibliografici che sono a disposizione di coloro che di tali indagini formano tema precipuo dei loro studi. E per quanto nelle mie lezioni non abbia mai trascurato di accennare anco a questo, con quella maggiore larghezza che mi era consentita dalla esposizione orale, pure è troppo grande il divario che passa tra la conoscenza d'uno strumento e d'un metodo per averlo sentito descrivere, e quella che se ne acquista dopo essersene serviti, perchè io possa serbare qualche illusione sulla effettiva utilità, che si sarà tratta da questa parte del mio insegnamento.

E perchè questa utilità sia piena, per quanto almeno mi permette di conchiuderlo la esperienza relativamente lunga da me fatta, sono persuaso intimamente essere assolutamente indispensabile che quando, come n'ho ferma fiducia, la storia delle matematiche avrà essa pure una cattedra nei pubblici Studi, assai più che all' insegnamento orale venga attribuita importanza alle conferenze in appositi seminarii, per servirmi dei termini di prammatica. Una brillante lezione orale fatta da un bravo professore potrà animare uno stuolo di scolari ad intraprendere e seguirne il corso; ma perchè prenda nell' animo loro radici la convinzione dell' utilità che da quell' insegnamento potranno trarre, è mestieri che alcuni almeno si sieno misurati colle difficoltà da superarsi per compiere una determinata indagine, ed abbiano gustata la inenarrabile soddisfazione che procura il nuovo risultato ottenuto.

Finalmente mi parebbe che anco questi pochi cenni riuscirebbero troppo incompleti se io non v' aggiungessi almeno qualche indicazione intorno alle materie svolte ai miei scolari in questi ultimi otto anni, e nel nono, del quale buona parte è gia trascorsa.

Allorquando nell' anno 1878 io avevo deliberato di tentare un corso libero di Storia delle Matematiche, non m' ero ancora così completamente dedicato agli studi galileiani, i quali poco appresso richiamarono tutta la mia attenzione ed assorbirono quasi completamente la mia attività scientifica, io divisava anzi allora di prendere in accurato esame l'opera capitale del Libri, dare alla introduzione le medesime proporzioni del

corpo principale del lavoro, completare questo, giovandomi di tutto quel ricco materiale che per la storia delle scienze matematiche in Italia era dopo il LIBRI andato accumulandosi, e finalmente aggiungervi tutta la parte che comprende la storia delle scienze dalla morte di GALILEO fino a LAGRANGE. Con questo disegno in prospettiva e coi molti materiali, che per attuarlo avevo già raccolti, io inaugurai il mio corso di storia delle matematiche, esponendone ordinatamente lo sviluppo a partire dalle prime origini. Ricordo benissimo che, quando sottoposi questo mio piano ad un autorevolissimo cultore degli studi di storia delle matematiche, mi venne da lui opposto che avrei incontrate difficoltà gravissime nell' attuarlo, chè anzi non mi sarebbe stato possibile mandarlo ad effetto senza fortissime digressioni, andando, per ripetere le sue stesse parole, da Padova a Roma passando per Vienna e Costantinopoli. E la cosa si manifestò vera, nè intorno ad essa mi facevo illusioni di sorte alcuna; ma la possibilità di dare maggiore o minore estensione ad alcune parti piuttosto che ad altre, mi permise in generale di mantenermi abbastanza fedele al mio piano, anzi quasi del tutto fedele per qualche intervallo abbastanza lungo, come è quello per esempio che intercede fra LEONARDO PISANO e GALILEO. Degli otto anni trascorsi uno fu per intero dedicato ad ARCHIMEDE, un altro quasi per intero a LEONARDO ed i due ultimi lo furono completamente a GALILEO ed alla sua scuola, chiudendo colla morte del VIVIANI. Nel riprendere in quest' anno le lezioni fui lungamente incerto se avessi dovuto proseguire a trattare della storia delle matematiche in Italia nel secolo decimottavo; ma un pò perchè relativamente a questo periodo si accentuava maggiormente la sopraccennata difficoltà, un pò perchè i materiali da me raccolti per quest' epoca presentano tuttavia parecchie lacune, ne abbandonai il pensiero, e preferii rifarmi daccapo, là cioè di dove avevo preso le mosse nel 1878, avendo cura di lumeggiare maggiormente alcune parti che nella prima trattazione avevo lasciato piuttosto in ombra, cogliendo così la occasione per ritornare su quel lavoro già da me condotto sull' opera del LIBRI, per il caso in cui una volta o l'altra volessi servirmene per una qualche pubblicazione.

Se con tutto questo nuovo aggravio di lavoro, al quale mi sono volontariamente sobbarcato, io abbia acquistato qualche titolo di benemerenza, non tocca a me giudicare; la maggiore ricompensa ch' io n'avrei sperata, quella cioè di veder altri insegnanti delle nostre Università seguire il mio esempio, mi è purtroppo finora completamente mancata.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

O. Baumgart. Über das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheorems in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien. Leipzig, Teubner 1885. In-8°, 104 p. — 2,40 M.

Herr Baumgart, der mit Recht die Geschichte des quadratischen Reciprocitätsgesetzes als Mikrokosmos der gleichzeitigen Gesamtgeschichte der Mathematik ansieht, giebt im ersten Teile seiner Arbeit, nach einleitender Besprechung der Untersuchungen von Fermat an bis Legendre, die Beweise des Reciprocitätsgesetzes, in fünf Abschnitte geteilt. In dem ersten findet sich nur der Gauss-Dirichlet'sche Inductionsbeweis, »diese Kraftprobe Gauss'schen Geistes». Der folgende Abschnitt giebt zwölf, sämtlich auf das Gauss'sche Lemma gegründete Beweise, deren Zusammenhang und deren Verschiedenheiten im zweiten Teile der Arbeit eingehend besprochen werden. Als Differenzpunkte werden hierbei die zur Verwendung gelangenden halben Restsysteme einerseits und die Behandlung der beiden charakteristischen Zahlen, welche das Lemma fordert, andrerseits angesehen. Auf die hiervon abweichende Einteilung des Herrn Kronecker (Berl. Berichte v. 30. April 1884) sei hierdurch hingewiesen. Der dritte Abschnitt des ersten Teils giebt dann den Eisenstein'schen auf die Benutzung goniometrischer Functionen gestützten Beweis, bei dessen Besprechung im zweiten Teile der Hinweis auf den Zusammenhang mit den Kronecker'schen Arbeiten (Berl. Berichte v. 7. Febr. 1884) fehlt. Es folgt weiter die Zusammenstellung von sieben Beweisen durch Sätze aus der Lehre von der Kreisteilung, welche naturgemäss zu interessanten Bemerkungen über die Geschichte der Gauss'schen Summen führt. Endlich im fünften Abschnitte werden der Gauss'sche und die Kummer'schen Beweise mit Hülfe der quadratischen Formen gegeben. Der erste Teil der Arbeit liefert dann noch eine Übersicht der Beweise für die Ergänzungssätze, das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz, sowie Algorithmen zur Bestimmung des quadratischen Rest- und Nichtrestcharakters einer Zahl in Bezug auf eine andere.

Berlin. E. Netto.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da **B. Boncompagni.** Tomo XVIII (1885). Roma 1885—1886. In-4°, 720 p.

La publication de ce recueil a commencé en 1868. D'après son plan, chaque année doit contenir au moins 288 pages grand-in-4°; cependant, ordinairement cette limite inférieure a été considérablement excédée. Ainsi le tome XVII (1884) contient non moins de 960 pages.

Les 18 forts volumes parus jusqu'à présent renferment un très grand nombre de mémoires, en partie excessivement importants, et en particulier le recueil est absolument indispensable pour quiconque veut étudier de plus près l'histoire des mathématiques au moyen âge.

Pour ce qui concerne le tome XVIII, il contient des mémoires se rapportant à différentes époques de l'histoire des mathématiques. M. Steinschneider y a continué (p. 343—360) ses *Etudes sur Zarkali* commencées déjà dans le tome XIV (1881). On sait que Zarkali avait inventé une tablette astronomique nommée *Safiha* et composé un écrit sur cet instrument; M. Steinschneider donne de nombreux renseignements sur les auteurs arabes et juifs qui ont traité le même sujet. — M. Favaro a communiqué (p. 405—423) un *appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de Beldomandi, matematico padovano del secolo XV*, où il décrit deux manuscrits de la collection Libri-Ashburnham contenant divers ouvrages de Prosdocimo, et un manuscrit de la bibliothèque publique de Lucca; ces ouvrages ont trait à l'astronomie et à la musique. De plus, M. Favaro signale deux documents où est nommé Prosdocimo, et enfin une médaille sur lui, dont on ne connaît à présent aucun exemplaire.

M. Favaro a publié aussi deux mémoires sur Galilei, savoir (p. 1—112, 151—230) *Documenti inediti per la storia dei manoscritti Galileiani nella biblioteca nazionale di Firenze* et (p. 321—326) *Conchiusioni sull' Accademico Incognito oppositore al Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono.* Le premier de ces mémoires renferme un grand nombre de documents et de notices sur les manuscrits galiléiens de la »Biblioteca nazionale di Firenze«, depuis la mort de Galilei jusqu'à leur transportation en 1861 à cette bibliothèque. Dans le second mémoire, M. Favaro confirme l'assertion, émise préalablement par lui, que l'*accademico incognito* en question était Monsignor Arturo Pannocchieschi.

A l'histoire des mathématiques pendant le 18e siècle se rat-

tachent les articles de MM. CATALAN: *Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli* (p. 464—467), ENESTRÖM: *Sur un théorème de Goldbach* (p. 468) et HENRY: *Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, etc.* (p. 507—570, 605—649). Le premier article est relatif à la sommation de quelques séries, traitée dans la correspondance entre GOLDBACH et DANIEL BERNOULLI publiée par FUSS; le second contient une notice historique sur ce théorème: »tout nombre pair est une somme de deux nombres premiers»; enfin la publication de M. HENRY renferme 113 lettres, et une liste des travaux mathématiques inédits de D'ALEMBERT.

Sur la théorie des nombres, il y a une note historique de M. KRONECKER: *Intorno alla storia della legge di reciprocità* (p. 244—249), et diverses notes de M. GENOCCHI: *Ancora un cenno dei residui cubici e biquadratici* (p. 231—234); *Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers* (p. 235—237); *Sur quelques théorèmes qui peuvent conduire à la loi de réciprocité de Legendre* (p. 238—243); *Intorno all' ampliazione d'un lemma di Gauss* (p. 650—651). Par la note de M. KRONECKER, traduite des Monatsberichte d. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1875, il est constaté, que la loi de réciprocité a été proposée par EULER, mais démontrée rigoureusement seulement par GAUSS. Quant aux notes de M. GENOCCHI, elles ne sont qu'en partie historiques.

Des biographies scientifiques ont été insérées par MM. PORRO: *Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Guiseppe Zecchini Leonelli, matematico cremonese* (p. 652—660); MARRE: *Notice sur la vie et les travaux de François-Joseph Lionnet* (p. 424—428), avec un *catalogue des travaux de François-Joseph Lionnet* (p. 429—440); et BIADEGO: *Intorno alla vita ed ai lavori di Alberto Castigliano* (p. 293—313), avec un *catalogo dei lavori di Alberto Castigliano* (p. 314—320) dressé par le prince BONCOMPAGNI lui-même. LEONELLI, né à Cremona en 1776, mort à Corfù le 12 octobre 1847, est connu principalement comme inventeur des logarithmes d'addition et de soustraction; à la biographie, M. PORRO a ajouté (p. 661—671) trois écrits inédits de LEONELLI: sur une formule trigonométrique, sur l'invention de deux moyennes proportionnelles, et sur une propriété de la racine carrée de 3. — LIONNET, né à Nancy le 9 décembre 1805, mort à Paris le 26 août 1884, est auteur de divers écrits de mathématiques pures, en particulier de traités de géométrie et d'arithmétique. — CASTIGLIANO, né à Asti le 8 novembre 1847, mort à Milano le 25 octobre 1884,

a publié plusieurs ouvrages se rapportant tous aux mathématiques appliquées, parmi lesquels il convient de signaler le *Manuale pratico per gli ingegneri* (I—III, 1882—1884).

Reste encore à mentionner une *Notice bibliographique sur les traductions en Suédois des Eléments d'Euclide* par M. ENESTRÖM (p. 332—342), un compte rendu du tome 2 de l'ouvrage: *Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe* par M. FAVARO (p. 327—331), et une analyse de deux mémoires intitulés: *Le nombre géométrique de Platon par L. Dupuis* par M. BERTAULD (p. 441—550). M. BERTAULD conclut que le nombre est, conformément à l'opinion de M. DUPUIS, 760,000.

Enfin le volume dont il s'agit, contient un écrit de M. FORTI: *Intorno alle macchie solari* (p. 453—463) donnant une notice populaire sur les tâches solaires et quelques renseignements historiques sur le même sujet; un compte rendu de M. LE PAIGE sur un mémoire de géométrie de M. d'OCAGNE; et six *Annunzi di recenti pubblicazioni*.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Brunel. MONOGRAPHIE DE LA FONCTION GAMMA. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3e série, tome 3. Bordeaux 1886. In-8°, 184 p.

Cet ouvrage est à peu près semblable aux *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* de MATTHIESSEN; donc le but n'en est pas en premier lieu historique, mais il contient des matériaux pour l'histoire de la fonction gamma. Prenant comme base les principaux théorèmes qui se présentent dans la théorie de cette fonction, l'auteur y a rattaché les différents travaux sur ce sujet, et il a donné en chaque occasion des renseignements bibliographiques aussi complets que possible. Enfin il a ajouté une bibliographie (par ordre chronologique des écrits) de la fonction gamma et un appendice sur le calcul fonctionnel.

L'invention de la fonction gamma appartient, comme on le sait, à EULER. D'après SUTER (*Geschichte der mathematischen Wissenschaften* Th. 2, 1875, p. 247), EULER n'aurait traité la théorie de cette fonction qu'en un mémoire rédigé en 1776 et publié plus tard dans les Nova acta academiæ Petropolitanæ, T. 8, 1790. Cependant cette indication est peu exacte, et M. BRUNEL fait remarquer très justement que, dès l'année 1729, EULER avait représenté la fonction gamma tant par un produit infini que par l'intégrale $\int_0^1 (-\log x)^n dx$; les passages

de la correspondance d'EULER avec GOLDBACH, se rapportant à ce point, sont reproduits textuellement par M. BRUNEL, d'après la Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle publiée par P.-H. FUSS. (St.Pétersbourg 1843, in-8°).

Un autre passage ayant un intérêt historique immédiat se trouve aux pages 52—57, où M. BRUNEL, marchant sur les pas de GLAISHER (*on the history of EULER's constant,* Messenger of mathematics 1_2, 1872), a inséré un precis de l'histoire de la constante 0,5772 . . , appelée souvent inexactement la constante de MASCHERONI, bien qu'elle ait été découverte par EULER et calculée par lui jusqu'à 15 décimales exactes.

A la page 97, M. BRUNEL signale, en parlant de la formule sommatoire d'EULER, que cette formule a été trouvée par MACLAURIN bien qu'on l'attribue généralement à EULER. Cette indication doit être modifiée; en effet, j'ai démontré en 1879, dans la note citée par M. BRUNEL à la page 178, que la formule dont il s'agit est due en premier lieu à EULER (comparez J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* 1886, p. 352).

Quant aux indications bibliographiques, il y a ça et là de petites corrections à faire; ainsi il faut lire p. 57, l. 7: *J. de Cr.,* t. XVII (au lieu de XIX); p. 131, l. 7: 1676 (au lieu de 1766); p. 179, l. 18: *Upsal. N. Acta,* t. XI (au lieu de XI, XII).

A la bibliographie on pourrait ajouter encore un certain nombre d'écrits, en particulier pour les années 1881—1884 ceux de MM. BERGER, CATALAN, LINDHAGEN, BOURGUET et SCHOBLOCH signalés dans les Fortschritte der Mathematik et dans la Bibliotheca Mathematica. — Un indice des noms d'auteurs à la fin de la monographie aurait sans doute été très agréable aux lecteurs.

Dans l'introduction, M. BRUNEL remarque: »Nous croyons qu'il sera bientôt indispensable de faire pour chaque branche de l'analyse un travail à peu près semblable à celui que nous offrons aujourd'hui».

De notre côté, nous sommes parfaitement d'accord avec M. BRUNEL sur ce point, et nous nous permettons par conséquent d'exprimer notre vif désir de voir bientôt paraître beaucoup de monographies semblables à celle dont nous venons de rendre compte.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von — journal d'histoire des mathématiques rédigé par G. ENESTRÖM. Stockholm. 4°.
1887 : 1. — [Notice sur ce journal:] *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti **3**$_4$, 1887, *1*: 151—152. (E. NARDUCCI.) — *Napoli*, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto **26**, 1887, 43—44. (G. GOVI.) — Centralbl. f. Bibliothekswesen **4**, 1887, 231. (A. G[RAESEL].)

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.
19 (1886): 5—6.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
32 (1887): 2.

Allman, G. J., On the name of the so-called »theorem of the gnomon«.
Biblioth. Mathem. 1887, 22.

Bjerknes, C. A., [Notice biographique sur J. Hoüel.]
Christiania, Videnskabs-Selsk., Oversigt 1886, 17—21.

Bordage, E., Claude Mydorge (1585—1647). Notice sur un de ses manuscrits. Constructions de géométrie pratique dues à ce mathématicien.
Journ. de mathém. élém. (de Bourget) **5**$_2$, 1886, 12—16.

Carr, G. S., A synopsis of elementary results in pure mathematics: containing propositions, formulæ, and methods of analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an index to the papers on pure mathematics which are to be found in the principal journals and transactions of learned societies, both English and Foreign, of the present century. London, Hodgson 1886.
8°, XXXVI + (1) + 935 p. + 21 pl. — [34 sh.] — Les pages 846—935 contiennent une table bibliographique analytique.

Eneström, G., Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques.
Biblioth. Mathem. 1887, 3—7.

Eneström, G., Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718.
Biblioth. Mathem. 1887, 23—24.

Favaro, A., La libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 219—290.

Friis, F. R., Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1568 ad annum 1587 nunc primum col-

lectae et editae. Cum exemplo Tychonis Brahei manus. Fasc. IV. Hauniae, Gad 1886.

4°, VIII p. + p. 97—112 + facsim. — Les cahiers I—III ont été publiés en 1876 et 1877.

Gilbert, G., Correspondance de René-François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une introduction par C. Le Paige.

Bruxelles, Soc. scient., Revue **19**, 1886, 141—167.

Govi, G., Sulla invenzione del barometro a sifone.

Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto **25**, 1886, 286—290.

Günther, S., War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt?

Biblioth. Mathem. 1887, 8—14.

Hecker, J., Über Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade. Bonn 1886.

8°, 29 + (2) p. — Inaugural-Dissertation.

Henry, Ch., Les voyages de Balthasar de Monconys. Documents pour l'histoire des sciences, avec une introduction. Paris, Hermann 1887.

4°, 108 + (4) p. — Cet ouvrage contient quelques notices sur les mathématiciens du 17e siècle.

Houzeau, J. C., Coup d'oeil sur l'évolution scientifique.

Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin $\mathbf{12}_3$, 1886, 795—813.

Le Paige, C., Un géomètre Belge du XVIIe siècle. René-François de Sluse.

| Ciel et terre (Bruxelles) $\mathbf{2}_2$, 1887. 20 p.

Loewy, Notice sur la vie et les travaux de M. Oppolzer.

Bullet. astronom. **4**, 1887, 42—48.

°**Maleyx, L.,** Etude sur la méthode suivie par Archimède pour déterminer approximativement le rapport de la circonférence au diamètre, suivie d'un procédé élémentaire pour résoudre la même question. Paris, Gauthier-Villars 1886.

8°, 36 p. — [1,25 fr.]

Müller, F., Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums. Berlin 1887.

4°, 32 p.

°**Netoliczka, E.,** Illustrierte Geschichte der Elektricität von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Für weitere Kreise bearbeitet. Wien, Pichler 1886.

8°, 288 p. — [Analyse:] Arch. der Mathem. $\mathbf{4}_2$, 1886; Litter. Ber. 41—42. (H.)

[Notice biographique sur J. Hoüel.]

Bullet. astronom. **4**, 1887, 19.

Notice nécrologique sur S. Realis.
Journ. de mathém. élém. (de Bourget) **10**$_2$, 1886, 87—91.

Pujazon, C., Sobre la duda historica referente al teorema
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$
Crónica cientifica **9**, 1886, 105—117.

Riccardi, P., Nota relativa ad una edizione del Nuncius sidereus del Galilei.
Biblioth. Mathem. 1887, 15—16.

Rouché, E., Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux.
Paris, Ec. polytechn., Journal **56**, 1887. — [Reproduit:] Nouv. ann. de mathém. **6**$_3$, 1887, 105—173.

Société mathématique de France, Répertoire bibliographique. [III.] Paris 1887.
8°, 2 p.

Suter, H., Die Quaestio »De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem« des Albertus de Saxonia.
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 41—56.

Tannery, P., L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.
Biblioth. Mathem. 1887, 17—21.

Tannery, P., Les continuateurs d'Euclide.
Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887, 87—96.

Tannery, P., Heron sur Euclide.
Bullet. des sc. mathém. **11**$_2$, 1887, 97—108.

°**Urbanitzky, A. von**, Elektricität und Magnetismus im Alterthume. Wien, Hartleben (1886).
8°, 284 p. — [Analyse:] Arch. der Mathem. **4**$_2$, 1886; Litter. Ber. 42—43. (H.)

[Bierens de Haan, D.], Liste alphabétique de la correspondance de Chr. Huygens qui sera publiée par la société Hollandaise des sciences à Harlem. Harlem (1886). 4°.
Arch. der Mathem. **4**$_2$, 1886; Litter. Ber. 45—46. (H.)

Boncompagni, B., [Sur un manuscrit de traité de géométrie attribué à Petrus de Dacia.] (Biblioth. Mathem. 1885.)
Arch. der Mathem. **4**$_2$, 1886; Litter. Ber. 45. (H.)

Descartes, R., La géométrie. Nouvelle édition. Paris, Hermann 1886. 4°.
Revue scient. **39**, 1887, 152. — Biblioth. Mathem. 1887, 25—26. (G. Eneström.)

Eneström, G., Sur un théorème de Goldbach. (Extr. des Atti dell' Accad. pontif. de' Nuovi Lincei, t. 38). Roma 1885. 4°.
Arch. der Mathem. **4**$_2$, 1886; Litt. Ber. 44—45. (H.)

Eneström, G., Notice bibliographique sur les traductions en Suédois des Eléments d'Euclide. (Extrait du Bullett. di bibliogr. d. sc. matem., t. 18.) Rome 1885. 4°.
Arch. der Mathem. **4**$_2$, 1886; Litter. Ber. 45. (H.)

FAVARO, A., Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche (Memorie dell' Istituto Veneto, vol. 22.) Venezia 1887. 4°.
Biblioth. Mathem. 1887, 28. (G. ENESTRÖM.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 5_6, 1886—1887, 4—5.

FAVARO, A., Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI. et XVII. con Giovanni Antonio Magini. Bologna, Zanichelli 1886. 8°.
Nordisk Tidskrift (Stockholm) 1887, 267—269. (G. ENESTRÖM.)

GÜNTHER, S., Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers. (Beilage zum Jahresbericht der Königl. Studienanstalt Ansbach für 1885—1886.) Ansbach 1886. 8°.
Biblioth. Mathem. 1887, 26—27. (E. GELCICH.)

KRIMMEL, O., Nekrolog des k. württembergischen Oberstudienrats Dr. Christian Heinrich von Nagel. (Aus dem Correspondenzbl. für d. Gel. und Realschulew. Württembergs.) Tübingen, Fues 1884. 8°.
Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 46. (H.)

MARIE, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome VII. De Newton à Euler. Tome VIII. D'Euler à Lagrange. Paris, Gauthier-Villars 1885. 8°.
Beibl. d. Ann. d. Phys. 9, 1886, 62—63.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide Arbeit kommt alles te boven», gedurende het tidsverloop van 1818—1882. Amsterdam 1885. 8°.
Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 45. (H.)

SERVUS, H., Die Geschichte des Fernrohrs bis auf die neueste Zeit. Berlin, Springer 1886. 8°.
Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 40—41. (H.) — Liter. Centralbl. 1887, 54.

TANNERY, P., Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction). Extrait des notices et extraits des manuscrits de la bibliothéque nationale. Tome XXXII, 1^er^ partie. Paris 1886. 4°.
Biblioth. Mathem. 1887, 28—29. (G. ENESTRÖM.) — Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887, 97.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1887, 30—31. — Fiziko-matematitcheskaia naouki 3, 1887, B: 32, 47—48. — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 19, 1886, 294—334.

Question [sur l'invention du symbole ∞].
Biblioth. Mathem. 1887, 32.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

15. La première courbe qui ait été rectifiée est la parabole semi-cubique, et cette importante découverte a été faite à peu près simultanément par NEIL et VAN HEURAET. Quant aux détails de la découverte, les auteurs contemporains (en particulier HUYGENS et WALLIS) ne sont pas parfaitement d'accord. On demande une recherche critique sur la question de priorité, une exposition succinte des méthodes employées par les deux mathématiciens, et une comparaison entre elles. Parmi les sources, il faut consulter en premier lieu: WALLIS, *Opera mathematica,* t. 1 (1695), p. 550—554; WALLIS, *Epistola,* Philos. Transactions 1673, p. 6146—6149; HUYGENS, *Horologium oscillatorium* (1673), p. 71; DESCARTES, *Geometria, ed.* F. A SCHOOTEN (1659), p. 517—520. (G. Eneström.)

Antwort auf die Anfrage 14. WALLIS, *Arithmetica infinitorum* (1655) schreibt, prop. 5: »erit angulus $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitesima seu infinite parva) anguli etc.»; prop. 93: »$A\partial = \infty$ infinitum», prop. 108; 121; 182; ... Hiernach ist nicht zu entscheiden, ob das Zeichen von WALLIS erfunden oder adoptirt worden. Bei NEWTON und LEIBNIZ scheint das Zeichen nicht vorzukommen; es kommt vor bei JAK. BERNOULLI, *Ars conjectandi* (op. post. 1713) p. 295. (Vergleiche meine *Elemente der Mathematik:* Allgemeine Arithmetik § 12, 8.)

(R. Baltzer.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1887.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887. STOCKHOLM. № 3.

NEUE FOLGE. 1.
BERLIN. MAYER & MÜLLER
Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M.
Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 1.
PARIS. A. HERMANN.
Rue de la Sorbonne 8.

Notiz zur Geschichte der Klimatologie.

Von S. GÜNTHER in München.

Die Meteorologie ist, wie jedermann weiss, ein Kind der Neuzeit, wenigstens war das, was während des Altertums und Mittelalters allenfalls mit diesem Namen bezeichnet werden könnte, wesentlich nur ein Zweig der Astrologie, und an die für uns so natürlich erscheinende Thatsache, dass Wind und Wetter nicht vom Laufe der Himmelskörper, sondern von sehr irdischen Ursachen abhängig seien, haben nur wenige gedacht. Um so mehr ist es Pflicht, alle einzelnen Fälle sorgfältig zu sammeln und zu registrieren, in denen sich eine richtigere Auffassung Bahn bricht, wo namentlich für das Wesen der *klimatischen Faktoren* ein richtiges Verständnis an den Tag gelegt wird. So hat z. B. PARTSCH in seinem bekannten bedeutenden Werke[1] ziemlich viele Vorkommnisse dieser Art vermerkt; er zeigt, wie hervorragende Geister Griechenlands, ein ARISTOTELES, THEOPHRAST, STRABON für so manche Eigentümlichkeit des hellenischen Klimas die zutreffende physikalische Erklärung erbrachten oder doch wenigstens ahnten. Aus einer Stelle bei PLINIUS (II, 48) wollte PESCHEL sogar schliessen,[2] dass man von der häufigen Drehung des Windes im Sinne des Uhrzeigers eine zutreffende Vorstellung gehabt habe. Und in einer Angabe in der Schrift des THEOPHRAST »von den Winden» scheint sogar bereits der Gegensatz zwischen dem *Küsten- und Binnenklima* angedeutet zu sein.[3]

Gerade diesen Unterschied schärfer zu erfassen war man aber auf griechischem Boden nicht in der Lage, da die klima-

tischen Verhältnisse des eigenen Landes die jähen Sprünge nicht vor Augen stellen, welche eben das Innere eines Kontinentes charakterisieren. Im Innern von Aetolien und Arkadien mögen ja Annäherungen an das Festlandsklima zu verzeichnen sein, allein ebendort hielten sich die wissenschaftlich gebildeten Beobachter auch nie anders als nur vorübergehend auf, und die Aussenregion war teils von dem männiglich bekannten Wechsel der Land- und Seebrise teils von dem Wehen des Monsuns (der »Etesien«) beherrscht. Erst die Eroberungslust der Römer brachte ein antikes Kulturvolk auch mit Landstrichen in unmittelbare Berührung, welche die bezeichnenden Eigenschaften beider Klimate in reiner Ausprägung aufwiesen. Zumal die britischen Inseln, welche seit der Entdeckungsfahrt des Pytheas das Interesse der Geographen auf sich gezogen hatten, waren für vergleichende Studien der bezeichneten Art in hohem Grade geeignet.

Von dem englischen Nebel hegte man schon frühe sehr hohe, ja sogar etwas übertriebene Vorstellungen; nach Strabon wäre für die Bewohner der Insel der Anblick der Sonne an äusserst enge Grenzen gebunden gewesen.* Sehr korrekt äussert sich ferner Tacitus in seiner Lebensbeschreibung des Agricola; wenigstens der thatsächliche Bericht beruht auf guter Information,** so sehr auch der Erzähler bezüglich der Erklärungsgründe fehlgreift. Den wirklichen Sachverhalt konnte freilich ein Zeitalter nicht erkennen, das mit Ausnahme weniger gut mathematisch gebildeter Männer von der »Sphaera parallela« nichts wusste; geht doch auch aus dem einschlägigen Berichte des Plinius über Thule (II, 77; IV, 30) deutlich hervor, dass der Autor an die Wahrheit der von ihm nach vertrauenswürdigen Vorlagen gebrachten Mitteilungen zwar glaubt, ohne jedoch von deren innerer Notwendigkeit durchdrungen zu sein.

---

* »Ὥστε δι' ἡμέρας ὅλης ἐπὶ τρεῖς μόνον ἢ τέτταρας ὥρας τὰς περὶ τὴν μεσημβρίαν ὁρᾶσθαι τὸν ἥλιον.«

** Im zwölften Kapitel heisst es: »Coelum crebris imbribus foedum ac nebulis; asperitas frigorum abest. Dierum spatia ultra nostri orbis mensuram; et nox clara, et extrema Britanniae parte brevis, ut finem atque initium lucis exiguo discrimine internoscas . . . Scilicet extrema et plana terrarum, humili umbra, non erigunt tenebras, infraque coelum et sidera nox cadit«. Dieser letzte Satz ist schwer verständlich, und Klein versichert,* dass die Ausleger von Übereinstimmung in der Auffassung dieser Worte weit entfernt seien. Er selbst gibt den Passus deutsch in nachstehender Weise wieder: »Nämlich die äussersten und flachen Gegenden der Erde lassen bei niedrigen Schatten die Finsternis nicht in die Höhe, und unterhalb des Himmels und der Sterne fällt die Nacht.« Recht klug wird auch aus dieser Version niemand werden.

— Während also durch die genannten Schriftsteller die Kunde von der Eigenart des britischen Klimas weiteren Kreisen vermittelt var, hatte CICERO auch längst der Vermutung Raum gegeben, dass das Meer der Wärmespender für die von ihm bespülten Länder sei.* Es fehlte sonach nur noch an einer Verbindung des über Britannien vorliegenden Thatsachenmaterials mit der von CICERO ausgesprochenen allgemeinen Wahrheit, um wenigstens an einem Spezialfalle — und zwar gerade an dem denkbarst günstigen — das Wesen des Inselklimas zu erkennen.

Eine solche Verbindung sehen wir jedoch erst hergestellt durch den ersten und ältesten christlichen Apologeten, den das Römertum hervorbrachte, durch MINUCIUS FELIX.** In seinem Dialoge »*Octavius*«, welcher eigens dazu verfasst ist, um mehr durch logische und ethische als durch eigentlich religiöse Argumente die Nichtigkeit des Heidentums darzuthun, legt dieser beredte Verfechter seines Standpunktes besonderes Gewicht auf seine *teleologische Beweisführung:* der Gegner soll allüberall in Natur und Menschenwerk den Finger eines allweisen und allmächtigen Gottes erblicken lernen. Zu diesem Zwecke macht MINUCIUS FELIX mit Vorliebe Anleihen bei der physischen Geographie, die vielfach Belege für den väterlichen Sinn des Schöpfers an die Hand gebe.*** Im achtzehnten Kapitel wird

* CICERO, *De natura deorum,* II, 10: »Maria agitata ventis ita tepescunt, ut intelligi facile possit, in tantis illis humoribus inclusum esse calorem«. Ein phantasiereicher Leser könnte aus diesem Zusammenhang sogar eine Antizipation der mechanischen Wärmetheorie herauslesen.

** Das Zeitalter des MINUCIUS FELIX ist nicht völlig genau bekannt, doch ist durch EBERTS Untersuchungen,[5] aller Einwürfe HARTELS unerachtet, soviel festgestellt, dass der erste eigentliche Kirchenvater mit lateinischer Schriftsprache, TERTULLIANUS, den »*Octavius*« stark benützt hat, und damit ist wenigstens eine obere Grenze für die Lebenszeit des zuerst Genannten gegeben. Wie KÜHN nachweist,[6] hat sich MINUCIUS grossenteils an CICEROS Essay über das Wesen der Götter gehalten, dem er z. B. die Ausführungen über ältere philosophische Systeme teilweise wörtlich entlehnt hat. Hierauf und auf die strabonische Quelle weist auch LÜBKERT in seiner umfassenden Monographie über den Dialog des MINUCIUS hin.[7]

*** Bemerkenswert mag man u. a. auch die Betrachtungen über die ferne Zukunft des Erdballs (cap. 34) finden: ». . . Coelum quoque cum omnibus, quae coelo continentur, itu ut coepisse desinere. Fontium dulci aqua marisve nutriri in vim ignis abiturum, Stoicis constans opinio est, quod consumto humore mundus hic omnis ignescat; et Epicureis de elementorum conflagratione eadem ipsa sententia est.« Bekanntlich gibt es auch heute noch eine Geologenschule, deren Lehren zufolge dereinst alle auf der Erde vorhandene Flüssigkeit aufgesogen und gebunden sein wird, und wenn man den MINUCIUS verkünden hört, dass, sobald dieser Prozess sein Ende er-

dieser Gedanke ausgeführt, wie folgt: »Nec universitati solummodo, sed et partibus consulit. Britannia sole deficitur, sed circumfluentis maris tepore recreatur; Aegypti siccitatem temperat Nilus, colit Euphrates Mesopotamiam; Indus et serere Orientem dicitur et rigare«.*

MINUCIUS hat sich, wie dieser Satz beweist, ein richtiges Urteil von dem klimatischen Zustande der britischen Inseln zu bilden verstanden. An direkter Bestrahlung durch die Sonne herrscht dort empfindlicher Mangel, die Wolkendecke verhindert eine solche, allein ebenderselben Agens, welches am Zustandekommen dieser Nebelhülle schuld ist, bewirkt durch die ihm innewohnende Wärme den Ausgleich. Damit ist aber eben dieselbe Charakteristik des Seeklimas gegeben, welche in unseren Lehrbüchern steht.** Verschiedene spätere Autoren der patristischen Periode haben sich von MINUCIUS' begeisterter und naturgetreuer Schilderung des Ozeanes als eines Wohlthäters der Menschheit, zu ähnlichen und noch weiter ausgesponnenen Erörterungen über das Meer unter dem Gesichtspunkte des Zweckmässigkeitsbegriffes hinreissen lassen, so vor allen AMBROSIUS,[11] allein der uns hier interessierende Gegenstand tritt in allen diesen späteren Darstellungen zurück, und wir dürfen mit Fug behaupten, dass MINUCIUS die ihm bekannten Gelegenheitsäusserungen eines STRABON, CICERO und TACITUS*** zu einer freilich sehr kurzen aber in ihrer Kürze abgerundeten Skizze des insularen Klimas verarbeitet hat.

---

reicht hat, unser Planet für die Zerstörung reif sein werde, so wird man unwillkürlich erinnert an TRAUTSCHOLDS Ausspruch: »Après nous la sécheresse«.[8]

* In der besten vorhandenen deutschen Übersetzung des MINUCIUS, in derjenigen von DOMBART, hat unsere Stelle diesen Wortlaut:[9] »Doch Gott sorgt nicht nur für das Ganze, sondern auch für die einzelnen Teile. Britannien hat Mangel an Sonnenwärme, aber dieser Mangel gleicht sich aus infolge der Lauheit des Meeres, von welchem es umschlossen wird. Die Trockenheit Aegyptens mässigt der Nilstrom, der Euphrat tränkt Mesopotamien an Stelle des Regens, und vom Indus sagt man, er besame zugleich und bewässere den Orient.«

** Die Kommentatoren des Römers pflegen auf die meteorologische Seite seiner Darlegungen nicht einzugehen. Nur der Belgier LÉONARD macht dazu eine Bemerkung:[10] »On sait aujourd'hui que ce sont les courants sousmarins partis des mers équatoriales qui viennent échauffer les eaux du littoral des îles Britanniques.«

*** TACITUS berührt noch einen zweiten Punkt, welcher zu der Frage, ob Seeklima oder nicht, in allerengster Kausalbeziehung steht. In KLEINS Übertragung heisst es nämlich:[12] »Der Boden Britanniens ist — den Ölbaum und Weinstock und andere, heissern Gegenständen eigentümliche Erzeugnisse ausgenommen — gedeihlich für Früchte und ergiebig. Sie reifen langsam, sprossen schnell hervor: beides einerlei Ursache: die viele Feuchtigkeit des

[1] PARTSCH-NEUMANN, *Physikalische Geographie von Griechenland*, Breslau 1885.

[2] PESCHEL-RUGE, *Geschichte der Erdkunde bis auf Alexander v. Humboldt und Carl Ritter*, München 1877. S. 70.

[3] Ibid. S. 73.

[4] *Des* C. CORN. TACITUS *Agricola, übersetzt und erläutert von* H. W. F. KLEIN, München 1825. S. 124 ff.

[5] EBERT, *Tertullians Verhältnis zu Minucius Felix*, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch., Phil.-hist. Klasse, N. V, 1868. S. 319 ff.

[6] KÜHN, *Der Octavius des Minucius Felix eine heidnisch-philosophische Auffassung vom Christentum*, Leipzig 1882. S. 15 ff.

[7] LÜBKERT, *Octavius oder Schutzschrift für das Christentum, ein Dialog des* M. MINUCIUS FELIX, *neu herausgegeben, erklärt und übersetzt*, Leipzig 1836. S. 101.

[8] TRAUTSCHOLD, *Über säkuläre Hebungen und Senkungen der Erdoberfläche*, Bull. de la société impér. des naturalistes de Moscou, 1869. S. 68 ff.

[9] *Octavius, ein Dialog des* M. MINUCIUS FELIX *übersetzt von* DOMBART. 1. Abteilung, Erlangen 1875. S. 26.

[10] *Octavius de* MINUCIUS FELIX, ed. LÉONARD, Namur 1883. S. 88.

[11] ZOECKLER, *Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft*, 1. Abteilung, Gütersloh 1877. S. 85.

[12] TACITUS-KLEIN, S. 49.

Bodens und des Himmels.» Hierin liegt sehr viel Wahrheit. Fruchtgattungen, welche, wie die Rebe, zu ihrem Gedeihen eine zwar kurze aber jähe Hitze brauchen, sind unmittelbar auf das Kontinentalklima angewiesen, und es waren deshalb mancherlei Versuche, den Weinbau in England heimisch zu machen, vollständig fruchtlos. Dagegen vermögen ebendort exotische Gewächse im freien zu überwintern, die unter gleicher Breite jedoch in einem abwechslungsreicheren Klima, rettungslos erfrieren müssten.

Zum Verständnis des Wortes Algorismus.

Von K. HUNRATH in Rendsburg.

Es wird REINAUD mit Recht als hohes Verdienst angerechnet,[1] dass er *Algorismus* als den Namen, oder richtiger Beinamen, eines Mannes, des Autors, erkannt hat. Diese Entdeckung ist bekanntlich später durch die Auffindung des Cambridger Codex (ed. BONCOMPAGNI, Rom 1857) bestätigt worden. Hier der Nachweis, dass die wahre Bedeutung des Wortes länger bekannt geblieben ist, als man gewöhnlich annimmt.[2] Er findet sich in dem *Opusculum de praxi numerorum, quod Algorismum uocant,* das in dem Sammelwerk: *Epitome | compendiosaque introductio in libros Arithmeticos diui Severini Boetij: adiecto familiari commentario dilucidata.*[3] *Praxis numerandi certis quibusdam regulis constricta, etc.* (Paris 1503, bezw. 1510, fol.) enthalten ist.[4]

Fo. XXXIII dieses Werkes trägt die Überschrift: JUDOCI CLICHTOUEI Neoportuensis *de praxi numerandi compendium.* Nun ist auf Fo. XLV—XLVIII dieser Schrift angehängt das Schriftchen: *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum uocant,* dessen einleitende Worte lauten:

> Omnia que a primeua rerum origine processerunt: ratione numerorum formata sunt | et quemadmodum sunt | sic cognosci habent.[5] Vnde in vniuersa rerum cognitione ars numerandi est operatiua. *Hanc igitur scientiam numerandi compendiosam philosophus edidit nomine Algorismus, vnde et Algorismus nuncupat | vel ars numerandi | vel ars introductoria in numerum.*

[1] Vergl. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* I (Leipzig 1880), S. 612, Anm. 4.

[2] Vergl. CANTOR, a. a. O. im Text.

[3] Diese Schrift ist bekanntlich von FABER STAPULENSIS verfasst.

[4] Siehe über dieses Werk: KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch,* I:1 (Leipzig 1803), S. 69; MURHARD, *Literatur der mathematischen Wissensch.,* I (Leipzig 1797), S. 140; GRÄSSE, *Trésor des livres rares,* I (Dresden 1859), S. 464.

[5] »habent» in der Bedeutung »debent»; s. DUCANGE, *Gloss. med. et inf. Latinitatis,* im Artikel »habeo».

Die Söhne des Musa ben Schakir.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

II. Andere Schriften.

Für die Zeit der Abfassung der Schriften ist zu beachten, dass der älteste der Brüder, MUHAMMED, nach *Fihrist*, hervorragend in Geometrie, Mechanik, Musik und Astronomie, im Monat Rabi I, 275 (begann am 14 Juli 888) starb.

Das Verzeichniss der Schriften giebt AL-KIFTI nicht im Artikel »Banu MUSA«, sondern unter MUSA, mit einigen, meist schlechteren Varianten, wie sich zeigen wird. Ich lege meiner Übersetzung der Titel den Text des *Fihrist* zu Grunde, und vergleiche AL-KIFTI, beabsichtige aber nicht alle Übersetzungsfehler CASIRI's (I, 418) und HAMMER's (*Literaturgesch.* IV, 310), beizufügen und zu berichtigen.

1. *Über Karastun* — das heisst Handwage; das Wort stammt vielleicht von χαριστίων; — »Faristun« ist eine ungewöhnliche persische Variante; FLÜGEL's Note (II, 127) ist nicht ganz ehrlich; s. meine *Hebr. Bibliogr.* XXI, 39.

WOEPCKE hat eine Abhandlung über die Waage (fi'l Mizân) aus ms. arab. Paris 952 im Journal Asiat. übersetzt, welche anfangs übereinstimmt mit dem lateinisch gedruckten: »*de Ponderibus*«, dem NEMORARIUS beigelegt, in mss. dem EUCLID; CURTZE und HEIBERG halten es eher für eine Schrift der Söhne MUSA's und die Schrift THABIT's über Karastun für eine Erweiterung jenes Schriftschens.

2. *Buch der Mechanik* ('Hijel) von AHMED. Die Existenz derselben habe ich (Zeitschr. für Mathem., Bd. 10, 1865, S. 486) in Cod. Vatican 317 nachgewiesen. Eine andere alte Handschr. hat die K. Bibliothek in Berlin 1884 erworben (ms. Or. 739 Qu.); sie ist sehr deutlich und mit den Zeichnungen der Maschinen versehen. SADID U'D-DIN IBN RAKIKA, ein Arzt (gest. 1237), studirte das Buch und bewirkte (oder verfertigte) dadurch ingeniöse Dinge.[1]

3. *Über die Figur des »länglichen Runden»* von HASAN. CASIRI (und HAMMER) geben dafür Cylinder, was vielleicht richtig ist; allein in dem Buch des ARCHIMEDES über Sphäre und Cylinder heisst letzterer »Istiwana«.[2]

4. *Über die Bewegung der ersten* (*obersten*) *Sphäre* (Felek),

in einem Tractat, von MUHAMMED. AL-KIFTI liest »der ersten Sphären».

5. Buch *über Kegelschnitte* von MUHAMMED.

6. Buch *drei* (?) von MUHAMMED. Dieser Titel, auch in Handschriften AL-KIFTI's vorkommend, ist sehr zweifelhaft (s. *Lesarten*, S. 24). Dafür steht in einigen Handschriften AL-KIFTI's der Namen APOLLONIUS (eigentlich »Balinus»), daher CASIRI und HAMMER aus nn. 5 u. 6 einen *Commentar* zu den Kegelschnitten des APOLLONIUS machen; allein *Fihrist* bezeichnet sonst gewöhnlich Commentare als solche. Indess lässt sich nachweisen, dass die Brüder (wie ich fortan die Söhne MUSA's kurz nennen werde), sich mit den Kegelschnitten des APOLLONIUS beschäftigten, wenigstens einige Bücher dieses Werkes redigirten oder emendirten, und irgend eine Einleitung dazu schrieben.

Unter APOLLONIUS berichtet *Fihrist* (S. 266), was die Brüder »am Anfang des Buches der Kegelschnitte» überlieferten über die Ursachen, wodurch dieses Buch bis zu EUTOCIUS nicht wohl erhalten worden. *Fihrist* (als »Aben Nadim» bei MERSENNIUS angeführt) giebt ferner an, das HILAL BEN ABI HILAL AL-HIMSI (aus Emessa) B. I—IV der Kegelschn. unter den Auspicien [3] des AHMED BEN MUSA übersetzte. Durch einige, in D'HERBELOT's *Bibl. orient.* übergegangene, Irrthümer in HAGI KHALFA's Artikel über die Kegelschnitte (V, 148, die Quelle ist *Taschköprizade*) [4] sind die »Banu MUSA» zu »abu MUSA» geworden, wozu FLÜGEL in Parenthese »Schakir» setzt — aber im Index ist dieser fingirte Autor nicht zu finden; durch Weglassung einiger Wörter sind dann Maecen und Übersetzer zusammengeschmolzen zu einem AHMED BEN MUSA AL-HIMSI (vergl. PUSEY zu NICOLL's *Catal.* p. 601). THABIT's Übersetzung von Buch V—VII erwähnt *Fihrist* ohne die Brüder zu nennen. ABU'L HOSEIN ABDU'L-MALEK AL-SCHIRAZI [5] verfasste ein Compendium der Kegelschn., welches RAVIUS in wenigen Tagen, allerdings schlecht genug, übersetzte; eine Stelle der Vorrede, welche PUSEY (l. c., p. 601) nur arabisch mittheilt, lautet bei RAVIUS, wie folgt:

»Hinc etiam incidit in nostras manus exemplare aliquod (versum in Arabicum) Autore filio (!) MOSIS illo Astronomo de quo sibi imaginati sunt plerique (!) quasi ABUL-HASSAN TEBIT (Tobias)(!) seu filius QORRAH adjuvasset illum in emendando eum.»

PUSEY giebt den Inhalt kurz: »Beni MUSA jactasse, THABIT ... se ad eos corrigendos impulisse ...» Der Sinn hängt hier von einem zweifelhaften Worte (aadjazahum) ab, scheint

aber folgender: In einem Exemplar der Kegelschn., welches angeblich die Emendation (Redaction) der Banu MUSA enthielt, fand sich die Angabe, dass sie den THABIT für unfähig erklärten, dieses Werk zu emendiren, wogegen SCHIRAZI meint, ein Gelehrter, wie THABIT, sei wohl dazu befähigt. — HAGI-KHALFA (V, 148) sagt ausdrücklich, dass HASAN und AHMED die Kegelschnitte emendirten, und einige mss. von B. V—VII geben sich für Revisionen der Brüder aus.

Ich glaube eine weitere Spur der oben erwähnten Einleitung entdeckt zu haben. Im Verzeichniss der Schriften des IBN HEITHAM[6] findet sich folgender Titel: »Abhandlung über die Figur (Theorem, *Schakl*) der Bani MUSA». Diese Abhandlung findet sich in den Mss. British Museum 975[2], und India Office 734[3], und heisst es dort, dass es die letzte Proposition sei, welche die Bani MUSA vor die Demonstrationen des Buches der Kegelschnitte gesetzt haben; den Inhalt geben die Cataloge nicht an; ich habe das letztere Ms. flüchtig angesehen und das Thema nicht vollständig entziffern können, glaube aber, dass es sich um das Verhältniss der Seiten von Dreiecken handle, welche zwei gleiche Winkel haben, von denen Linien nach den Sehnen gezogen werden. Die Figur ist folgende:



Vielleicht ist das Ms. des British Museum deutlicher und bietet Genaueres.

7. »*Buch der geometrischen Figur*, deren Sache (Beschaffenheit) GALENUS erklärt hat». An »Galen» hat schon CASIRI Anstoss genommen; aber seine vorgeschlagene Lesart HERON (bei den Arabern meistens: *Iran*) bietet keine Buchstabenähnlichkeit, und die Form des Titels setzt ein bekanntes Verhältniss zwischen Figur und Autor voraus. Ich habe schon in der Zeitschr. für Mathem. (Bd. 10, 1865, S. 495) MENELAUS (arab. Milaus) vorgeschlagen, so dass es sich um die *figura sector* (arab. *Schakl al-Kattâ*, auch latein. *figura cata*) handelt, welche schon frühzeitig als »Menelaus» bekannt war. Diese Figur wird in arabischen Quellen bald aus MENELAUS *Sphaer*. II, 5, bald aus III citirt, wahrscheinlich je nach verschiedenen Recensionen. Arabische Autoren vom IX. bis zum XIII. Jahrhundert haben darüber Monographien verfasst;[1] wir besitzen solche von THABIT, arabisch, auch in hebräischer und in lateinischer Übersetzung

des GERARD VON CREMONA [8] — vielleicht stammt daraus das »Lemma in 18 modis» von THABIT (p. 224 der lat. Ed. 1664)? — von NASAWI (um 900—930?) mit einer interessanten Vorrede (mitgetheilt in *Catal. mss. or. Lugd. Bat.*, III, 90), von SIDJZI (998), von DJABIR (»*Geber*») IBN AFLAH (XI. Jahrh.), in hebräischer Übersetzung von TUSI (um 1265); sie sind theilweise an die »mittleren Bücher» angehängt. IBN ABI SCHUKR [9] spricht von einer Figur genannt »*mugni*» (genügend), durch welche die Figur Kattâ entbehrlich wird, die im *Almagest* vorkommt.[10]

8. *Buch des Theils* (Atoms?) von MUHAMMED. Die Lesart des *Fihrist* ist schwankend; AL-KIFTI setzt dafür »B. des Schleppens», HAMMER fügt hinzu »der Gewichte» (*el-eskal*) und übersetzt »Mechanik» (oben n. 2 hat er »Wunderkünste»). Man kann sich hier nicht für zufriedengestellt erklären; CASIRI giebt »*de virtute attrahendi*»; aber für die Attractionskraft wäre ein anderer Text nöthig (ein Wort vom Stamm *djadsab*). Wenn man sich eine freie Emendation erlauben dürfte, so läge am nächsten *Djîzu*, der gewöhnliche Ausdruck für Radix.

9. Buch, worin nach mathematischer Methode und auf geometrischem Wege bewiesen wird, dass es *ausserhalb des Globus* (der Sphäre) *der Fixsterne nicht einen neunten gebe*, von AHMED. Die Existenz einer neunten (oder auch zehnten) Sphäre war ein Controverspunkt; die 8te Sphäre ist die der Fixsterne. Später wird die 9te als Tagessphäre allgemein angenommen. — AL-KIFTI setzt diesen Titel, verkürzt, hinter n. 10, CASIRI liest falsch, ergänzt unrichtig und bringt heraus: »quod novem orbium sphera describi perfecte [11] non possit». HAMMER liest »wadhi» und übersetzt »Beschreibung (!) der Stellung der Kugel der 9 Himmel».

10. *Über die Priorität der Welt*, von MUHAMMED. »Awwalijje» dürfte (wie *Kidam*) die Anfangslosigkeit bedeuten, oder heisst es »Anfang»? AL-KIFTI (n. 9) las »über den Anfang der Ursachen», was unrichtig scheint.

11. Buch *des Sendschreibens* (über Probleme) welches an SIND BEN ALI [12] richtete AHMED BEN MUSA.

12. *Buch über das Centiloquium*, in einem einzigen Tractat, von MUHAMMED. Offenbar ist hier das Centiloquium des PTOLEMAEUS gemeint, also die Bemerkung FLÜGEL's, in den *Lesarten*, S. 24, unzutreffend.

13. *Andere Sendschreiben* zwischen SIND (s. n. 11) und AHMED.

N. 12 und 13 sind wahrscheinlich Nachträge, welche in AL-KIFTI's Vorlage nicht vorhanden waren, daher bei ihm fehlen.

[1] OSEIBIA (Useibia), *Gesch. der Ärzte*, II, 219; LECLERC, *Hist. de la médecine arabe*, II, 174 (er liest Rafika für Rakika) erwähnt nichts davon. Den Titel (*Hijal*) erwähnt HAGI KHALFA unter den Schriften über pneumatische Instrumente (Maschinen) I, 401 n. 1126, aber nicht unter denen über Kriegsmaschinen I, 394 n. 1121, wo doch wohl dasselbe Werk gemeint ist.

[2] Vergl. auch KLAMROTH's Terminologie in Zeitschr. der Deutsch. Morgenl. Ges., Bd. 35, 1881, S. 300.

[3] So fasst LECLERC, l. c. I, 181, 224 den Text richtig auf, gegen CASIRI (auch WENRICH und HANKEL, ital. Übersetz. Sonderabdr., p. 12), nach welchem AHMED die Übersetzung revidirt hätte; das meint wenigstens der Text nicht. AHMED fehlt im Index bei WENRICH.

[4] Im ms. der Bodl. von H. KH. liest man »abu Musa al-Hafits«; s. Zeitschr. für Mathem., B. 10, 1865, S. 486. WENRICH, p. 199, erkennt, wie sonst oft, nur die halbe Wahrheit.

[5] In der latein. Übersetzung von RAVIUS (1646, edirt 1669), heisst es auf dem Titel: »ante *quad*ringenta annos; in der Widmung »ante 500 fere annos«, in der Epistel an REYHER: »Anno *sexcentesimo Hegirae* descripto«. Die arabische Handschr. ist H. 575 (1276/7) geschrieben, also nur der terminus ad quem für die Zeit des Verfassers sicher.

[6] OSEIBIA, l. c. II, 98; bei WOEPCKE, *L'algèbre d'Omar*, p. 75 n. 73.

[7] Zeitschr. für Mathem. Bd. 10, 1865, S. 494 ff.

[8] Zeitschr. für Mathem., Bd. 18, 1873, S. 337; Bd. 19, 1874, S. 96; LECLERC, l. c. II, 410; WÜSTENFELD, *Die lat. Übersetz.* S. 60.

[9] *Catal. Codd. or. Lugd. Bat.* V, 243; vergl. meine Schrift *Vite di matematici arabi* etc., p. 90.

[10] Den *Almagest* nennt dafür auch ein anonymer Commentar zu demselben, bei HAGI KHALFA, V, 388.

[11] Das ginge auch nicht, wenn *tm* richtig wäre, es ist aber *thm* zu lesen (gute Handschriften geben den Buchstaben deutlich), also das Wort welches »dort« aber auch wie im Deutschen *da*, französ. »il *y* a«, die Existenz überhaupt bezeichnet.

[12] Über diesen berühmten Astronomen s. Zeitschr. der Deutsch. Morgenl. Gesellsch., Bd. 24, 1870, S. 362, Bd. 25, 1871, S. 404, Anm. 11.

The first determination of the length of a curve.

By S. A. CHRISTENSEN in Kjöbenhavn.

The first attempt in this direction was made by ARCHIMEDES in determining the value of π. This was followed by many others which we shall not dwell upon. NEIL was the first who succeeded in rectifying a curve, the semi-cubic parabola.

Meantime another mathematician found at about the same time the very same thing, and therefore some discourse arose as to which of them was to be prefered. We will now make this question the object of our research.

In the year 1659, a letter from HEURAËT concerning the rectification of the curves was published by SCHOOTEN and a little later in the same year in another letter from WALLIS to HUYGENS appeared the discovery of NEIL, which he had made already in 1657.

Now we will first regard the proceeding of HEURAËT such as it is found in the said letter to SCHOOTEN, which is published in the edition of CARTESII *Geometria* by SCHOOTEN, 1659.

HEURAËT begins with the curve which he wants to rectify, and of which he does not give the equation; it is a curve wholly arbitrary which ought to be symmetrical in respect to an axe. Then he shows that he is able to find a curve such that the area between this, the axe and the terminating ordinates is equal to the product of a certain line (the length of which determines the parameter of the found curve) with the length of the proposed curve.

If now the found curve is a curve of which the quadrature is to be determined, then the rectification of the proposed curve is also determined, and in return, if the quadrature of the found curve is impracticable, then we cannot find the length of the proposed curve. By that he shows plainly the dependence of these two problems.

HEURAËT has to prove the theorem, that the given line (p) multiplied with the differential of the arc (ds) is equal to the differential of the area for the searched curve (Ydx) putting the relation $y:v = p:Y$, where v is the normal of the regarded point of the proposed curve, y its ordinate and Y the ordinate to the point of the searched curve.

In drawing a figure we will get $y:v = dx:ds$ by assistance

of the infinitely small triangle with the sides dx, dy, ds and thereof with the given proportion $dx:ds = p:Y$ of which we get $Ydx = pds$; this is what has been sought: that the differentials of the two areas are equal and then the sum is the same between very same limits.

This is the proceeding of HEURAËT only deviating in the modern notations.

Being able to use this theorem we may from the equation of the proposed curve find the equation to the searched curve.

Now we shall see how HEURAËT uses the theorem on the semi-cubic parabola $y^2 = x^3 : a$. He first finds the length of the normal v by assistance of the right-angled triangles formed by tangent, normal and the co-ordinates. Then he gets

$$v = \sqrt{\frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}}.$$

Putting $p = \frac{1}{3}a$ in the proportion $y : v = p : Y$ we have

$$Y = \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}a^2}$$

that is: a parabola having its summits co-ordinates $\frac{-4}{9}a$, o and the parameter $\frac{1}{4}a$. Then the area from the ordinate in the origin of co-ordinates $\left(= \frac{1}{3}a = p\right)$ untill the ordinate in the distance m from the summit is equal to $\frac{1}{3}\sqrt{am^3} - \frac{8}{81}a^2$, and the length of the semi-cubic parabola measured from its summit is $\sqrt{m^3 : a} - \frac{8}{27}a$.

In the same way we may for the equations

$$y^4 = x^5 : a, \qquad y^6 = x^7 : a, \qquad y^8 = x^9 : a, \text{ a. s. o.}$$

reach such curves of which we can find the quadrature, and therefore we are able to rectify the curves represented by these equations. Meantime he does not perform this labour nor it is necessary; he has shown the proceeding.

Before concluding he shows that it is impossible to rectify the parabola for it leads to the quadrature of the hyperbola; these two problems also depend on each other.

After what had just been said, we do not find any cause
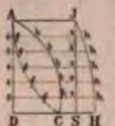
for examining this his proof, we will only notice that he gives this equation $y = x^2 : a$ to the parabola.

HEURAËT has thus found a general theorem, on which he can found the rectification of curves and thereby the dependence between the rectification of curves and the quadrature of others on these determined curves. He is also the first who has shown this dependence between the parabola and the hyperbola. Even if HUYGENS has found out this last mentioned dependence since the end of the year 1657 as he assures in *Horologium oscillatorium* (1673), p. 72, we cannot attribute to him the honour thereof notwithstanding his having communicated it to some of his friends. He has only had it isolated, but HEURAËT has it as a part of a whole.

Now we shall see the proceeding of NEIL which we find in WALLIS 1659 in the last of the treatises: *Tractatus duo, prior ... Posterior Epistolaris; in quo agitur de cissoide et corporibus inde genitis ... Anno 1659 Editi* (Opera math. Tom. I, pg. 550—554). It is a treatise in the form of a letter to HUYGENS in which he has imparted the proceeding of NEIL, HUYGENS having mentioned the treatise of HEURAËT in a letter to him.

In the proceeding of NEIL we want the generality which distinguishes that of HEURAËT. He begins with the parabola AbC and forms hereby the curve AfC, which is the semi-cubic parabola, and so he first shows $ADHI : ADSI = AfC : AD$, and at last that the curve HI is a parabola.

Fig. 1.



AD is the axe, which is parted in an arbitrary number of equal parts, ee. We name $AD = a$ and $DC = c$.

The curve AfC is formed by the proportion $ef : c = Aeb : ADC$, that is: if the equation to the proposed parabola is $y^2 = px$ and $ef = z$, we get $z^2 = px^3 : a$, which is the equation to the semi-cubic parabola. When we here and in the following always use the analytical equations, it is not quite exact, for NEIL expresses the whole in words; but there will be no difference in reality because we follow him in the details of his proceeding. We already here see the difference between NEIL and HEURAËT, for this begins with AfC as being an arbitrary curve, while NEIL only takes the special curve.

He introduces the rectangle DI such, that

$$\square DI : ADC = AD : DC,$$

that is: $DS = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} a$ and makes the ordinates eh after the equation $eh^2 = es^2 + eb^2$ (this gives the curve, which HEURAËT finds). Thereon he proves, that $ADHI : ADSI = AfC : AD$, the proof of course is to be referred to the differentials of the area and of the arc.

When we have

$$ef : Aeb = c : ADC$$

we get

$$(ef - ef) : \square eb = c : ADC = 1 : \frac{2}{3} a = 1 : es$$

and thereof.

$$(ef - ef)^2 = (ee \,.\, eb : es)^2$$

and the differential of the arc is then

$$ff^2 = \frac{ee^2}{es^2}(es^2 + eb^2) = \frac{ee^2}{es^2} \,.\, eh^2$$

and so we get

$$\frac{ff}{a} = \frac{ee}{es} \cdot \frac{eh}{a} = \frac{\square eh}{\square DI},$$

what was to be proved.

We arrive at the form, which HEURAËT has given to the theorem, from the equation $ff = ee \,.\, eh : es$, of which we get $ff \,.\, es = ee \,.\, eh$, here is $es = AI$ the constant line, the very same, which HEURAËT uses, but more generally than NEIL.

Still NEIL has to prove, that the arc IH is of a parabola. If we regard $eh^2 = es^2 + eb^2$, we get

$$Y^2 = \frac{4}{9} a^2 + px$$

which is the equation to a parabola of which we know the quadrature.

NEIL thus reduces, just as HEURAËT, the problem to the quadrature, but only by a single example. Therefore HEURAËT is to be rewarded with the greatest part of the honour for this discovery, though he has only reached it later than NEIL, for HEURAËT has scarcely found it before the year 1658, while NEIL according to WALLIS (in a letter to OLDENBURG 1673 octbr. 4, published in the Philosophical Transactions 1673) in the year 1657 had mentioned his discovery to him and others of his friends in Gresham College. In the same letter WALLIS cites BROUNCKER, who thinks, that HEURAËT has purloined

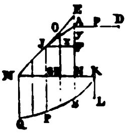
NEIL's proceeding, though we must remember, that the treatise of NEIL was published later than that of HEURAËT.

Yet we must notice, that HEURAËT could have information of NEIL's solution of the question; but it seems that the results of his labour may protect him against the accusation of plagiarism. They show that he understood better than NEIL the extent of his theory.

Now we only shall notice that CHRISTOPH. WREN after being informed of NEIL's proceeding has changed his proof inducing the analytical notations in the year 1658, and in the same year he found the length of the cycloid; which is published in the first of the named treatises by WALLIS.

At last we have to mention a third method, which was found by FERMAT (*De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione,* 1660; Opera, 1679). FERMAT first shows, that he is able to find both a greater and a smaller limit of the length of every curve. He parts the axe in several parts, erects the ordinates and draws the tangents, then the parts of these form the limits. Then he proceeds to find the length of the semicubic parabola MIA, to which we get the equation $y^2 = x^3 : p$, where $p = AD$. When we draw the tangent IE, we have $FE = {}^2/_3 y$, and thereof

Fig. 2.



$$\frac{FE^2}{x^2} = \frac{x}{\frac{4}{9}p}, \qquad \frac{IE^2}{x^2} = \frac{x + \frac{4}{9}p}{\frac{4}{9}p}$$

and putting $NK = {}^4/_9 AD$ we finally have $\frac{IO^2}{GH^2} = \frac{GK}{NK}$. Then drawing the parabola $KSPQ$ with the parameter $LK = NK$, we get $\frac{GK}{KL} = \frac{GP^2}{KL^2}$ and hereof $\frac{IO}{GH} = \frac{GP}{KL}$, thus $IO.KL = GH.GP$. These calculations are to be repeated for the whole series of tangents which are drawn from the ends of the ordinates. Then FERMAT gets finally $MIA.KL = MQSN$. Now he shows, that these two areas are exactly equal, by exhaustion in the same manner which ARCHIMEDES uses.

Études sur Diophante.

Par Paul Tannery à Tonneins.

II. L'analyse indéterminée algébrique.

Les 137 problèmes d'analyse indéterminée, auxquels se réduit, comme je l'ai dit, le recueil de Diophante, se divisent en deux classes bien tranchées. Mais, pour expliquer cette distinction, il faut d'abord donner une idée juste du but véritable de l'analyse indéterminée des anciens.

Prenons, comme exemple, le premier problème, II, 8:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{1}$$

où il s'agit en fait de la constitution du *triangle rectangle* en nombres, question déjà soulevée par Pythagore.

La solution de cette question fondamentale, sous la forme qu'elle présente dans tout le livre VI, spécialement consacré à des problèmes sur les triangles rectangles en nombres, est la suivante:

Soient p, q, deux nombres entiers quelconques, qu'on peut supposer premiers entre eux, m un nombre entier ou fractionnaire tel que

$$a = m(p^2 + q^2),$$

on pourra poser

$$x = m(p^2 - q^2), \qquad y = m\,.\,2pq.$$

Dès lors, si l'équation (1) est donnée avec une autre équation en x, y, on possède un moyen immédiat d'élimination, par un changement d'inconnues. Si on prend, par exemple, pour inconnue $z = \frac{p}{q}$, on pourra substituer dans la seconde équation

$$x = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\,a, \qquad y = \frac{2z}{z^2 + 1}\,a.$$

Des éliminations de ce genre forment le fond de toute l'analyse du livre VI et l'on ne peut nier leur élégance incontestable, qu'elles conservent, même en face des procédés modernes.

Manquant de symboles pour le calcul des radicaux, les

Livres	Analyse Algébrique	Analyse Numérique	Total
II	26	0	26
III	14	7	21
IV	18	14	32
V	2	30	32
VI	7	19	26
Ensemble	67	70	137.

On voit que le nombre est à peu près le même dans chacune des deux classes, mais qu'au début, l'analyse algébrique domine exclusivement.

Je vais, pour le moment, donner un aperçu général des procédés de cette analyse algébrique.

En dehors d'une méthode spéciale, sur laquelle je reviendrai plus loin, celle de la *double équation*, les artifices d'élimination de DIOPHANTE se réduisent toujours à des changements d'inconnues et à des substitutions.

Soit en général une équation:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

où la fonction F est algébrique, rationnelle et entière.

A. Si on connaît un système de valeurs des inconnues qui satisfassent à cette équation

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n,$$

et que l'on substitue

$$x_1 = a_1 + y, \quad x_2 = a_2 + z_1 y, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + z_{n-1} y,$$

le terme indépendant de y sera identiquement nul; en divisant le premier membre de l'équation par y, on abaissera donc son degré d'une unité. Si donc la fonction F est du second degré ou peut s'y ramener, on tirera y rationnel et par conséquent aussi les n inconnues x, en fonction des $n - 1$ inconnues auxiliaires z.

B. Si au contraire, on connaît un système de valeurs des inconnues qui annule seulement l'ensemble des termes du degré supérieur, système qui dès lors peut se représenter comme suit:

$$x_1 = a_1 y, \quad x_2 = a_2 y, \quad \ldots, \quad x_n = a_n y,$$

en substituant

$$x_1 = a_1 y, \quad x_2 = a_2 y + z_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n y + z_{n-1},$$

les termes du degré le plus élevé en y s'évanouiront. Si donc la fonction F est du second degré ou peut s'y ramener, on tirera rationnellement y et par suite les n inconnues x en fonction des $n - 1$ inconnues auxiliaires z.

Tels sont les deux principes fondamentaux qui président à tour de rôle et sous les transformations les plus diverses aux substitutions opérées par DIOPHANTE et qui sont applicables aussi bien à l'élimination pour la réduction à une seule équation des diverses conditions du problème qu'à la solution de cette équation finale.

Montrons-en l'application à la solution de l'équation indéterminée du second degré à deux inconnues. Par des transformations rationnelles faciles, on peut toujours la ramener à la forme

$$ax^2 + b = y^2 \tag{2}$$

où a et b peuvent d'ailleurs être positifs ou négatifs.

A. On a une solution immédiate de l'équation, avec une valeur nulle de l'une des inconnues, dans deux cas:

1°. Si b est positif et carré, soit $b = m^2$. On posera simplement

$$y = m + zx \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2mz}{a - z^2}.$$

2°. Si a et b sont de signe contraire et que leur rapport soit carré. Soit $b = - am^2$. On posera

$$x = m + z, \qquad y = uz$$

et l'on aura

$$z = \frac{2am}{u^2 - a}.$$

B. On a immédiatement un système de valeurs faisant évanouir les termes du second degré, si a est positif et carré, soit $a = m^2$.

En substituant

$$y = mx + z$$

on aura

$$x = \frac{2mz}{b - z^2}.$$

Il est clair que la même substitution conduirait également à la solution, même si l'équation (2) contenait en outre des termes en x ou en y.

Dans ses premiers livres, DIOPHANTE n'applique en fait,

pour l'équation du second degré à deux inconnues, que les solutions qui viennent d'être indiquées. Cependant dans le livre VI, il donne et emploie deux lemmes relatifs au cas général où $x = p$, $y = q$, sont deux solutions connues de l'équation (2), où, par suite, on peut la résoudre en posant

$$x = p + z, \qquad y = q + uz, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{2(ap - qu)}{u^2 - a}.$$

Le second de ces lemmes (VI, 16) est général, dans le cas où b est négatif; le premier (avant VI, 13) est particulier au cas où $p = 1$. Mais il est clair que si Diophante ne l'a pas établi plus généralement, c'est uniquement parce qu'il n'en avait pas besoin pour les problèmes posés.

Quant à la recherche des conditions relatives à la possibilité ou à l'impossibilité de l'équation (2), elles n'appartiennent déjà plus à l'analyse algébrique. On n'en trouve au reste quelques indices que pour le cas où $a = -1$, et alors, en pratique, Diophante suppose que b est la somme de deux carrés connus; on a donc une solution immédiate.

C. Quant à la méthode de la *double équation*, elle s'applique en général au cas où le problème est ramené à égaler à deux carrés indéterminés deux fonctions entières du second degré d'une même inconnue. Mais, dans ce cas général, c'est un procédé d'analyse numérique.

Considérons le cas où les deux fonctions sont linéaires:

$$(3) \qquad ax + b = u^2, \qquad a'x + b' = v^2.$$

Dans les problèmes du second livre (12, 14), on a d'ailleurs $a = a'$. Il est clair qu'on ramènerait immédiatement à ce cas celui où l'on aurait $\frac{a}{a'} = k^2$; il suffirait de multiplier les deux membres de la seconde équation par k^2 et de supposer $kv = v_1$.

Dans le cas traité par Diophante, on a par soustraction

$$b - b' = u^2 - v^2.$$

Il décompose arbitrairement $b - b'$ en deux facteurs p et q, et pose

$$u + v = p, \qquad u - v = q \quad \text{avec} \quad pq = b - b',$$

d'où

$$u = \frac{p + q}{2}, \qquad v = \frac{p - q}{2} \quad \text{et enfin} \quad x = \frac{p^2 + q^2}{4a} - \frac{b + b'}{2a}.$$

Il est évident que cette solution serait immédiatement fournie

par l'élimination directe; le procédé de la double équation, a son intérêt pour l'analyse numérique, n'a pas d'importa sérieuse pour l'analyse algébrique.

Si l'on élimine x entre les deux équations (3), on a

$$(4) \qquad \frac{a}{a'}v^2 + \frac{ba' - ab'}{a'} = u^2.$$

Il en résulte immédiatement que la double équation s soluble, si $\frac{ba' - ab'}{a'}$ ou $\frac{ab' - ba'}{a}$ est un carré, ainsi (BACHET l'a remarqué, sans compter le cas où $\frac{a}{a'}$ est carré que nous avons déjà signalé.

BACHET a encore indiqué le cas où

$$\frac{ab' - ba'}{a - a'} = m^2,$$

qui correspond dans l'équation (4), mise sous la forme

$$Av^2 + B = u^2,$$

à l'hypothèse

$$\frac{B}{1 - A} = m^2.$$

Car alors on a la solution immédiate $u = v = m$.

On ramène à ce cas celui où l'on a $b = b' = c^2$, (alors $m = c$) et dès lors celui où le rapport $\frac{b}{b'}$ est carré. P cette forme de la double équation, également signalée BACHET, DIOPHANTE paraît ignorer la solution générale.

Les problèmes de DIOPHANTE où le nombre des inconr dépasse d'une unité celui des équations et qui appartiennen l'analyse algébrique sont au nombre de 21, y compris le len VI, 16 dont nous avons parlé.

Nous trouvons d'abord:

II (8 et 9) $\qquad x^2 + y^2 = a^2,$

équation à laquelle se ramène facilement IV (33 et 34) à d équations entre trois inconnues.

II, 10. $\qquad x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$

Les problèmes V, 12, 13 (à trois équations entre trois inc nues) se ramènent en fait à décomposer en deux carrés nombre de la forme $a + b + 1$. En fait pour le problème

Diophante choisit tacitement les nombres donnés a et b de telle sorte que la somme $a + b + 1$ soit un carré. Pour le problème 12, où $b = a$, il indique que a doit être soumis à une condition; le texte est malheureusement corrompu, mais la condition imposée semble être que, d'une part a ne soit pas impair (car alors $2a + 1$ est de la forme $4n + 3$) et que de l'autre, $2a + 1$ ne soit pas divisible par un facteur premier de la forme $4n + 3$. En fait, Diophante choisit a de façon que $2a + 1$ soit un nombre premier simple de la forme $4n + 1$, à savoir 13, dont la composition en deux carrés se reconnaît immédiatement. Nous aurons au reste à revenir ultérieurement sur ces problèmes, parce que les carrés à former sont soumis à la condition d'être compris entre certaines limites, et que pour satisfaire à cette condition, Diophante a recours à un procédé particulier.

II, 11. $$x^2 - y^2 = a,$$

auquel se ramènent immédiatement les doubles équations II, 12, 13, 14.

II, 17, (trois équations entre quatre inconnues) se ramène à

$$kx^2 - y^2 = a^2(k - 1)$$

dont on a une solution immédiate, $x = y = a$.

Nous rencontrons plus loin une série de problèmes dans les équations non linéaires desquels ne figure pas de terme constant; elles s'abaissent donc immédiatement et on peut ainsi ramener au premier degré II, 27, 28 (à trois équations) IV, 3, 4, 5 (à deux équations) et au second degré une suite d'autres où figurent des termes du troisième degré, à savoir:

IV, 9 (2 éq.), 12, 13 (1 éq.) à la solution de l'équation

$$x^2 + x + 1 = y^2.$$

IV, 10 (2 éq.), 11 (1 éq.) à celle de

$$x^2 - x + 1 = y^2.$$

Les problèmes IV, 26 et V, 33 méritent une discussion particulière qui permettra de mieux apprécier le savoir faire de Diophante.

Le premier conduit aux deux équations:

$$(3) \qquad x + y + z = a, \qquad xyz = 8(x - z)^3$$

avec la condition $x > y > z$.

Qu'on pose

$$x - z = u \quad \text{et} \quad z = uv$$

on aura

$$x = u(v + 1) \quad \text{et} \quad y = \frac{8u}{v(v+1)}.$$

Dès lors l'équation (3) est linéaire en u et le problème est résolu en principe. Mais la condition imposée pour la valeur de y limite le choix de v de façon à satisfaire aux inégalités du troisième degré

$$v^3 + v^2 < 8 < v^3 + 2v^2 + v.$$

Les deux équations

$$(4) \qquad v^3 + v^2 - 8 = 0,$$

$$(5) \qquad v^3 + 2v^2 + v - 8 = 0$$

n'ont chacune qu'une racine réelle positive, d'ailleurs incommensurable. v peut varier entre ces deux racines, dont la supérieure est celle de (4).

DIOPHANTE, qui est toujours satisfait avec une solution unique, se borne à prendre pour v une valeur approximative par défaut de la racine de (4). La détermination approchée revient d'ailleurs pour

$$x^3 + ax^2 = b$$

à prendre

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{b}.$$

Le problème V, 33 conduit aux équations suivantes

$$x + y = z^2 - a = u^2, \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = z.$$

En fait, on tire immédiatement, supposant $n > m$

$$x = \frac{m}{n - m}(nz - z^2 + a), \qquad y = \frac{n}{n - m}(z^2 - a - mz)$$

et en posant $u = z - v$,

$$z = \frac{v^2 + a}{2v}.$$

Mais DIOPHANTE est astreint à la condition que x et y soient positifs; pour cela par la résolution d'inégalités du second degré il détermine les limites entre lesquelles peut varier z, puis d'après ces limites, celles entre lesquelles v peut être choisi. Aux valeurs numériques incommensurables, il substitue d'ailleurs des nombres commensurables.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

J. Giesing. LEBEN UND SCHRIFTEN LEONARDOS DA PISA. EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER ARITHMETIK DES 13. JAHRHUNDERTS. Döbeln 1886. 4°, 35 p.

Eine monographische Arbeit über den grössten Mathematiker des Mittelalters war sehr am Platze, da ja leider der zweite Band des CANTOR'schen Werkes, welcher von FIBONACCI seinen Ausgang nimmt, sobald noch nicht erscheinen zu wollen scheint. Der Verf. hat seinem Helden eingehende Studien gewidmet, und was er von dem Inhalte der unsterblichen Werke mitteilt, welche jener geschrieben, beweist, dass er eine gute Auslese zu treffen verstanden hat. Die verschiedenen Multiplikationsmethoden, die aufsteigenden Kettenbrüche, die recht eigentlich als eine Erfindung des Pisaners bezeichnet werden müssen, dessen eigenartige Behandlung des merkantilen Rechnens, die Auflösung der quadratischen Gleichungen finden sachgemässe Besprechung an ihrer Stelle; auch erinnern wir uns nicht, dass schon früher im Drucke auf die merkwürdige Lösung der verallgemeinerten pythagoreischen Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y^2$$

in rationalen Zahlen so hingewiesen worden wäre, wie es hier der Fall ist. Endlich wird auch auf LEONARDOS sonstige Verdienste um unbestimmte Analytik und Theorie der kubischen Gleichungen eingegangen; es erscheint danach wahrscheinlich, dass derselbe im Besitze einer approximativen Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax = b$ durch Teilbruchreihen (im Sinne von HEIS) gewesen ist. Hingegen ist davon keine Rede, dass in dem *liber abbaci* auch die erste Erwähnung einer der wichtigsten rekurrenten Reihen zu finden sei.

Von Einzelheiten mag erwähnt werden, dass (S. 4) GERBERTS Schüler nicht BERNELIUS sondern BERNELIN hiess, sowie dass die Annahme (S. 9), es möge vielleicht LEONARDO an der medizinischen Akademie zu Montpellier mathematischen Unterricht erteilt haben, für jene Zeit sehr unwahrscheinlich erscheint. Selbst in Paris und Bologna wurde Mathematik damals noch gar nicht gelehrt, wie viel weniger in dem zünftlerisch organisierten Montpellier! Dagegen ist es uns von Wert gewesen zu sehen, dass der Verf. auch jenem DOMINICUS seine Beachtung zu teil werden lässt, mit welchem LEONARDO in persönlicher

Beziehung stand, denn wir halten es für gar nicht unmöglich, dass dieser Mathematiker derselbe ist, den MENDTHAL und CURTZE unlängst als den Inspirator des ersten geometrischen Traktates in deutscher Sprache (*Geometria Culmensis*) uns kennen lehrten. Auch das ist zu billigen, dass Herr GIESING auf die Bekanntschaft des Italieners mit den Schriften »der drei arabischen Brüder» aufmerksam macht; die Ausgabe, welche CURTZE von deren *Geometria* besorgte, scheint dem Verf. bei Ausarbeitung seines Programmes noch nicht zugänglich gewesen zu sein.

München. S. GÜNTHER.

F. Müller. HISTORISCH-ETYMOLOGISCHE STUDIEN ÜBER MATHEMATISCHE TERMINOLOGIE. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums 1887. Berlin 1887. 4°, 32 p.

Après quelques réflexions générales sur les mathématiques et leurs termes, l'auteur de cette étude passe à des recherches historiques sur certaines parties de la terminologie mathématique. D'abord, il traite le nom même de la science et de ses branches, p. ex. arithmétique, géométrie, algèbre, depuis les temps les plus reculés; puis il s'occupe plus en détail à l'arithmétique et aux termes de cette science pour ce qui regarde les chiffres, les systèmes numéraux, les différentes opérations arithmétiques, les signes de ces opérations, l'*abacus*, le calcul sur les doigts, les fractions, les classes de nombres, etc. Enfin l'auteur donne des notices semblables relatives aux lignes courbes et en particulier aux sections coniques dans l'antiquité.

Parmi les observations que nous avons faites en lisant ce travail, nous nous permettons de signaler ici les suivantes. Page 12 l'auteur remarque: *Das Wort Million ... kommt wohl zuerst als abstraktes Zahlwort in Pacioli's Summa de Aritmetica, 1494, vor. Die Worte ... billion, trillion, ... finden sich in dem 1484 handschriftlich vollendeten Traktat des Nicolas Chuquet.* Par ces mots, celui qui ne connaît pas le traité de CHUQUET pourrait croire que le terme »million» ne s'y trouve pas. — Page 14 l'auteur suppose que la »mensa Pythagorea» indiquée par BOËTIUS signifie la table ordinaire de multiplication. Mais M. CANTOR (*Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, 1863, p. 204—205) a montré que cette hypothèse est peu vraisemblable et qu'il s'agit sans doute de

l'abacus. — Page 30 l'auteur dit: GALILEI *scheint zuerst die Cycloide betrachtet zu haben;* il aurait pu mentionner ici aussi BOUVELLES (voir GÜNTHER: *War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt?*, Biblioth. Mathem. 1887, p. 8—14).

La brochure de M. MÜLLER sera sans doute très utile aux auteurs de traités élémentaires, qui y trouveront réunies beaucoup de notices dont ils pourront se servir. Au début, l'auteur nous avertit que la brochure est extraite d'un plus grand travail qu'il a l'intention de publier plus tard; nous verrons avec plaisir ce travail paraître lorsque ses occupations lui auront de l'achever.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von — journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1887 : 2. — [Analyse des années 1884 et 1885 :] Fiziko-matemat. naouki **2** (1886), 1887, B : 179—186. (V. V. BOBYNIN). — [Analyse de l'année 1886 :] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **5**$_6$, 1887. 5 p. (A. FAVARO.)

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.

19 (1886) : 7—11. — [Analyse du tome 17 (1884):] Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887; Revue 132—137. — [Analyse du tome 18 (1885):] Biblioth. Mathem. 1887, 56—58. (G. ENESTRÖM.)

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

32 (1887) : 3—4.

Allman, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. VII.

| Hermathena **6**, 1887, 269—278.

Appell, P., Supplément [à la] Notice sur les travaux scientifiques de M. Appell. Paris, Gauthier-Villars 1886.

4°, 15 p. — La »Notice» a été publiée en 1884.

БОБЫНИНЪ, В. В., Философское, научное и педагогическое значенiе исторiи математики.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, A : 1—16, 97—121. — BOBYNIN, V. V., Sur l'importance de l'histoire des mathématiques au point de vue philosophique, scientifique et pédagogique.

БОБЫНИНЪ, В. В., М. А. Ковальскiй.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, B : 20—23. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur M. A. KOWALSKIJ.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторiи развитiя физико-математическихъ знанiй въ Россiи. I—IV.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, A: 17—32, 122—140, 217—239, 295—298, 327. **2**, 1886, A: 19—34, 114—145. — BOBYNIN, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. I. La litérature mathématique manuscrite du XVII^e siècle. II. Sources de la litérature mathématique manuscrite du XVII^e siècle. III. Traits caractéristiques et particularités du contenu des manuscrits arithmétiques du XVII^e siècle. IV. L'astronomie dans les manuscrits russes du XVII^e siècle.

БОБЫНИНЪ, В. В., Происхожденіе, развитіе и современное состояніе исторіи математики.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, A: 195—216, 299—326. — BOBYNIN, V. V., Origine, développement et état actuel de l'histoire des mathématiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Періоды, направленія и школы въ развитіи наукъ математическихъ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, A: 1—18. — BOBYNIN, V. V., Périodes, tendances et écoles dans le développement des sciences mathémathiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Забытое великое событіе.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, B: 65. — BOBYNIN, V. V., Sur l'invention du calcul infinitésimal.

БОБЫНИНЪ, В. В., А. СЕРРЕ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, B: 97—103. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur J. A. SERRET.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. I: I. Москва 1885.

8°, 102 p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue des livres et des notes de sciences mathématiques et physiques, publiés en Russie depuis l'invention de la typographie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskaia naouki» **1**, 1885.

БОБЫНИНЪ, В. В., А. Ю. ДАВИДОВЪ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, B: 12—22, 39—43, 64—69. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur A. J. DAVIDOFF.

БОБЫНИНЪ, В. В., Ж. К. БУКЕ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, B: 9—11. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur J. C. BOUQUET.

БОБЫНИНЪ, В. В., Ж. ЖАМЕНЪ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, B: 81—86. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur J. JAMIN.

БОБЫНИНЪ, В. В., БАРРЕ de СЭНЪ-ВЕНАНЪ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, B: 126—133. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur B. DE SAINT-VENANT.

БОБЫНИНЪ, В. В., Т. ОППОЛЬЦЕРЪ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **3**, 1887, B: 5—15. — BOBYNIN, V. V., Nécrologie sur T. OPPOLZER.

°**Burckhardt, F.**, Aus Tycho Brahe's Briefwechsel. Basel 1887.

4°, 24 p. — [2 fr.]

°**Cahen, A.**, Note sur Denis Papin. Paris 1887.

8°, 20 p.

Dedekind, P., Бернгардъ Риманнъ.
Fiziko-matematitcheskaia naouki 2, 1886, A : 35—46, 146—158. — Notice biographique sur BERNHARD RIEMANN, traduite de l'allemand.

Demme, C., Die Platonische Zahl.
Zeitschr. für Mathem. 32, 1887; Hist. Abth. 81—99, 121—132.

Dickstein, S., Hoene-Wronski. Warszawa 1887.
8°, 16 p. — Notice biographique, avec portrait.

Двухсотлѣтній юбилей книги Ньютона: »Philosophiae naturalis principia mathematica«.
Vjestnik elem. matem. 2, 1887, 288—289. — Le deuxième jubilé centenaire du livre de NEWTON »Philosophiae naturalis principia mathematica.«

°**Eudoxus,** Ars astronomica, qualis in charta aegyptiaca superest. Denuo edita a F. BLASS. Kiliae 1887.
4°, 25 p. — [1 M.]

Favaro, A., Otto anni d'insegnamento di Storia delle Matematiche nella R. Università di Padova.
Biblioth. Mathem. 1887, 49—54.

°**Günther, S.,** Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin 1887.
8°, 416 p. — [12 M.]

°**Günther, S.,** Simon L'Huilier. Tübingen 1887.
8°, 9 p.

ГАББЕ, В. и СТАРКОВЪ, А., Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1885 годъ.
Odessa, Matem. otd. obchtch. estestv., Zapiski 7, 1886. Appendice. 45 p. — HABBE, V. et STARKOFF, A. Bibliographie russe des mathématiques pour l'an 1885. — [Analyse:] Fiziko-matematitcheskaia naouki 3, 1887, B : 70—71.

Heiberg, J. L., Der byzantinische Mathematiker Leon.
Biblioth. Mathem. 1887, 33—36.

Helmholtz, H. von, Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action.
Berlin, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1887, 225—236.

°**Hoppe, E.,** Die Entwicklung der Lehre von der Elektricität bis auf Hauksbee. Hamburg 1887.
4°, 32 p. — [2,50 M.]

Houzeau, J. C., et Lancaster, A., Bibliographie générale de l'astronomie. Tome premier. Ouvrages imprimés & manuscrits. Première partie. Bruxelles 1887.
8°, VII + 858 p. — [25 fr.] — La bibliographie est précédée d'une introduction, écrite par M. HOUZEAU; c'est une sorte d'histoire philosophique de l'astronomie. Cette première partie contient les ouvrages historiques et les traités d'astrologie.

Hultsch, F., Scholien zur Sphaerik des Theodosios.
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Abhandl. (Philol. Cl.) 10, 1887, 381—446.

Narducci, E., Vite inedite di matematici italiani scritte da BERNARDINO BALDI.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 335—406, 437—489, 521—640 [= 590; la page 535 est suivie par la page 586].

НЕКРАСОВЪ, П. А., Значенie и историческое развитie теорiи детерминантовъ.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, A : 169—177. — NEKRASOFF, P. A., Notion et développement historique de la théorie des déterminants.

Poincaré, H., Notice sur les travaux scientifiques de Henri Poincaré. Paris, Gauthier-Villars 1886.

4°, 73 + (1) p. — Cette notice contient des matériaux pour l'histoire de l'analyse supérieure pendant ces derniers temps.

ПОКРОВСКIЙ, П. М., Историческiй очеркъ теорiи ультра-эллиптическихъ и абелевыхъ функцiй.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, A : 47—64, 159—168. — POKROWSKIJ, P. M., Esquisse historique de la théorie des fonctions hyperelliptiques et abéliennes.

Rayet, Notes sur l'histoire de la photographie astronomique.

Bullet. astronom. **4**, 1887, 165—176.

Siacci, F., Commemorazione di Alessandro Dorna.

Torino, Accad. d. sc., Atti **22**, 1886—1887, 247—252.

Simon, H., Verzeichniss von Druckfehlern in den Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 99—101.

Steinschneider, M., Die Söhne des Musa ben Schakir.

Biblioth. Mathem. 1887, 44—48.

[**Sturm, R., Schröder, E.** et **Sohncke, L.**,] Германнъ Грассманнъ. Его жизнь и учено-литературная дѣятельность.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **1**, 1885, A : 141—156, 240—260, 394—413. — Notice sur HERMANN GRASSMANN, sa vie et son action scientifique. Traduction de l'allemand.

Tannery, P., Etudes sur Diophante. I. Les problèmes déterminés.

Biblioth. Mathem. 1887, 37—43.

ВАСИЛЬЕВЪ, А. В., Роль профессопа Вейерштрасса въ современномъ развитiи математики.

Fiziko-matematitchskaia naouki **1**, 1885, B : 225—230, 257—264. — VASILIEFF, A. V., Le rôle du prof. WEIERSTRASS dans le développement des mathématiques de notre temps.

Question 15 [sur la rectification de la parabole semi-cubique].

Biblioth. Mathem. 1887, 64. (G. ENESTRÖM.)

Antwort auf die Anfrage 14 [über die erste Anwendung des Zeichens ∞].

Biblioth. Mathem. 1887, 64. (R. BALTZER.)

BAUMGART, O., Über das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine

vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheorems in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien. Leipzig, Teubner 1885. 8°.

Biblioth. Mathem. 1887, 55. (E. NETTO.)

BRUNEL, G., Monographie de la fonction Gamma. (Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3[e] série, tome 3.) Bordeaux 1886. 8°.

Biblioth. Mathem. 1887, 58—59. (G. ENESTRÖM.)

ENESTRÖM, G., Note historique sur une série dont le terme général est de la forme $A_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. (Comptes rendus de l'acad. d. sciences de Paris, t. 102, p. 523 —525).

Fiziko-matematitcheskaia naouki **3**, 1887, B: 89.

EUCLIDES, Elementa. Edidit et interpretatus est J. L. HEIBERG. I—IV. Lipsiae, Teubner 1883—1886. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 57. (CANTOR.)

GIESING, J., Leben und Schriften Leonardo's da Pisa. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 13. Jahrhunderts. Döbeln 1886. 4°.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 58—59. (CANTOR.)

GOW, J., A short history of greek mathematics. Cambridge 1884. 8°.

Fiziko-matematitcheskaia naouki **2**, 1886, B: 133—137. (V. V. BOBYNIN.)

GÜNTHER, S., Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers. (Beilage zum Jahresbericht der Königl. Studienanstalt Ansbach für 1885—1886.) Ansbach 1886. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 63. (CANTOR.)

MENDTHAL, H., Geometria Culmensis. Ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen [1393—1407]. Leipzig, Duncker 1886. 8°.

Deutsche Litteraturz. **8**, 1887, 688—689. (S. GÜNTHER.) — Liter. Centralbl. 1887, 641—642. — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 62—63. (CANTOR.)

TANNERY, P., Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction). Extrait des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale. Tome XXXII, 1[ère] partie. Paris 1886. 4°.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 59—62. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1887, 60—63. — Fiziko-matematitcheskaia naouki **2** (1886), 1887, B: 187—192; **3**, 1887, B: 79—80, 95—96. — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 78—80, 118—120, 159—160. — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 407—436, 490 —520.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

16. Mit der Redaction der neuen Ausgabe der Werke GALILEO GALILEI's betraut, richte ich an alle Gelehrten die höflichste Bitte, mich durch den Nachweis von GALILEI herrührender oder auf ihn bezüglicher Documente in der Ausführung des Unternehmens unterstützen zu wollen.

Im Besondern kommen für die neue Ausgabe in Betracht: neben den Schriften GALILEI's, von ihm geschriebene und an ihn gerichtete Briefe sowie von andern Zeitgenossen gewechselte Briefe, die in irgend welcher Weise seine Person und seine Lehren berühren, sowie Documente jeder Art, die auf sein Leben und seine Werke Bezug haben.

Sehr erwünscht wird in erster Linie der Nachweis von ungedrucktem Material sein, aber nicht minder dankenswerth jede Mittheilung über Originalmanuscripte oder aus der Zeit GALILEI's stammende Abschriften später gedruckter Texte, da auch diese insgesammt nicht ohne vorgängige sorgsame Vergleichung in der neuen Ausgabe reproducirt werden sollen.

(Antonio Favaro.)

---

17. Is there any earlier use of the sign $\div$ to express division than in RAHN (Johann Heinrich): *Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst* (Zürich 1659), p. 8: »Das Haubtzeichen des Dividierens ist $\div$«? (W. W. Beman.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1887.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1887. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 1. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 1.

BERLIN. MAYER & MÜLLER Französische Strasse 38/39. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Geminus in arabischer, hebräischer und zweifacher lateinischer Übersetzung.*

Von M. Steinschneider in Berlin.

Ein dem Ptolemäus beigelegtes, aus dem Arabischen von Moses Tibbon in Neapel[1] übersetztes, am 15. Tebet 5006 (5. Januar 1246) beendetes Werk findet sich in den Mss. Mantua 4, Paris 1027 und in einem dritten,[2] voraus ich die Mitteilungen in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch., Bd. 25, 1871, S. 394 u. 403 gemacht habe. Das 10. der 17 Kapitel handelt von der Bewegung der Planeten.[3] Der Titel am Anfang und Schluss, mit einiger Abweichung, ist »Kurze Astronomie» oder »Buch über die Wissenschaft des Globus», letzterer wahrscheinlich nach dem Arabischen.

Der Übersetzer hat die arabischen Sternnamen (Kap. 2) beibehalten, der arabische Übersetzer hat die griechischen verstümmelt, z. B. die Namen der Planeten (Kap. 1). Auch die Namen der citirten griechischen Autoren waren wohl schon in der arabischen Übersetzung stark verändert. Doch erkennt man in dem »Grammatiker Akrts» (ich vocalisire die Consonanten nicht), der eine Stelle des Homer erklärt (Kap. 5) leicht Krates von Mallos. Diese Stelle citirt Gerson b. Salomo (gegen Ende XIII. Jahrh.) aus einem Buche, das er »*Einleitung* in die Astronomie» nennt.[4] Ein jüdischer Zeitgenosse Gersons citirt ebenfalls »Ptolomäus in seiner *Einleitung*».[5] Eine Vergleichung meiner Excerpte aus dem hebr. Ms. mit Geminus' *'Εισ-*

* Ein Paragraph aus der i. J. 1885 von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift über die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters.

αγωγή εἰς τὰ φαινόμενα, her. von HALMA (2de partie de la *Chronologie de Ptolémée* p. 7—87)[6] har mir die Identität ergeben.

Der bekannte ABRAHAM DE BALMES (1524) hat unter Anderem die Phänomena unter dem Titel »*Isagogicon* Astrologiae *Ptolemaei*» übersetzt,[7] ohne Zweifel, wie sonst, aus dem Hebräischen, also aus der Übersetzung TIBBON's.

GEMINUS ist aber auch aus dem Arabischen direct ins *Lateinische* übersetzt; denn ALBERT MAGNUS (Opera V, 259, 271) citirt KRATES als »*Krices* in libro natura locorum habitabilium» und »PTOLOMAEUS in libro *de dispositione spherae* qui est *introductorius* Almagesti».[8] Dieser Titel wirft nicht nur ein Licht auf den zweiten hebräischen sondern erschliesst den bisher unbekannten Inhalt eines von GERARD V. CREMONA übersetzten Buches, worüber es bei LECLERC[9] heisst: »Nous manquons de renseignements sur cette traduction, et nous ignorons s'il s'agit des Eléments [d'EULLIDE?] ou des Hypothèses». WÜSTENFELD[10] begnügt sich mit der Wiedergabe dieses Titels ohne irgend eine Bemerkung. Ohne Zweifel bedeutet er den GEMINUS.

Ich glaube aber auch Fragmente der lateinischen Übersetzung zu erkennen in Ms. Digby 168, nach der Beschreibung in MACRAY's Catalog (1883, p. 174), wonach f. 118ª u. f. 120ᵇ: Excerpte »ex Introductorio Tholomei ad artem spericam»; das 2te beginnt: »Signum sumitur dupliciter pro 12ª parte zodyaci»; f. 122 unter Anderem: »*Karites* retulit Homerum versificatorem dixisse de Ethiopis in suis versibus», was allerdings auch ein Citat sein könnte; jedenfalls scheint dieser »Karites» aus GEMINUS zu stammen. — Hoffentlich entdeckt man noch anderswo Spuren dieser Übersetzung.

Einen genau entsprechenden *arabischen* Titel habe ich bis jetzt in den arabischen Hauptquellen (*Fihrist*, HAGI KHALFA, etc.) nicht gefunden; *Fihrist* (p. 269) kennt eine alte Übersetzung der »Einleitung in den Almagest» von THEON, und (p. 269) eine »Einleitung in die Kunst der Sterne», von einem nicht ganz sichern Autor (*Falis*, wahrscheinlich VETTIUS VALENS, der eine Einleitung zu den Apotelesmata des PTOLEMAEUS von PORPHYR verfasste).

Als ich nach dem von GERSON citirten Buche zu forschen anfing, notirte ich mir alle arabischen Verfasser von Einleitungen in die Astronomie oder Astrologie — die blossen Titel passen manchmal für beide (s. HAGI KHALFA, V, 472—475) — und kenne deren nahe an zwanzig, habe aber keinen Grund einen derselben für den Übersetzer, und seine Schrift für den GEMINUS zu halten.

Für die Geschichte der arabischen Wissenschaft bieten hebräische und lateinische Manuscripte manchen Beitrag, wie der gegenwärtige.

[1] Dass MOSES TIBBON um 1246 in Neapel war, ergiebt sich auch anderweitig, s. ISID. LOEB, *Un procès dans la famille des Ibn Tibbon,* (Paris 1886); das Datum 1246 richtig in der 2. Ausgabe S. 8. Die Übersetzung des kurzen *Almagest* von AVERROES durch JAKOB ANATOLI, in ms. Paris 903[2], ist angeblich von einem MOSES IBN TIBBON 1346 in Neapel nach dem Autograph *copirt* (so lies für »corrigirt« in meinem *Verzeichnis der hebräischen Handschriften in Berlin* S. 97). Sollte hier nicht 1246 zu lesen sein?

Über MOSES B. ISAK TIBBON in Candia 1402—6 s. die Zeitschrift Il Mosè, Corfu 1880, S. 283.

[2] Geschrieben in Rovigo Ende 1554 von ABRAHAM PROVINCIALE (vgl. *Cat. Bodl.* p. 2547). Das Oxforder ms. 2011 bei NEUBAUER ist aber nicht GEMINUS (Add. p. 1160), sondern IBN AFLAH, wie ich 1884 in meiner Preisschrift angegeben habe. In der Mitteilung an NEUBAUER habe ich wahrscheinlich die in der *Hist. lit. de la France* XXVII, 594 hinter einander genannten mss. verwechselt; vgl. daselbst p. 605.

[3] Über die falsche Combination des Pariser Catalogs s. Zeitschr. d. deutsch. morgenl. Gesellsch., Bd. 25, 1871, S. 403. Die *Hypotheses* sind in ms. Paris 1028[2].

[4] GROSS, in der Monatsschr. für Gesch. u. Wiss. des Judenth. 1879, S. 234, vgl. 126.

[5] LEVI B. ABRAHAM in der Encykl. (*ha-Kolel*), Cod. Reggio 13 f. 32 Z. 4 v. u., bei NEUBAUER n. 2028, s. Addit.

[6] GEMINUS schrieb, nach BRANDES (in JAHN's Archiv f. Philol. u. Pädagog., XIII, 1847, S. 218) um 140—130 v. Chr.

[7] JAKOB USSER's Mitteilung an SELDEN, bei WOLF, *Bibl. hebr.* III, p. 45; FABRICIUS, *Biblioth. gr.* V, 291; HEILBRONNER, *Hist. mathes.* 351. Der Verbleib des ms. ist mir unbekannt.

[8] GROSS, l. c. S. 126.

[9] *Hist. de la médecine arabe,* II, 415.

[10] *Die Übersetzungen,* etc. S. 4. — Von THABIT's Schriften habe ich diese bereits unterschieden in Zeitschr. f. Mathem., Bd. 10, 1875, S. 457 n. 7.

Die Prager Ausgabe des Nuncius sidereus.

Von EMIL WOHLWILL in Hamburg.

Im Anschluss an die Bemerkungen des Herrn PIETRO RICCARDI in N° 1 dieser Zeitschrift (p. 15—16) möchte ich ein Bedenken auch in Betreff derjenigen Ausgabe des *Nuncius sidereus* aussprechen, die in der *Bibliotheca matematica italiana* des Herrn RICCARDI unmittelbar vor der Londoner erwähnt wird.

Dass KEPLER im Jahre 1610, als er in Prag seine *Dissertatio cum nuncio sidereo* veröffentlichte, gleichzeitig einen zweiten Abdruck der GALILEI'schen Schrift veranstaltete, wird in vielen Büchern mitgetheilt; doch scheinen sämmtliche Angaben dieses Inhalts verhältnissmässig neueren Datums zu sein. In dem Briefwechsel zwischen KEPLER und GALILEI, in der *Dissertatio* selbst wie in der Widmung derselben an GIULIANO MEDICI und im Vorwort der KEPLER'schen Dioptrik ist nicht davon die Rede, ebensowenig in den älteren Biographieen GALILEI's und KEPLER's. Die älteste mir zugängliche Notiz über eine Prager Ausgabe findet sich bei VENTURI, der bekanntlich zuerst in neueren Zeiten KEPLER's *Dissertatio* wieder abgedruckt hat. In der kurzen Einleitung, die dieser Reproduction vorausgeschickt ist, heisst es: [1]

> Un altro esemplare del suo Nuncio fece il G. giungere, per mezzo di D. GIULIANO MEDICI in mano del KEPLERO a Praga; il quale ne procurò tosto una seconda edizione e la dedicò il 9 Maggio seguente all' Ambasciatore suddetto; con aggiungervi una sua Lettera o Dissertazione al GALILEO .... Il titolo della ristampa del Nunzio a Praga e la unitavi lettera del KEPLERO, sono come segue.
>
> IO. KEPLERI *Mathematici Caesarei Dissertatio cum Nuncio Sidereo nuper ad mortales misso a* GALILAEO GALILAEO *Mathematico Patavino.* Pragae, Typis Danielis Sedesani 1610 in 4°.

Im unmittelbaren Anschluss an diesen Titel folgt dann der Brief, das heisst die *Dissertatio* KEPLER's.

Von diesen Angaben VENTURI's sind mindestens zwei als unzutreffend zu bezeichnen. Die Widmung vom 9 Mai ist ihrem

klaren Wortlaute nach die Widmung der KEPLER'schen *Dissertatio,* nicht die einer zweiten Ausgabe des *Nuncius;* aber ebensowenig kann der Titel, den VENTURI anführt, Titel einer »ristampa del Nunzio» sein, weil er unzweifelhaft der Titel der KEPLER'schen *Dissertatio* ist.

VENTURI's Misverständniss scheint mir mit dem Doppelsinn des Wortes *Nuncius* zusammenzuhängen. GALILEI selbst hat allerdings in einer Randbemerkung zu GRASSI's *Ratio ponderum* mit Nachdruck erklärt, *Sidereus nuncius* bedeute »Ambasciata o avviso sidereo» und nicht »Ambasciadore»,[2] aber der bekannte vollständige Titel des *Nuncius sidereus* lässt die Auffassung derjenigen zum mindesten gerechtfertigt erscheinen, die wie GRASSI und der Redner des Collegium Romanum im Jahre 1611 vom »Sternenboten» reden. Diese Auffassung hat offenbar auch KEPLER getheilt und demgemäss seine Betrachtungen über den Gesammtinhalt der Schrift in die Form einer »gelehrten Verhandlung mit dem Sternenboten» gekleidet; dass er in der That nicht etwa *über* den *Nuncius* Betrachtungen anstellt, sondern »mit ihm» — in Wahrheit allerdings mit GALILEI — »conferirt», weiss Jeder, der die *Dissertatio* gelesen. Immerhin bietet KEPLER's Überschrift eine ungewöhnliche Verbindung der Worte, man begreift, dass sie missverstanden wurde, dass insbesondere Jemand, der »nuncius» wie GALILEI mit »avviso» übersetzt, auf den Gedanken kommen konnte, der Titel bezeichne ein Buch, in dem die *Dissertatio* mit der »ristampa del Nuncio» verbunden sei. Dass wenigstens der Herausgeber der jüngsten Ausgabe der Werke GALILEI's, der hier im Wesentlichen VENTURI's Angaben reproducirt, sich KEPLER's »cum» durch »in Verbindung mit» verdeutlicht hat, lässt sich daraus entnehmen, dass er dem gesonderten Abdruck der *Dissertatio* ihren ursprünglichen Titel versagt und denselben durch »Dissertatio *in* Nuncium sidereum» ersetzt hat. Eine Anmerkung — deren Wortlaut ersichtlich aus VENTURI's Erläuterung entstanden ist — belehrt den Leser: der Titel, den KEPLER dem Abdruck des »Nunzio» in Verbindung mit der angefügten (»coll' unitavi») Dissertation gegeben, laute: Jo. KEPLERI *dissertatio cum Nuncio sidereo.*[3] Die gleiche Erklärung wiederholt ALBERI mit ungefähr denselben Worten an drei oder vier andern Stellen seiner Ausgabe; ihm folgt, wenn ich nicht irre, auch RICCARDI's Bibliographie und — mit geringen Ausnahmen — die gesammte neuere GALILEI-Literatur.

Kann nun nach dem Gesagten kaum einem Zweifel unterliegen, dass jener Titel, unter dem bisher ausschliesslich die

Prager Ausgabe des *Nuncius sidereus* angeführt worden, derselben misverständlicher Weise beigelegt wird, so liegt die Frage nahe, ob nicht vielleicht aus dem gleichen Misverständniss auch der Glauben an die Existenz einer von Kepler veranstalteten Ausgabe des Galilei'schen Werks hervorgegangen ist. Mir scheint, dass auch diesem weiteren Schlusse die Berechtigung nicht abzusprechen ist, so lange nicht irgend Jemand ausdrücklich erklärt, dass er die Prager Ausgabe vor Augen gehabt hat; denn dass dies bei Denjenigen nicht der Fall gewesen ist, die ihr den Titel der Kepler'schen *Dissertatio* geben, darf man wohl mit einiger Zuversicht annehmen.

Gegen die Existenz einer Prager Ausgabe spricht nicht allein das Schweigen der älteren Quellen und die Unwahrscheinlichkeit aller späteren Angaben; es liegt auch ein bestimmteres Zeugniss dafür vor, dass Kepler einen Nachdruck des Galilei'schen Werks nicht veranstaltet und an demjenigen, der zu Frankfurt veröffentlicht wurde, keinen Antheil gehabt haben kann. Das sind die ernsten und scharfen Worte, die er über den Florentiner Nachdruck seiner eigenen *Dissertatio* im December 1610 niedergeschrieben hat. Der an Galilei gerichtete Brief, in dem sich diese Worte finden, scheint allerdings Entwurf geblieben zu sein; in demjenigen, den Galilei bald darauf nachweislich empfangen hat, ist — wohl aus Rücksicht darauf dass ein Antheil Galilei's an der Florentiner Veröffentlichung wahrscheinlich oder gar constatirt war — von den Vorwürfen gegen den Drucker nur eine Bemerkung über die mangelhafte Beschaffenheit des Nachdrucks übrig geblieben; dennoch wird nicht leicht Jemand, der jenen ersten Brief in der Ausgabe von Frisch [4] gelesen, als glaublich ansehen, dass Kepler im Mai 1610 zu Galilei's Ehre begangen, was er im December desselben Jahrs so entschieden als Unrecht gekennzeichnet hat.

[1] Venturi, *Memorie e lettere di* Galileo Galilei, I, 99.
[2] Opere di Galileo Galilei ed. Alberi, IV, 509.
[3] Opere di Galileo Galilei, V, 405. Man vergleiche VI, 94; VIII, 60; XV im Anhang p. V.
[4] Kepleri Opera omnia, II, 460—461.

Hamburg, April 1887.

Etudes sur Diophante.

Par PAUL TANNERY à Tonneins.

III. Les problèmes algébriques indéterminés des livres II et III.

On a vu que sur les 67 problèmes d'analyse algébrique de DIOPHANTE, 26 appartiennent au second livre. Sur ces 26, 9 (à savoir II, 8 et 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 27, 28) ne comportent qu'une indéterminée et j'en ai parlé dans l'étude précédente. Il en reste donc 17 que je vais examiner maintenant et dont 13 comportent deux indéterminées et 4 en comportent trois.

Nous rencontrons d'abord un couple (II, 15 et 16) qui peut se représenter par les équations suivantes, où (comme dans les cas suivants analogues) les signes supérieurs correspondent au premier problème du couple, les signes inférieurs au second:

$$x + y = a, \qquad z^2 \pm x = u^2, \qquad z^2 \pm y = v^2.$$

Les mêmes problèmes se rencontrent à la fin du livre III (24 et 23), avec des solutions un peu différentes. Il s'agit en somme de la solution de l'équation indéterminée:

$$u^2 + v^2 - 2z^2 = \pm a.$$

Les solutions de DIOPHANTE sont fondées sur le principe B. En posant, par exemple, $u = z + \alpha$, $v = z + \beta$, les équations deviennent linéaires en x, y, z.

Mais DIOPHANTE impose, dans II, 15, au choix de α et β, la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 < a,$$

en sorte que $z = \dfrac{a - \alpha^2 - \beta^2}{2(\alpha + \beta)}$ soit positif. Or cette condition est mal choisie, puisque la valeur absolue de z satisfera toujours au problème. Ce qu'il faut, au sens ancien, c'est que x et y soient positifs. Supposons $\alpha > \beta$, la vraie condition est:

$$\beta > \alpha - \frac{a}{\alpha}.$$

On voit qu'il suffit que $\alpha^2 < a$, pour qu'en prenant β positif et plus petit que α, elle soit toujours remplie.

Pour II, 16, où d'ailleurs il élimine par sa substitution z

et non u, DIOPHANTE impose de même au choix d'une indéterminée arbitraire une limitation trop restreinte. Ces deux problèmes se trouvent au reste d'une authenticité quelque peu suspecte, par suite de leur complexité comparée à la simplicité relative de ceux qui les environnent; mais leur répétition à la fin du livre III, qui serait si bien terminé par le très-élégant problème III, 22, doit encore plus exciter les soupçons.

II, 20 est le seul de ce livre qui, tout en comportant deux indéterminées ne présente qu'une équation

$$x^2 - y^2 = m(y^2 - z^2).$$

Cette équation, étant homogène, pourrait se ramener immédiatement à une autre, entre deux inconnues seulement. DIOPHANTE ne remarque pas cette homogénéité, comme il le fait dans des cas semblables (IV, 15, et V, 7) et sa solution, qu'il obtient, d'après le principe B, en posant

$$x = z + u, \qquad y = z + v,$$

puisque $x = y = z$ satisfait immédiatement à l'équation, est loin d'être élégante, car elle introduit dans les valeurs des inconnues un dénominateur inutile. Enfin il impose au choix de u la condition que dans la valeur de $z = \frac{1}{2}\frac{u^2 - (m+1)v^2}{(m+1)v - u}$, le numérateur et le dénominateur soient en même temps, soit positifs, soit négatifs. Non seulement cette limitation pourrait être critiquée comme les précédentes, mais il est à remarquer que le numérateur et le dénominateur ne peuvent être simultanément négatifs.

Après ce problème, vient une série de trois couples qui présentent entre eux une grande similitude

II, 21, 22.	$x^2 \pm y = u^2,$	$y^2 \pm x = v^2.$
II, 23, 24.	$x^2 \pm (x + y) = u^2,$	$y^2 \pm (x + y) = v^2.$
II, 25, 26.	$(x + y)^2 \pm x = u^2,$	$(x + y)^2 \pm y = v^2.$

C'est là, en somme, le type le plus répandu parmi les problèmes de DIOPHANTE; il s'agit d'égaler à des carrés indéterminés des fonctions du second degré des inconnues.

On voit aisément que, pour les couples ci-dessus, l'application du principe B rend immédiatement linéaires les équations par rapport aux inconnues. Dans la pratique, pour les deux premiers couples, le procédé de DIOPHANTE revient à abaisser d'abord par ce moyen le degré de la première équation, en tirer y en fonction de x, substituer dans la seconde

équation et appliquer à celle-ci, à son tour, le principe précité. Quant au troisième couple, il paraît à première vue, user d'un artifice spécial.

En posant $x + y = z$, $u = \alpha z$, $v = \beta z$, et éliminant x et y, on arrive à une équation en z, α, β, dont tous les termes sont en z^2 ou en z, qui peut donc être abaissée au premier degré. Au fond, il n'y a là que l'application du principe A à une équation résultant d'une élimination qui se présente d'elle-même.

On voit également que les problèmes de ces trois couples peuvent être, sans difficulté, étendus à un nombre quelconque d'inconnues des fonctions à égaler à des indéterminées. DIOPHANTE a lui même donné cette généralisation pour trois inconnues, dans les problèmes à 3 équations comportant trois indéterminées qui terminent le livre II et ceux qui commencent le livre III. Ainsi, II, 33 et 34 correspondent à II, 21 et 22; II, 35 et 36 à II, 23 et 24; III, 3 et 4 à II, 25 et 26. Au contraire III, 1 et 4 devraient avoir des correspondants qui manquent dans II, à savoir:

(1) $$x + y - x^2 = u^2, \qquad x + y - y^2 = v^2$$

(2) $$x - (x + y)^2 = u^2, \qquad y - (x + y)^2 = v^2.$$

On ne pourrait plus, il est vrai, les résoudre par le principe B; mais la solution n'en est pas moins facile, pour (2) par le même procédé que pour le couple II, 25 et 26; pour (1), par un autre procédé qui est également applicable au couple II, 23 et 24, et que DIOPHANTE a d'ailleurs employé pour le couple similaire, II, 35 et 36.

La solution ainsi obtenue est extrêmement élégante et elle peut aisément être étendue à un nombre quelconque n d'équations de la forme:

$$x_n^2 \pm \sum_1^n x_n = u_n^2.$$

Elle repose sur ce fait que si l'on pose $\sum_1^n x_n = Mz^2$, chacune de ces équations peut être résolue isolément, en fournissant x_n et u_n linéaires en z, par application de la solution du problème fondamental II, 11. Si en effet, on décompose arbitrairement M en deux facteurs p_n et q_n, on pourra poser:

$$x_n = \frac{p_n \mp q_n}{2} z, \qquad u_n = \frac{p_n \pm q_n}{2} z.$$

De la condition $\sum_1^n x_n = Mz^2$, on tirera d'ailleurs immédiatement

$$z = \frac{\sum_1^n p_n \mp \sum_1^n q_n}{2M}.$$

De même pour l'équation générale de la forme (1), savoir

$$\sum_1^n x_n - x_n^2 = u_n^2,$$

si l'on pose

$$x_n = p_n z, \qquad u_n = q_n z, \qquad \sum_1^n x_n = Mz^2,$$

en supposant formées, d'après II, 10, n sommes égales de deux carrés

$$p_n^2 + q_n^2 = M,$$

on aura

$$z = \frac{\sum_1^n p_n}{M}.$$

Revenons aux problèmes qui restent dans le livre II, d'abord au couple:

II, 29, 30. $x^2y^2 \pm x^2 = u^2, \qquad x^2y^2 \pm y^2 = v^2.$

Il est évident que l'élévation au quatrième degré des fonctions du premier membre ne constitue qu'une complication illusoire, et qu'il s'agit simplement de trouver deux solutions différentes de l'équation

$$x^2 + 1 = z^2.$$

Vient enfin le problème II, 30

$$xy + x + y = u^2, \qquad xy - x - y = v^2,$$

compliqué dans II, 31, par la condition de surcroît

$$x + y = w^2.$$

Pour le premier de ces problèmes, le procédé de DIOPHANTE est analogue au dernier que nous venons d'examiner. Si l'on pose

$$y = \alpha x, \qquad x + y = \beta x^2, \qquad u = \gamma x, \qquad v = \delta x,$$

tout sera résolu linéairement. L'on a d'ailleurs

$$\alpha + \beta = \gamma^2, \qquad \alpha - \beta = \delta^2,$$

et si l'on pose $\gamma + \delta = 2p$, $\gamma - \delta = 2q$,

$$\alpha = p^2 + q^2, \qquad \beta = 2pq.$$

La complication de II, 31 n'offre dès lors aucune difficulté, p et q étant arbitraires.

Sur les 14 problèmes algébriques du livre III, nous en avons déjà rencontré 6. Les 8 autres présentent d'abord une série où les fonctions égalées à des carrés indéterminées sont du premier degré ou accompagnées d'équations du premier degré entre les inconnues autres que les carrés indéterminés. En éliminant ces inconnnes, on trouve pour les carrés indéterminés les conditions suivantes

III, 5 et 6. $\quad p^2 = q^2 + r^2 + s^2,$

III, 7 et 8. $\quad 2p^2 = q^2 + r^2 + s^2,$

III, 9. $\quad 2p^2 = q^2 + r^2,$

III, 10, 11. $\quad 2s^2 = p^2 + q^2 + r^2 \mp a$

qui n'offrent aucune difficulté avec les procédés de DIOPHANTE.

III, 12, 13, dont IV, 20 n'est qu'un cas particulier, conduisent au contraire immédiatement à résoudre une condition telle que

$$(x^2 \mp a)(y^2 \mp a)(z^2 \mp a) = u^2.$$

DIOPHANTE la résout en choisissant x et y en sorte que les deux premiers facteurs du premier membre soient carrés; après les avoir pris d'abord arbitrairement, il s'arrête devant des équations telles que

$$52p^2 + 12 = q^2 \quad \text{ou} \quad 266p^2 - 10 = q^2,$$

qui sont cependant résolubles immédiatement par les lemmes VI, 12 et 16. Au contraire pour IV, 20

$$pq + 1 = x^2, \qquad qr + 1 = y^2, \qquad pr + 1 = z^2,$$

il donne une solution qu'il est facile de généraliser.

Posant $x = \alpha q + 1$, $y = \beta q + 1$, il tire linéairement p et r en q, et n'a plus qu'à satisfaire à l'équation

$$z^2 = \alpha^2\beta^2q^2 + 2\alpha\beta(\alpha + \beta)q + 4\alpha\beta + 1.$$

Voulant d'ailleurs laisser q arbitraire, en vue du problème d'analyse numérique qui suit, il y arrive en posant

$$4\alpha\beta + 1 = (\alpha + \beta)^2 \quad \text{d'où} \quad \alpha - \beta = 1.$$

Quant au problème général III, 12, 13, DIOPHANTE paraît avoir ignoré la solution qui peut cependant être obtenue par

sa méthode. Si en effet on prend arbitrairement x et y dans l'équation (3) elle est satisfaite en posant $z = \frac{xy \mp a}{x - y}$, et

$$u = \frac{x^2y^2 \mp ax^2 \mp ay^2 + a^2}{x - y}.$$

On peut donc appliquer le principe A.

C'est après ces problèmes que commence la série de ceux de l'analyse numérique. Mais l'analyse algébrique nous offre encore plus loin le problème III, 22, dont j'ai déjà signalé la solution comme particulièrement élégante, il s'agit de trouver quatre nombres, soit x_1, x_2, x_3, x_4, tels que le carré de leur somme, soit augmentée, soit diminuée de chacun d'eux fasse un carré. On a donc en fait 8 équations comportant 4 indéterminées.

Soit:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_1 = y^2$$
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - x_1 = z^2.$$

La solution de ce couple peut s'obtenir par un procédé tout à fait semblable à celui que nous avons déjà rencontré plus haut. Il conduira à poser

$$y = (p + q)u, \qquad z = (p - q)u, \qquad x_1 = 2pqu^2$$

et

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ru$$

en supposant d'ailleurs $p^2 + q^2 = r^2$.

En procédant de même pour les autres couples, on voit qu'il s'agit de décomposer de quatre façons différentes un même nombre r^2 en deux carrés, $p + q^2$, et l'on tirera finalement

$$u = \frac{r}{2\sum pq}.$$

Le problème peut facilement s'étendre à un nombre quelconque d'inconnues; mais l'élégance de la solution de DIOPHANTE consiste surtout en ce qu'il enseigne à former le nombre r, en sorte que les quatre décompositions se fassent en nombres entiers. Par ce côté, il touche à l'analyse numérique et sa généralisation complète est un des principaux titres de gloire de FERMAT.

Sur un théorème attribué à La Hire.

Par C. Le Paige à Liége.

La plupart des auteurs attribuent à Ph. de la Hire le théorème suivant:

Lorsqu'un cercle roule à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon double, un point de la circonférence du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe.

Cette propriété se trouve en effet démontrée dans le traité des épicycloïdes (1694).[1]

Le célèbre géomètre n'est cependant pas l'auteur de cette découverte; le théorème en question se trouve déjà, en effet, dans un écrit du mathématicien anversois A. Tacquet (1612—1660) intitulé: *De circulorum volutione per planum dissertatio physicomathematica,* publié à la suite de ses *Cylindricorum et annularium libri IV* (Antverpiæ, J. Meursius, 1651).

C'est le théorème XXI, p. 267—269 de la dissertation citée. D'un autre côté, dans son cours d'analyse,[2] Mr Catalan, citant le théorème, met en note: »on l'attribue à Cardan».

Cette indication se rapporte probablement à un passage de l'ouvrage de Cardan: *Exaereton mathematicorum* écrit en 1572, d'après le »Proemium», et inséré dans le tome IV (Lugduni 1663) de ses Opera. Nous y rencontrons en effet (p. 560) le théorème suivant: *Propositio centesima septuagesima tertia.* »Circulum super centro suo movere æqualiter ita quod omnia illius puncta per rectam lineam moveantur ultro, citroque.»

En faisant parcourir au centre d'un cercle, la circonférence d'un cercle égal, d'un mouvement uniforme, et donnant en même temps à un point du cercle mobile une vitesse double sur la circonférence de ce cercle, on obtient le mouvement rectiligne demandé. C'est, au fond, le théorème de Tacquet, ou plutôt, ce sont les éléments de la démonstration du théorème; Cardan ne songe pas, en effet, au mouvement épicycloïdal. Cardan (l. c., p. 561) reconnaît d'ailleurs que l'invention du procédé est due à Ludovico Ferrari qui n'avait su en démontrer l'exactitude.

[1] Mémoires de l'Académie royale des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, tome IX, p. 389.

[2] *Cours d'analyse de l'université de Liége* (Bruxelles 1870) p. 468.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Gino Loria. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica. Torino, Loescher 1887. 4°, 52 S.

Der Verf., bisher in Mantua und seit kurzem als Professor der höheren Geometrie an die Universität Genua berufen, scheint mit dieser inhaltsreichen, von einer seltenen Litteraturkenntniss getragenen Inaugurationsschrift seinen Studierenden gewissermassen einen Führer für ihre eigene Arbeit darbieten zu wollen; hier können sie sehen, was alles bereits im geometrischen Fache geleistet ist, welches die in neuester Zeit für diese Wissenschaft aufgestellten Ziele und Programmpunkte sind, und wo also die Forschung einzusetzen hat, durch welche unser Wissen über den bereits erreichen Stand hinaus gefördert werden soll. Von den ältesten Zeiten beginnend, führt uns der Verf. in rachem Fluge bis in unser laufendes Jahrhundert und bespricht alsdann sehr gründlich die einzelnen Theorien, um welche herum das Streben der Gegenwart sich gruppiert. Als solche Theorien unterscheidet er diejenige der ebenen Kurven, der Flächen, der doppelt gekrümmten Kurven und der allgemeinen Transformationen, die Geometrie der graden Linie, die Pangeometrie und die Lehre von den *n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, während einiger anderer Gattungen der Untersuchung (z. B. des Aequipollenzenkalkuls, der Quaternionen, der geometrischen Wahrscheinlichkeit u. s. w.) blos anhangsweise gedacht wird. Vielleicht hätten hierbei auch die neueren Bemühungen um eine Verallgemeinerung der trigonometrischen Grundbegriffe Erwähnung verdient. Man bemerkt allenthalben, dass der Verf. den Dingen, von welchen er spricht, vollstes Verständnis entgegenbringt, und so ist denn seine Arbeit angesichts der Rastlosigkeit, mit welcher die Forschungsthätigkeit immer neue Gebiete sich dienstbar zu machen sucht, als ein höchst willkommener Ruhe- und Sammelpunkt zu schätzen. Welche Mühe auf die Sichtung des Materiales verwendet worden sein muss, geht u. a. schon daraus hervor, dass nicht nur selbständige Werke und Zeitschriftenartikel sondern auch Gelegenheitsschriften — darunter eine stattliche Reihe deutscher Inauguraldissertationen — am geeigneten Orte namhaft gemacht werden.

München. S. Günther.

J. Giesing. Neuer Unterricht in der Schnellrechenkunst für die technische, kaufmännische und Schulpraxis. Döbeln 1884. 8°, VI + 92 S.

Der Unterzeichnete hat unlängst in dieser Zeitschrift die Programmabhandlung des Herrn Giesing über Leonardo Fibonacci angezeigt. Wenn er dieser Besprechung nunmehr eine weitere anlässlich einer Schrift des gleichen Verfassers über einen nicht speziell mathematisch-historischen Gegenstand folgen lässt, so thut er dies in der ausgesprochenen Absicht, an einem lehrreichen Beispiele zu zeigen, dass man, indem man sich in die Litteratur alter Zeiten versenkt, aus diesem Studium sehr wohl auch Gewinn für die aktuelle Wissenschaft zu ziehen vermöge. Wie nämlich der Verf. in der Vorrede erwähnt, sah er sich zu seinen Versuchen, schnell zum Ziele führende Rechnungsmethoden zu erfinden, wesentlich durch jene ehrwürdige Art der Multiplikation veranlasst, welche bei den indischen Arithmetikern uns begegnet, von Leonardo Pisano verbessert wurde und auch bei Maximus Planudes sowie bei einzelnen Italienern des XVI. Jahrhunderts sich findet, neuerdings aber nur bei wenigen, geschichtlich geschulten Schriftstellern Beachtung fand und sogar da und dort als nagelneue Erfindung wieder aufgetischt wurde.

Wie in der That durch diese Vervollkommnung des »blitzartigen» Rechnens komplizierte Exempel sich vereinfachen, das möge an dem Beispiele 253 × 164 (a. a. O., S. 6) erläutert werden. Indem wir die Zehnerziffern der Teilprodukte als eingeklammerte Indizes den Einern beifügen, erhalten wir die Schemate, wie folgt:

3 | 4 → 2 (1)

5 3 × 6 4: (1) + 4.5 + 6.3 = 9 (3)

2 5 3 × 1 6 4: (3) + 4.2 + 6.5 + 1.3 = 4 (4)

2 5 × 1 6: (4) + 6.2 + 1.5 = 1 (2)

2 | 1: (2) + 1.2 = 4,

das gesuchte Produkt ist also 41492. Bei vielziffrigen Zahlen gewährt dieses Verfahren, wenn man sich nur erst einmal darauf eingeübt hat, wirklich grosse Vorteile. Der Verf. hat es jedoch hiebei nicht bewenden lassen, sondern, worauf wir an dieser Stelle allerdings nicht näher eingehen können, den Grund-

gedanken auch für die Spezies der Division und Wurzelausziehung nutzbar zu machen verstanden. Sein auf dieser Idee basierender, im zweiten Teile der vorliegenden Schrift beschriebener Schnellrechenapparat hat ein Patent des deutschen Reiches erhalten.

München. S. GÜNTHER.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK. INHALT UND NAMEN-VERZEICHNISS DER BÄNDE **1—100.** 1826—1887. Berlin, Reimer 1877. 4°, 252 S.

Das »Journal für die reine und angewandte Mathematik« wurde von A. L. CRELLE begründet; der erste Band erschien 1826, der letzte unter CRELLE's Redaction ist der 1856 ausgegebene 52ste. Nach CRELLE's Tode übernahm C. W. BORCHARDT unter Mitwirkung von SCHELLBACH, KUMMER, KRONECKER und WEIERSTRASS die Redaction, welche er bis zu seinem 1880 erfolgten Tode beibehielt. Die Herausgabe besorgten vom 89sten Bande an L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS, doch ist der 89ste und 90ste Band noch unter dem alten Titel publicirt. Das Journal erscheint bekanntlich im zwanglosen Heften, deren vier einen Band ausmachen; die Anzahl der in einem Jahre ausgegebenen Bände ist daher eine verschiedene, sie wechselt zwischen einem und zwei Bänden innerhalb eines Jahres, nur im Jahre 1846 gelangten vier Bände (30—33) zur Ausgabe.

Abgesehen von 47 von ungenannten Verfassern veröffentlichten Aufsätzen haben 427 verschiedene Autoren — darunter zwei Damen: SOPHIE GERMAIN und SOPHIE KOWALEVSKI — in den ersten 100 Bänden Arbeiten veröffentlicht. Wenn man die Nationalität dieser Autoren nach demjenigen Wohnsitz bestimmt, welchen sie bei der Publication ihres letzten in dem Journal enthaltenen Aufsatzes innehatten, so vertheilen sich die Autoren auf die einzelnen Länder folgendermaassen:

Deutschland	280	Frankreich	30
Oesterreich	21	Italien	15
Schweiz	9	Portugal	1
Dänemark	6	Russland	21
Schweden u. Norwegen	9	Griechenland	1
England	20	Amerika	2
Belgien u. Holland	12		

Die Anzahl der von diesen 427 Verfassern veröffentlichten Aufsätze, mit Einschluss der 47 anonymen Artikel beträgt 2265 und zwar sind von diesen

1669 in deutscher,
35 » englischer,
133 » lateinischer,
430 » französischer und
10 » italiänischer Sprache verfasst.

Die meisten Artikel, nämlich 113, veröffentlichte JACOBI; dann folgt CAYLEY mit 59, STEINER mit 56, STERN mit 50, CRELLE und CLEBSCH mit 47, HESSE mit 44, GUDERMANN mit 38, EISENSTEIN, HERMITE und RAABE mit 37, CLAUSEN mit 36, HEINE mit 35, KUMMER mit 32, MINDING mit 31 und DIRICHLET mit 30 Aufsätzen.

Dem Inhalte nach umfassen diese Artikel so ziemlich das ganze Gebiet der Mathematik; es behandeln nämlich:

Geschichte der Mathematik (Bibliographie, Nachrufe u. s. w.)	27
Elementargeometrie	118
Parallelentheorie	3
Stereometrie (mit Krystallographie)	45
Trigonometrie	13
Analytische Geometrie	45
Synthetische Geometrie	112
Kegelschnitte und Ebene Curven (synthetisch u. analytisch behandelt)	136
Flächen und Raumcurven (synthetisch u. analytisch behandelt)	207
Theorie der Abbildung	18
Nicht-Euklidische Geometrie	5
Arithmetik und Algebra	187
Combinatorik	18
Wahrscheinlichkeitsrechnung	8
Theorie der Determinanten	41
Theorie der Kettenbrüche	31
Theorie der Gleichungen	82
Zahlentheorie	177
Differential- und Integralrechnung	68
Variationsrechnung	15
Bestimmte Integrale	47
Differentialgleichungen	128
Reihen- und Functionentheorie (mit Einschluss besonderer Functionen, wie: Gamma-Functionen, Bernoulli'sche Functionen und Zahlen, Kugelfunctionen u. s. w.)	278
Elliptische, Hyperelliptische, Abel'sche Functionen und Integrale (nebst θ-Reihen und Functionen)	199
Mechanik	136
Potentialtheorie	19
Hydromechanik	27
Aerostatik	4
Astronomie und Calenderwesen	28
Geodäsie	5
Physik (Akustik, Optik, Wärme, Electricität u. Magnetismus)	50

Berlin. G. VALENTIN.

M. E. ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЁНКО. Исторія математики. Историческій очеркъ развитія геомегріи. Томъ первыи. Кіевъ 1883.* In-8°, XI + 684 p.

L'ouvrage de M. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO n'est pas une histoire des mathématiques proprement dite, mais plutôt un recueil d'esquisses de l'histoire des mathématiques, arrangées même avec peu de plan. Après le »précis historique du développement de la géométrie», commençant, d'après l'exemple des écrivains des siècles précédents, par les Grecs, et terminant avec la fin du XV^e siècle, suivent: une esquisse consacrée aux Arabes, un bref aperçu de l'histoire de l'algèbre, puis d'autres notices sur les Chaldéens, les Egyptiens, les Chinois, les Hindous et à la fin encore un chapitre sur les Arabes. On voit donc que l'ordre chronologique n'a pas été suivi dans cet ouvrage et qu'il n'est pas possible d'y retrouver aucun autre ordre méthodique. Ainsi, ces esquisses ne nous donnent que des notices isolées sur la vie et l'action scientifique des mathématiciens, sans connexion véritable. Cette manière, depuis longtemps abandonnée, se montre surtout dans la partie de l'ouvrage qui traite le développement de la géométrie au moyen-âge et chez les Romains. En revanche l'auteur s'est proposé de lier les esquisses au moins extérieurement, et à cet effet il les a fait précéder par des introductions, lesquelles, sans pénétrer au fond du sujet, répètent les mêmes faits principaux qui ont été rapportés dans les notices bio-bibliographiques: par exemple que l'école pythagoricienne succéda à l'école ionienne, et que c'était dans l'école d'Alexandrie que la géométrie grecque culminait. Quelquefois on trouve dans ces introductions des notices hors de propos, par exemple l'exposition de l'état des mathématiques au moyen-âge et chez les Hindous dans l'introduction de l'article sur la géométrie grecque.

Après avoir rendu compte du caractère général des esquisses de M. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO, il nous faut nous arrêter un peu sur les particularités. Mais comme nous tendrons à être très bref, nous nous restreindrons à l'histoire de la géométrie des Grecs.

Remarquons au premier lieu que les notices ne se rapportent pas toujours à la géométrie. Dans l'article sur ERATOSTHÈNE (p. 108—111), l'auteur ne fait que peu de men-

* M. E. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO. Histoire des mathématiques. Précis historique du développement de la géométrie. Tome premier. Kiew 1883.

tion du mésolabe, instrument qui a servi à la construction de deux moyennes proportionnelles; de même, l'exposition de la méthode pour trouver les nombres premiers, bien connue sous le nom du crible d'ERATOSTHÈNE, a été omise. Au lieu de cela on trouve réunis par l'auteur tous les renseignements sur les oeuvres astronomiques et géographiques d'ERATOSTHÈNE. Par exemple, pour ce qui concerne la sphère armillaire, construite d'après les indications d'ERATOSTHÈNE, toutes les notices sur ce sujet que PROCLUS nous a données dans son ouvrage, sont exposées d'une manière la plus détaillée. — Dans l'article suivant, sur NICOMÈDE (p. 110—111), nous ne trouvons point de détails sur la conchoïde et ses applications; en effet, à NICOMÈDE et à sa découverte fameuse, à peine treize lignes sont consacrées. D'ailleurs ce peu de lignes contient encore des indications mal à propos comme les suivantes: »La conchoïde fut appliquée par NEWTON à la construction géométrique de toutes les équations du 3e et 4e degrés. Pendant le XVIIe et XVIIIe siècles la conchoïde était l'objet de recherches de plusieurs géomètres.« — Relativement à la cissoïde de DIOCLÈS l'auteur ne fait que la remarque suivante: »Pour résoudre le problème de la duplication du cube, DIOCLÈS inventa la courbe connue sous le nom de cissoïde« (p. 111). — Dans l'article sur HIPPARQUE (p. 111—112), après avoir rendu compte de ses recherches astronomiques et des titres de toutes ses oeuvres dans cette science soit parvenues à nous, soit perdues, et de son ouvrage géométrique qui traite la construction d'une table des cordes, l'auteur ne remarque qu'en passant, que THÉON fait encore mention de l'ouvrage de HIPPARQUE »Sur les cordes du cercle«, quoique on sache que THÉON nous a donné des renseignements assez complets sur cette oeuvre de HIPPARQUE.

Tous ces exemples cités sont rassemblés dans l'espace de quatre pages de l'ouvrage. Pour montrer combien l'auteur aime à introduire dans son exposition des faits appartenant à d'autres époques, en citons encore un seul exemple. Parlant des oeuvres perdues d'APOLLONIUS de Perga, l'auteur nous raconte d'une manière détaillée tous les vains essais, faits au XVIIème siècle pour les rétablir. Quand il est question du problème de la construction d'un cercle qui touche trois cercles donnés, attribué dans un des essais susdits à APOLLONIUS, l'auteur expose avec tous les détails l'histoire de la résolution de ce problème pendant le XVIIème siècle (p. 106). Mais il est évident que tout cela n'a pas affaire à l'histoire du développement de la géométrie dans l'école d'Alexandrie.

Parmi les indications inexactes ou peu fondées de l'auteur citons quelques-unes. Il confond l'oeuvre perdue d'Apollonius de Perga »De sectione determinata» avec »De sectione rationis» du même auteur, ouvrage qui nous est parvenu en traduction arabe, et il rapporte au premier ouvrage tout ce qu'il faut rapporter au second. Nous n'avons pas ici affaire à une faute de plume, car le titre: »De sectione determinata» est répété deux fois, et une page plus loin l'auteur parle de l'oeuvre »De sectione rationis» comme d'une oeuvre parvenue à notre temps et traduite en arabe. — Il dit que »l'opinion que Hypsiclès vivait environ 180 ans après J. Chr. (p. 133) est celle qui a la plus grande vraisemblance», malgré que le contraire fût déjà montré par Vossius et Delambre; de plus Bretschneider et Cantor, dont les oeuvres sont citées plusieurs fois par l'auteur, ont mis hors de doute, que Hypsiclès vivait entre les années 200—100 avant J. Chr. On peut aussi considérer comme une chose prouvée que Hypsiclès composa le XIV^e livre qui se trouve à la fin de quelques manuscrits des *Elementa*. Mais malgré cela l'auteur dit »que l'on peut à peine croire à une telle conjecture».

On trouve aussi dans l'ouvrage de l'auteur des citations inexactes. En discutant la question sur l'époque où vivait Zenodore, M. Cantor la fixe entre les ans 200 avant et 90 après J. Chr., mais il estime qu'il faut l'approcher d'Euclide autant que possible. Malgré cela, M Vachtchenko-Zakhartchenko énonce catégoriquement, que »Zenodore vivait, *d'après l'hypothèse de Cantor*, dans le II siècle après J. Chr.» (p. 133). — De plus l'auteur présente parfois des choses douteuses comme mises hors de chaque doute. Ainsi en indiquant qu'Apollonius de Perga était un géomètre »non moins célèbre qu'Archimède lui-même» (p. 91), il laisse de côté les notices d'un caractère contraire, qui accusent Apollonius de plagiat. De même, il dit qu'Eratosthène occupait la place de bibliothécaire (dans la bibliothèque d'Alexandrie) jusqu'à sa mort (p. 109), sans faire mention de l'indication contraire.

Les remarques déjà faites suffisent pour donner une idée de l'ouvrage. En résumé, on y trouve un recueil de notices, souvent très complètes, d'histoire des mathématiques, mais il lui manque de la conformité dans le plan et dans le choix des matériaux, il contient un nombre assez grand d'erreurs et d'inexactitudes, enfin l'appréciation des faits n'y est pas toujours juste.

Moskwa. V. Bobynin.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von — journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1887 : 3.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.
19 (1886) : 12. — **20** (1887) : 1—2.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
32 (1887) : 5.

°**Albrecht, G.,** Geschichte der Elektricität. (Elektrotechnische Bibliothek, Band 28.) Wien, Hartleben 1887.
8°. — [3 M.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 103. (B. NEBEL.)

Bierens de Haan, D., Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantyn Huygens.
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 161—173.

Bigoni, G., Ipazia Alessandrina. Studio storico.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{5}_6$, 1887, 397—437, 495—526, 681—710.

°**Bilfinger, R.,** Die Zeitmesser der antiken Völker. Festprogramm des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums. Stuttgart 1886.
4°, 78 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 57—58. (CANTOR.)

БОБЫНИНЪ, В. В., Происхожденіе и первоначальное развитіе счисленія.
Fiziko-matemat. naouki **2**, 1886, A : 97—113, 193—208. — BOBYNIN, V. V., Sur l'origine et les premiers progrès de l'arithmétique.

Christensen, S. A., The first determination of the length of a curve.
Biblioth. Mathem. 1887, 76—80.

Dupuis, J., Note sur un passage géométrique de la République de Platon.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 641—644.

Dupuis, J., Note sur un passage géométrique du Ménon de Platon.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 645—650.

Eneström, G., Acta Mathematica. Inhaltsverzeichniss der Bände — table des matières des tomes **1**—**10**.
Acta Mathem. **10**, 1887, 349—397. — Contient aussi des notices biographiques sur les auteurs et des notices bibliographiques sur les mémoires respectifs.

°**Eymael, H. J.**, Huygens-Studiën. Nalezingen met critische aanteekeningen op uitgaven van C. Huygens' werken door Verwijs, Verdam enz. Kuilenburg 1887.
8°, 7 + 160 p. — [3,80 M.]

Favaro, A., Annunzio della edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **5**$_6$, 1887, 941—944.

Glaisher, J. W. L., The mathematical tripos.
London, Mathem. soc., Proceedings **18**, 1887, 4—38. — Contient des notices historiques sur l'étude des mathématiques à l'université de Cambridge.

°**Govi, G.**, Galileo e il cannocchiale.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Memorie 1887. — [Compte rendu:] *Napoli*, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto **26**, 1887, 48—49. (G. Govi.)

Günther, S., Notiz zur Geschichte der Klimatologie.
Biblioth. Mathem. 1887, 65—69.

°**Heiberg, J. L.**, Eine alte lateinische Übersetzung von Archimedes.
Opuscula philologica (Kjøbenhavn, Klein 1887), p. 1—8.

Hultsch, F., Autolykos und Euklid.
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Philol. Cl.) 1886, 128—155.

Hunrath, K., Zum Verständnis des Wortes Algorismus.
Biblioth. Mathem. 1887, 70.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Inhalt und Namen-Verzeichniss der Bände **1—100**. 1826—1887. Berlin, Reimer 1887.
4°, 252 p. — [12 M.]

Loria, G., Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica.
| *Torino*, Accad. d. sc., Memorie **38**$_2$, 1887. 52 p.

Mansion, P., Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Extrait du »Résumé du cours d'analyse infinitésimale«. Gand, Hoste 1887.
8°, 37 + (2) p.

°**Marie, M.**, Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome XI. Quinzième période: De Fourier à Arago. Paris, Gauthier-Villars 1887.
8°, 263 p. — [6 fr.] — [Analyse des tomes VIII—IX:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 64—65, 157—158. (Cantor.)

Picard, E., Supplément [à la] Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Picard. Paris, Gauthier-Villars 1886.
4°, 20 p. — La »Notice« a été publiée en 1883.

Poincaré, H., Notice sur la vie et les travaux de M. Laguerre.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **104**, 1887, 1643—1650.

°ПОРѢЦКІЙ, П. С., Историческій очеркъ развитія сферической тригонометріи. Казань 1887.
8°, 16 p. — Porjetskij, P. S., Aperçu historique du développement de la trigonométrie sphérique.

°**Rosenberger, F.**, Die Geschichte der Physik in Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. Theil III: Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren. Abtheilung 1. Braunschweig 1887.
8°, 318 p. — [6,50 M.]

Steinschneider, M., Die Söhne des Musa ben Schakir. [Schluss.]
Biblioth. Mathem. 1887, 71—75.

Steinschneider, M., Etudes sur Zarkali, astronome arabe du XI^e siècle et ses ouvrages. (Continuation.)
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 1—36.

Suter, H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. (Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Kantonschule in Zürich 1887.) Zürich 1887.
4°, (2) + 58 p.

Tannery, P., Les »Définitions» du Pseudo-Heron.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887, 189—193.

Tannery, P., Etudes sur Diophante. II. L'analyse indéterminée algébrique.
Biblioth. Mathem. 1887, 81—88.

Anfrage 16 [über Galilei-Handschriften].
Biblioth. Mathem. 1887, 96. (A. Favaro.)

Question 17 [on the use of the signe ÷].
Biblioth. Mathem. 1887, 96. (W. W. Beman.)

Allman, G. J., Greek geometry. (Hermathena VI.) Dublin 1886. 8°.
Berliner philol. Wochenschr. **7**, 1887, 246—247. (Fr. Hultsch.)

Anschütz, C., Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg 1599. (Sitzungsber. der Böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften.) Prag 1886. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 63—64. (Cantor.)

Favaro, A., Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI. et XVII. con Giovanni Antonio Magini. Bologna, Zanichelli 1886. 8°.
Leipzig, Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **22**, 1887, 66—72. (S. Günther.) — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 37—59. (F. Jacoli.)

Favaro, A., Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche. Venezia 1887. 4°.

[redacted]

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 174—176. (CANTOR.)

GIESING, J., Leben und Schriften Leonardos da Pisa. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 13. Jahrhunderts. Döbeln 1886. 4°.

Biblioth. Mathem. 1887, 89—90. (S. GÜNTHER.)

GOVI, G., L'ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia, scrittore del secolo XII ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo imperfetto ora per la prima volta conforme a un codice della Biblioteca Ambrosiana per deliberazione della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicata. Torino 1885. 8°.

Beibl. z. d. Ann. der Physik **10**, 1886, 310. (E. W.)

MÜLLER, F., Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums 1887. Berlin 1887. 4°.

Biblioth. Mathem. 1887, 96—97. (G. ENESTRÖM.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1886. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 188—200.

Listes d'ouvrages récemment publiés.

Biblioth. Mathem. 1887, 91—95. — Fiziko-matem. nauki **3**, 1887, B: 127—128. — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), 1887, 641—700; **20**, 1887, 60—94. — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 186—187.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

18. TREUTLEIN erwähnt in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, erstes Heft (Leipzig 1877), S. 38, dass HUSSWIRT im *Enchiridion novus Algorismi* (1501) für das Zeichen der Null neben anderen Worten das Wort »theca« gebrauche. Er fügt S. 39 hinzu, dass RAMUS den Gebrauch dieses Wortes gekannt habe. TREUTLEIN hat wohl eine Stelle in P. RAMI *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta* (Basel 1569) die »in caput primum primi libri Arithmeticae» im Sinne. Nun findet sich in dem *Opusculum de praxi numerorum* (1503, vgl. Biblioth. Mathem. 1887, S. 70) auf Fo. XLV der Vermerk: »Decima vero figura dicitur *theta* | vel circulus | vel cifra | vel figura nichili».

Es dürfte von allgemeinem Interesse sein, über Schreibung und Herkunft dieses Wortes mehr zu erfahren.

(K. Hunrath.)

Index.

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888

NEUE FOLGE 2. | NOUVELLE SÉRIE 2.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 31.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
[illegible] STRASSE [illegible]

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1888.

PARIS
A. HERMANN.
[illegible]

3IBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

I GESCHICHTE DER MATHEMATIK

D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888.

UE FOLGE 2.

NOUVELLE SERIE 2.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
AYER & MÜLLER.
...STRASSE 38/39.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1888.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 2. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 2.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler.

Par C. A. BJERKNES à Christiania.

Dans ma biographie sur N.-H. ABEL, j'ai fait mention[1] d'un théorème indiqué par le mathématicien danois C. F. DEGEN (né en 1766, mort en 1825) et contenant un essai de généralisation du théorème d'addition des fonctions elliptiques. C'est à la connexion avec les recherches d'ABEL sur le même sujet que cette tentative doit son intérêt principal; en effet la généralisation n'est pas exacte et elle ne subsiste que dans un cas très particulier.

Le théorème dont il s'agit se trouve dans une lettre du 21 mai 1821, adressée par DEGEN à l'astronome norvégien C. HANSTEEN (né en 1784, mort en 1873). Dans cette lettre, après avoir appelé l'attention sur l'importance de l'étude des transcendentes elliptiques, où, d'après son avis, le travailleur »découvrira des détroits de Magellan conduisant à de vastes régions d'un seul et immense océan analytique», DEGEN énonce son théorème sous la forme suivante:

»Figurons-nous n quantités variables

$$u, v, x, y, z, \ldots, \omega,$$

$n - 1$ constantes données

$$a, b, c, d, \ldots, k,$$

et enfin une constante arbitraire A. Soit F une fonction de $n - 1$ quantités de telle espèce que

$$F(v, x, y, z, \ldots, \omega) = \sqrt{A \sin^2 v \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z \ldots \pm 1},$$

$$F(u, x, y, z, \ldots, \omega) = \sqrt{A \sin^2 u \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z \ldots \pm 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et prenons le signe + si n est un nombre pair, le signe — si n est un nombre impair. Cela posé, à l'équation différentielle

$$\text{(A)} \quad F(v, x, y, \ldots) du + F(u, x, y, \ldots) dv + F(u, v, y, \ldots) dx + \ldots + F(u, v, x, y, \ldots) d\omega = 0$$

correspondra l'intégrale suivante extrêmement simple:

$$\text{(B)} \quad \cos u \cos v \cos x \ldots \cos \omega + \cos a \cos b \cos c \ldots \cos k = F(a, b, c, \ldots, k) \sin u \sin v \sin x \ldots \sin \omega.$$

Il en résulte comme corollaire très simple que, si vous posez $n = 2$, $u = \phi$, $v = \omega$ et que $a = \alpha$ soit ainsi la seule quantité donnée, l'équation différentielle devient

$$F(v) du + F(u) dv = 0,$$

ou

$$\frac{du}{F(u)} + \frac{dv}{F(v)} = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{du}{\sqrt{1 + A \sin^2 u}} + \frac{dv}{\sqrt{1 + A \sin^2 v}} = 0.$$

Cette proposition, bien que fautive, est basée au moins sur une bonne idée, et sans doute elle a contribué à la découverte prochaine du théorème d'addition d'ABEL.

[1] *Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française. Revue et considérablement augmentée par l'auteur.* (Paris, Gauthier-Villars 1885), p. 5—6.

Etudes sur Diophante.

Par PAUL TANNERY à Tonneins.

IV. Les problèmes algébriques indéterminés des trois derniers livres.

J'ai déjà parlé (II) des onze problèmes d'analyse algébrique du livre IV de DIOPHANTE qui ne comportent qu'une seule indéterminée ou qui, comme IV, 15, se ramènent immédiatement à cette classe; j'ai dit également (III) que IV, 20 n'était qu'un cas particulier de III, 12.

Il ne me reste donc qu'à présenter quelques observations sur les six autres problèmes du même genre que renferme encore le livre IV.

Dans IV, 6, les deux équations

$$u^2 + x^2 = y^2, \qquad u^2 + v^2 = z^2,$$

peuvent en réalité se traiter isolément, la première s'abaissant d'ailleurs immédiatement au premier degré en u, si l'on se donne les rapports des deux autres inconnues à celle-là, la seconde équation se résolvant immédiatement, dès que u est déterminé.

Le problème IV, 7 et 8, d'après son énoncé que représentent les équations

$$u^2 + x^3 = y^2, \qquad u^2 + v^2 = z^3,$$

appartient en réalité à l'analyse numérique; mais, dans les deux solutions qu'il en donne, DIOPHANTE suppose $x = z$. Dès lors, en prenant pour nouvelles inconnues les rapports à x de u, v et y, on n'a plus qu'à satisfaire à une condition telle que

$$2u'^2 + v'^2 = y'^2.$$

Les marches, passablement détournées, que suit DIOPHANTE, ne présentent pas d'intérêt particulier.

IV, 14 consiste à égaler à quatre carrés indéterminés quatre formes linéaires à deux inconnues. DIOPHANTE, selon son habitude, procède de proche en proche; mais, si l'on élimine les inconnues du premier degré, on arrive, après une transformation facile, à un couple tel que

$$x^2 + y^2 = u^2, \qquad 2xy + 1 = v^2,$$

dont la solution n'offre aucune difficulté.

IV, 22, qui comporte aussi quatre équations entre six inconnues, est encore plus simple, puisqu'il n'exige qu'une condition du second degré:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Enfin IV, 45 et IV, 46, toujours dans les mêmes conditions, se ramènent respectivement aux conditions

$$(1) \qquad ax^2 + y^2 = (a + 1)z^2,$$

$$(2) \qquad x^2(y^2 - z^2) = a(x^2 - y^2).$$

Pour le premier de ces deux derniers problèmes, on peut observer que DIOPHANTE, avant de prendre la marche rationnelle qui le conduit, de fait, à la relation (1), bien facile à résoudre par notre principe B, aborde la question par une voie qui le conduit à une double équation, et qu'il abandonne ensuite cette marche, parce qu'il ignore la solution générale de cette double équation.

Quant à la relation (2), il suffit de remarquer que la solution particulière immédiate: $x = y = z$, suffit à la traiter.

D'après l'énoncé du problème IV, 44, correspondant aux équations:

$$(x + y + z)x = \frac{u(u + 1)}{2},$$

$$(x + y + z)y = v^2,$$

$$(x + y + z)z = w^2,$$

même en supposant u entier, on n'aurait encore qu'un problème algébrique. Car si l'on pose

$$x + y + z = s,$$

il suffit de résoudre

$$s^2 - v^2 = \frac{u(u + 1)}{2} + w^2,$$

équation où l'on peut se donner arbitrairement u et w. Mais dans la solution, DIOPHANTE suppose que s est un carré, condition qui semble avoir été omise dans l'énoncé, et qui complique singulièrement le problème.

Si maintenant nous passons aux deux derniers livres, nous n'avons pas à revenir sur les deux seuls problèmes d'analyse algébrique que présente le livre V (7 et 33), non plus que sur le lemme VI, 16. Mais il paraît à propos de présenter quelques observations générales sur le livre VI.

Ce livre est tout entier consacré à des problèmes sur les triangles rectangles en nombres, c'est à dire sur les groupes de nombres (x, y, z) tels que

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

nombres que nous savons d'ailleurs pouvoir être exprimés par les formes

$$(3) \qquad x = m(p^2 - q^2), \qquad y = m \cdot 2pq, \qquad z = m(p^2 + q^2).$$

Tous les groupes pour lesquels p et q sont les mêmes, ou sont dans le même rapport, constituent au reste des triangles semblables, ou d'une même espèce.

Le problème VI, 1 demande, par exemple, que $z - x$ et $z - y$ soient des cubes; il se résoudra facilement en déterminant p et q de sorte que

$$q = 2m\alpha^3, \qquad p = q + m\beta^3.$$

De même, pour le problème VI, 2, où $z + x$ et $z + y$ doivent être cubes,

$$p = 2m\alpha^3, \qquad q = m\beta^3 - p,$$

sous la condition

$$p > q > 0, \quad \text{ou} \quad 4 > \frac{\beta^3}{\alpha^3} > 2.$$

En réalité, il n'y a dans un triangle rectangle que deux indéterminées; on peut donc, soit pour une *échelle* donnée m, chercher à déterminer l'espèce, soit pour une espèce donnée, chercher à déterminer l'échelle m, ce que par exemple, Diophante aurait très bien pu faire pour les deux premiers problèmes du livre VI.

Pour les suivants (VI, 3 à VI, 17), c'est sous la seconde forme que Diophante se pose le problème; mais, comme en général il arrive ainsi, soit à une équation du second degré déterminée en m (VI, 6 à 11), soit à des équations indéterminées du second degré (VI, 3, 4, 5) de la forme générale

$$am^2 + b = n^2,$$

soit même à des équations multiples du second degré, il détermine subsidiairement l'espèce (après s'être donné ou p, ou q, ou une relation simple entre les deux) de façon à pouvoir traiter les équations en m, auxquelles il arrive.

VI, 18 appartient au contraire à l'analyse algébrique et c'est en même temps le seul problème du livre dont l'énoncé

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888.

NEUE FOLGE 2. — NOUVELLE SERIE 2.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
Französische Strasse 38/39.

PARIS
A. HERMANN.
Rue de la Sorbonne 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1888.

se présénte sous une forme géométrique: *Trouver un triangle rectangle tel que la bissectrice de l'un des angles aigus ait une longueur rationnelle.* Cette fois, il est évident que l'espèce seule est à déterminer. La question se résout d'ailleurs aisément si l'on se donne le triangle rectangle partiel intercepté par la bissectrice.

Dans les questions VI, 21, 22, DIOPHANTE suit une marche inverse de celle que nous avons vue pour la série précédente. Prenant pour inconnue q et supposant $p = q + 1$, il détermine subsidiairement $m = \frac{1}{p}$, de façon à rendre linéaires les expressions qu'il a à égaler à des puissances indéterminées.

Dans VI, 23, m est supposé égal à 1, et dès lors on ne se propose de déterminer que l'espèce, soit p, en prenant l'unité pour q. Sous ces réserves, le problème peut être considéré comme algébrique; il se ramène à deux équations, telles que

$$2u^2 + 2u = r^2$$
$$\frac{r^2(u+1)}{2} = s^3.$$

On résoudra la première en posant $r = ut$, et pour satisfaire à la seconde, il suffira que $2t$ soit cube.

Dans les problèmes VI, 19, 20, 24, 25, 26, DIOPHANTE ne se sert pas des relations (3) et part directement des côtés du triangle. Les deux derniers de ces problèmes peuvent encore être considérés comme algébriques, parce que leur énoncé conduit immédiatement à des hypothèses, à la vérité restrictives, mais qui donnent bien la solution naturelle des principales conditions. Dès lors, ces problèmes ne présentent plus de difficulté sérieuse.

Ahmed und sein Buch über die Proportionen.

Von MORITZ CANTOR in Heidelberg.

In dem Jahrgange 1887 dieser Zeitschrift hat H. MORITZ STEINSCHNEIDER von den Söhnen des MUSA BEN SCHAKIR gehandelt und auf verschiedene weniger allgemein bekannte Schriften dieser arabischen Mathematiker aufmerksam gemacht. Unter der Ordnungsziffer 7 ist[1] ein »*Buch der geometrischen Figur*« erwähnt, »deren Sache GALENUS erklärt habe«. H. STEINSCHNEIDER erinnert dabei, dass er seit 1865 in diesem GALENUS eine Verketzerung von MENELAUS erkannte. Er beruft sich dabei auf seine Abhandlung über *die mittleren Bücher der Araber*.[2] Ist aber, so lautet seine weitere Folgerung, wirklich von MENELAUS die Rede, dann ist die *geometrische Figur* keine andere als die *figura cata*, d. h. diejenige, an welcher der Satz des MENELAUS von den sechs Abschnitten der Dreiecksseiten, die durch eine Transversale geschnitten sind, erwiesen wird. Endlich bemerkt H. STEINSCHNEIDER, solcher Schriften über die *figura cata* (arab. *Schakl al Kattâ*) gebe es eine ganze Reihe z. B. eine von THABIT, aus welcher vielleicht das »Lemma in 18 modis« des THABIT stamme.

In der eben erwähnten rühmlichst bekannten Abhandlung über die mittleren Bücher führt H. STEINSCHNEIDER[3] noch eine Schrift *De proportione et proportionalitate* an, welche nach einer Pariser Handschrift den AMET *filius Moysis* zum Verfasser hat, während anderwärts AMET *filius Josephi* als solcher genannt ist, eine Persönlichkeit, welcher noch andere Schriften zugewiesen werden, und welche nicht vor Ende des IX. Jahrhunderts anzusetzen sei.[4]

Auf einem von H. STEINSCHNEIDER durchforschten Gebiete noch Ergänzendes aufzufinden, gehört zu den Seltenheiten. Hier indessen glauben wir auf eine sehr wichtige Stelle hinweisen zu können, auf welche noch nie aufmerksam gemacht worden zu sein scheint.[5] Sie befindet sich in dem *Liber Abbaci* des LEONARDO PISANO, den wir in der 1857 durch Fürst BONCOMPAGNI in Rom veranstalteten Ausgabe vor uns haben. Dort heisst es im IX. Abschnitte des Werkes:[6]

> Est enim hec talis propositio proportionum ea que ostenditur in figura cata, scilicet sectoris, per quam Tholomeus docuit in almagesti reperire demonstrationem circu-

lorum a circulo recto, et multa alia; et Ametus filius p
decem et octo combinationes ex ea in libro, quen
proportionibus composuit.

Von den mannigfaltigen Ergebnissen, die aus dieser S
zu folgern sind, heben wir Einzelnes hervor. *Erstens* ist i
das bisher älteste Vorkommen des latinisirten »*figura cata*»
gefunden, wie wir schon früher[7] gesagt haben. *Zweiten*
statt auf MENELAUS auf PTOLOMÄUS verwiesen. Daraus f
dass LEONARDO den Satz von den sechs Grössen aus
Almageste kennen lernte, wo in der That der eigentliche
finder nicht genannt ist, und wo von diesem Satze aus,
zwar angewandt beim rechtwinkligen Dreiecke, die ganze s
rische Trigonometrie entwickelt wird. *Drittens* ist AMET
Sohn als weiterer Bearbeiter genannt, der in seinem Buche
die Proportionen 18 Anordnungen kennen lehrte. Wer
dieser AMET *filius?* War es der zweite unter den sogenan
drei Brüdern, und ist der *Liber de proportionibus* dieselbe Sc
welche H. STEINSCHNEIDER *Buch der geometrischen Figur* n
oder ist ein AMET Sohn des Josephus gemeint? Mehr als
Fragen aufzuwerfen sind wir nicht im Stande. Dagegen kö
wir über die 18 Anordnungen volle Rechenschaft geben.

Die *Figura cata,* sagten wir oben, sei der Dreieckssat
MENELAUS. Wir sprechen ihn gegenwärtig so aus, dass
Produkte von je drei Abschnitten gleichwertig ausfallen.
lich hätten auch die Griechen ihn aussprechen können, d
der Körperinhalt eines Parallelepipedons, gemessen durch
Produkt der Masszahlen seiner 3 Dimensionen, eine geometr
Grundlage rechnerischer Betrachtung bot. Aber sie spra
ihn nicht so aus. Sie setzten nicht:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$$

sondern sie sagten, es verhalte sich $a_1 : b_1 = b_2 b_3 : a_2 a_3$,
zwar in dem Wortlaute: a_1 steht zu b_1 in dem zusam
gesetzten Verhältnisse von b_2 zu a_2 und b_3 zu a_3. So h
es z. B. schon bei ARCHIMED:[8] *ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τ*
συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ἡ Ε πρὸς
Ζ. Aus dem geometrischen Satze wurde aber, sei es s
bei den Griechen, sei es, wie es uns wahrscheinlicher ist
den Arabern ein Rechnungssatz: die *figura cata* ging übe
die *regula cata,* in die Regel aus 5 Zahlengrössen durch
sammengesetzte Proportion eine 6. Zahl abzuleiten. So is
Liber Abbaci erst an bestimmten Zahlen, dann[9] an Buchst
gezeigt, dass wenn *a* Pferde *b* Gerste in *c* Tagen fressen

unter gleichen Umständen d Pferde e Gerste in f Tagen, also dann ein erstes Produkt $a \cdot e \cdot c$ einem Zweiten $d \cdot b \cdot f$ gleich sein müsse. Daher stehe ein Faktor e des ersten Produktes zu einem Faktor f des zweiten Produktes in dem zusammengesetzten Verhältnisse von $b:a$ und $d:c$ oder in dem zusammengesetzten Verhältnisse von $b:c$ und $d:a$. D. h. es gibt 2 Combinationen des Ansatzes, welche mit $e:f$ beginnen. Ebenso viele beginnen mit $e:d$, ebenso viele mit $e:b$, im Ganzen also gibt es 3 mal 2 oder 6 mit e beginnende Combinationen. Nun können wie e auch c oder a den Anfang des Ansatzes bilden, also gibt es in Allem 3 mal 3 mal 2 oder 18 Combinationen. So die Auseinandersetzung LEONARDO's, deren Wortlaut wir wenig verändert haben, und deren Inhalt wir Nichts hinzuzufügen brauchen.

[1] Bibliotheca Mathematica 1887, p. 73.
[2] Zeitschrift für Mathematik und Physik **10**, 1865, p. 495.
[3] Ebenda, p. 490.
[4] Ebenda, p. 493, Z. 8 v. u.
[5] J. GIESING, *Leben und Schriften Leonardos da Pisa* (Döbeln 1886) p. XXIII nennt zwar das Buch des AMETUS *filius* als eine Quelle LEONARDO's, aber ohne Eingehen in die Sache selbst.
[6] Scritti di LEONARDO PISANO pubblicati da B. BONCOMPAGNI. Vol. 1 (1857), p. 119.
[7] Siehe Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885; Hist.-liter. Abth. p. 127.
[8] ARCHIMEDIS *Opera omnia cum commentariis* EUTOCII *rec.* J. L. HEIBERG. Vol. 1 (1880), p. 212 lin. 19—21.
[9] Scritti di LEONARDO PISANO etc. Vol. 1, p. 132 lin. 23—p. 133 lin. 7 v. u.

Sur une traduction néerlandaise de la méthode de pers[p]tive de Girard Desargues et sur les »Leçons de ténèbr[es«]

Par C. Le Paige à Liége.

Les nombreuses notices consacrées à G. Desargues [ne] mentionnent pas, du moins que je sache, une publication [qui] a pu répandre, chez les nations de langue germanique, les [doc]trines du grand géomètre de Lyon sur la perspective et m[ême] quelques uns de ses théorèmes de géométrie pure: je veux pa[rler] d'une traduction néerlandaise de la méthode de perspec[tive] éditée par Abr. Bosse.

Voici le titre complet de cette traduction[1]:

Algemeene Manier || van de | Hr Desargues, || *de practijck der* || Perspectiven, | *gelijck tot die der* || mi[ddel]kunde, || met de kleyne Voet-maat, || mitsgaders || *plaatsen, en proportien van de stercke* || *en flaauwe rakin[gen]* *of kleuren.* || By-een-gevoeght door || Abraham Bosse, || *uyt het Frans vertaelt van* || J. Bara. || t'Amsterdam By *Dancker Danckertsz.* Woonende in de kalver-straat, de Danckbaarheyt. M. DC. LXIV.

In-8°, 4 feuillets liminaires, 288 pages, frontispice grav[é], 156 planches.

Dans sa préface, l'éditeur Dancker Danckertz (né à vers en 1600) s'exprime ainsi: »Lorsque j'eus vu la méth[ode] magistrale, nouvelle et générale que Mr Desargues (comme phénix dans la perspective) a proposée pour l'avancement [de] cette science, je me suis cru obligé de n'épargner ni frai[s] peines pour faire connaître aux Néerlandais ces excellentes rè[gles] de perspective telles qu'elles ont été réunies par Abr. Bo[sse] dont la rédaction a été approuvée par Mr Desargues lui-m[ême] comme il ressort de plusieurs de ses écrits et de la *reconn[ais]sance* écrite et signée de sa main.

Il s'agit, comme on le voit, de l'ouvrage suivant: »*Man[ière] universelle de Mr* Desargues *pour pratiquer la perspective [par] petit pied comme le géométral*« publié par Abr. Bosse [en] 1647 et qui contient, ainsi qu'on le sait, outre la perspec[tive] rédigée par Bosse, une réimpression de la perspective de [Des]argues publiée en 1636, un petit écrit de 1643 et les célè[bres] théorèmes sur les figures homologiques.

D. Danckertz publia, en même temps, la traduction [d'un] autre écrit de Bosse, qui n'est que la suite du premier:

ALGEMEEN MIDDEL | tot de Practijck der | DOORZIGHT-KUNDE | op Tafereelen, | *of* | Regel-lose buytengedaenten. | *Mitsgaders* | Eenige bezonderheden, nopende dees kunst, | en die der Plaet-snijdingh. | t'AMSTERDAM | *By Dancker Danckertsz.* Kunst-verkoper in de kalverstraat. | Anno 1664.
In 8°, 64 pages, frontispice gravé, 32 planches.

Dans ces deux ouvrages les planches, ainsi que les frontispices, sont la reproduction renversée des gravures de BOSSE, c'est-à-dire que le seul changement, sauf la beauté de la gravure, consiste en ce que la droite des planches de BOSSE se trouve à gauche.

La tentative de D. DANCKERTZ fut couronnée de succès, car vingt ans plus tard, en 1686, son fils JOSSE DANCKERTZ fit faire un seconde édition de ces mêmes ouvrages.[2]

Cette seconde édition n'est pas, comme il arrivait souvent, un simple rajeunissement de la première; c'est une impression entièrement nouvelle: les planches seules sont les mêmes.

Le premier écrit, dans cette édition, contient 3 feuillets liminaires, 154 pages, le frontispice et 156 planches, le second 40 pages, le frontispice et 32 planches.

Je ne reproduis pas les titres pour ne pas allonger cette notice. CHR. WOLF, dans son cours de mathématiques, cite cette édition de 1686.[3]

WOLF cite également (ibid. cap. XI.) une traduction allemande de la coupe des pierres de DESARGUES (BOSSE) qui parut à Nuremberg en 1699 sous le titre de: »*Kunstrichtige und Prob-mässige Zeichnung zum Steinhauen in der Baukunst*«, mais je n'ai pas rencontré cet ouvrage jusqu'à ce jour.

Peut-être serait-ce le lieu de signaler une autre particularité qui a échappé également aux biographes de DESARGUES. Il s'agit des *Leçons de ténèbres* du grand géomètre. Mr POUDRA reproduit,[4] avec raison, un assez long passage de *l'Optique de portraiture* de G. HURET (1670), mais il a probablement ignoré quelques parties fort intéressantes de la correspondance de LEIBNIZ avec OLDENBURG.

Dans plusieurs lettres, le savant secrétaire de la Société royale de Londres entretient LEIBNIZ de l'écrit dû à DESARGUES.

Dans une première lettre, du 6 avril 1673, il nous apprend[5] que les *Leçons de ténèbres* ont été imprimées à cinquante exemplaires; mais, ce qui est plus important, il fait connaître, d'après COLLINS, l'idée fondamentale de DESARGUES.

Si l'on projette, dit OLDENBURG, du centre de la sphère sur un plan tangent à celle-ci, deux petits cercles de la sphère,

on obtient deux coniques; mais si l'on transporte le centre de projection au point diamétralement opposé au point de contact du plan tangent, on obtient, comme l'on sait, sur celui-ci, deux cercles.

On peut donc, dans certains cas, transformer par ce procédé, deux coniques en deux cercles.

DESARGUES, étendant cette idée heureuse, a-t-il connu le théorème général de PONCELET? OLDENBURG ne s'exprime pas de façon à le faire supposer, et nous ne retrouverons peut-être jamais un exemplaire de ces fameuses *Leçons de ténèbres*.

A ce sujet, la lettre d'OLDENBURG contient une indication qui pourrait être utile: »Credimus interim haec ipsa [residua FERMATII] vel saltem nonnulla eorum nec non Tractatum Dni. DES ARGUES, ut et Ms. clarissi. ROBERVALLII de Locis planis, solidis, linearibus et ad superficiem, jam esse diuque fuisse in Anglia, penes virum quendam doctum, qui scripta illa hactenus premit, quique Tractatum molitur de Canone mathematico, sive tabulam sinuum, qua ostendatur, quam difficilia Problemata et Æquationes solvi illius beneficio possint.»

Le 12 avril 1675 et le 24 juin de la même année, OLDENBURG parle encore à LEIBNIZ des écrits de DESARGUES, mais ce qu'il en dit n'offre point d'intérêt.[6]

[1] Comparez BIERENS DE HAAN: *Bibliographie néerlandaise* (Rome 1883, in-4°) p. 37 où, par une faute d'impression corrigée dans les Errata, l'année de la publication est 1694 au lieu de 1664.

[2] Cette édition n'est pas indiquée par BIERENS DE HAAN, l. c. p. 37.

[3] *De scriptis mathematicis,* Cap. VII. §. 15. Inter scriptores Perspectivae omnium maxime commendatur DESARGUES, cuius methodum universalem exercendi Perspectivam gallice conscriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. BARA. Prodiit Amstelod. 1686. in 8.

[4] Oeuvres de DESARGUES publiées par POUDRA (Paris 1864) t. II. p. 210 et ss.

[5] LEIBNIZENS math. Schriften herausgegeben von C. I. GERHARDT. Bd. I (Berlin 1849), p. 40—41.

[6] Ibid. pp. 65 et 78.

Über das Wort Almanach.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

1. B. Boncompagni hat unter der Überschrift »Almanacco« im Giornale degli Eruditi etc. 3, 1884, p. 208 ff. (Sonderabdruck p. 1—19) mit seiner bekannten Gründlichkeit und Belesenheit die Anwendung und den Ursprung obiger Bezeichnung behandelt. Er kommt zu dem Resultate, dass das Wort wahrscheinlich durch den Titel der astronomischen Tabellen des Prophatius Judaeus (1300) in Gebrauch gekommen sei. Was den Ursprung des Wortes betrifft, so befriedigen alle angeführten Erklärungen nicht vollständig. Wenn das europäische Wort nicht über das XIII. Jahrhundert hinauf nachzuweisen ist, so darf man, schon wegen des Anfangs *Al* (arab. Artikel), annehmen, dass es zunächst dem *Arabischen* entlehnt sei. In der That werden 2 Tafeln des ibn al-Banna zur Auffindung des Wochentages für den arabischen Jahresanfang bezeichnet als *al-Manâkh* in einem arabischen Manuscr. des Brit. Museum (p. 445 n. XI); aber dieses ms. ist 1807 geschrieben und kann hier das Wort europäischen Ursprungs sein. Eine arabische Form »Manaʿh« für Geschenk ist noch nicht nachgewiesen. Der »Schenker« heisst aber arabisch nicht »al-Manaʿh«, wie Golius u. Freytag (*Lexicon arabicum* IV, 213) angeben, sondern »al-Mannaʿh«, wie Dozy im Suppl. bemerkt. Schenker ist aber kein Titel für die Tafeln. Einen Stamm »Manakh« kennen die arabischen Lexica nicht. Es bleibt also das Problem der Worterklärung im Arabischen vorläufig noch ungelöst. Im Neuhebraeischen wird »Manah« מנח (Geschenk) für *Argument* einer Sternbewegung gebraucht; doch ist daraus nicht das europäische *Al*manach geworden. Das lässt sich auch beweisen durch die variirende Schreibung des Wortes Almanach in hebraeischen Quellen, die ebenfalls, meines Wissens, nicht über Prophatius (Jakob b. Machir) hinaufgehen. Meistens wird es mit *Kof* (ק) und Alef für den langen Vocal geschrieben.[1]

Auf arabischen Ursprung mit wohlbekannter Bedeutung führt ein Synonymon von Almanach, nämlich *Tacuin*, aus dem arabischen »Takwim« (»Taqwim« nach Schreibart der Orientalisten), d. h. *Tabelle*. Dieses Wort ist bekannt aus dem Titel zweier ins Lateinische übersetzten medicinischen Schriften, welcher sogar auf eine Schrift über *Schachspiel* übertragen worden.[2] Dass

man den Almanach am Ende des XIV. Jahrh. «Tacuino» (italienische Form) benannt habe, bemerkt LIBRI.[1] So finden wir Tacuino, oder Tavole delle lunazioni[2]; PAOLO DAGOMERI verfasste einen Taccuino. Tacuin und Almanak erscheinen nebeneinander in der hebraeischen Bearbeitung der Tafeln des [illegible] BLANCHINUS (BIANCHINO, Mitte XV. Jahrh.).[3] Tacuin erscheint neben Almanach im Titel des Werkes von ABR. ZACUT [illegible] In Cod. lat. Vat. [illegible] sec. XIV f. 71 v. lin. [illegible] liest man «[illegible] almanach i. e. tacuinum».[4]

Das Wort Almanach ist manchmal von einer sachlichen [illegible] begleitet [illegible] heisst es bei ORONCE FINÉ:[5] Almanach [illegible] anderswo: «Almanach [illegible] planetarum».[6]

[illegible] europaischen [illegible] Uebersetzungen aus [illegible] Frage, die nur durch posi[illegible] [illegible] hat ein [illegible] hinaus [illegible] PICO DE [illegible] Jahrhundert alte[illegible] [illegible] Namen [illegible] Arabe[illegible] [illegible] BONATUS konn[illegible] [illegible] BONATI [illegible] angieb[illegible] [illegible] Es giebt abe[illegible] [illegible] Untersuchung [illegible] FIRMATIUS [illegible] Es sind bis fast nur [illegible] sind, als ihr In[illegible] [illegible] Ich [illegible] und die [illegible] verthlos sein [illegible] Wenn das Datum [illegible] bearbeiteten Ta[illegible] [illegible] des [illegible] angeführt im XIII. [illegible] Ephemeriden [illegible]

[illegible]

2. *Almanach* (tab. ARZACHEL) 1231.
   Ms. Cambr. Univers. 1935[13]. S. *Études sur Zarkali, Appendice.*
3. *Almanak solis pro 4 annis scil. 1341—44 per* W. REED *a. Chr. 1337 calculata et scripta* (tit. in tab. Content.).
   Ms. Digby 176[23]; MACKAY p. 189, im Index 282 sub READE fehlt noch 57[5], wo dasselbe als »tabulae» vorkommt; cf. 1336 ff. ms. Cajo-Gonv. 110[8]; SMITH p. 49. Über REEDE s. meine *Études sur Zarkali* p. 77 (3).
4. (*Regulae*) *ad faciendum unum Almenak per tabulas* REDE *episc. Cicistrensis.*
   Ms. Digby 72[1]; MACRAY p. 79.
5. JO. DE LINERIIS, *Canones super Almanach planetarum.*
   Ms. Cajo-Gonv. 110; s. meine Note: *Intorno a* JOANNES DE LINERIIS p. 1.
6. *Jo. Daneco* (DANCK) *Saxo, almanach . . . annis 1336—80 accomadatum.*
   Ms. Amplon. Fol. 387; *Cat.* von SCHUM (1887) S. 273. S. *Appendice* zu *Études sur Zarkali.*
7. JOHANNIS DE ALEMANNIA [DE SPIRA] *Almanak juxta . . . tab. Alfonsi pro a. 1349—80.*
   M. Digby 176[26]; s. meine *Notice sur les tables* etc. p. 14 u. *Intorno a* JO. DE LINERIIS p. 8 (eine Stelle aus GASSENDI).
8. »*Albion est geometr. instrum. Almanac autem arismetr.*»
   Ms. Ashmol. 1507 n. 1796[29]. Albion ist 1326 v. RICH. V. WALLINGFORD verfasst.
9. *Tabulae* BATTECOM (WILH. BATECOMB) . . . *dicitur Almonake perpetuum* (enthält Berechnung für 1401; ist also älter) u. *Canon Almanak predicti* etc. für Oxford.
   Ms. Coll. Mar. Magd. 182[1—2]; COXE p. 83.
10. *Almanak* [scil. nomina] *stellarum secundum* SIMONEM SUTHRAY.
   Ms. Digby 98[8].
11. *Tract. de componendo Almanach cum tabulis,*
   Ms. Aula Mar. Magd. 4[9]; *Cat. mss. Angl.* II, 84 n. 2515; COXE n. 2[4], f. 58—63.
12. *De comp. Almonack.*
   Ms. lat. München 10661 f. 84; *Catal.* IV: 2, p. 555.
13. *Ars faciendi Almanach.*
   Ms. Laud (olim 1487) 644[12]; bei COXE p. 466.
14. *Ars fac. Almanach.*
   Cat. ms. Angl. I, 114 n. 2177; Bodl. C. 20[2*].
15. *Almanach Saturni* etc.
   Ms. Digby 38[3] f. 5 ff.; die darauf folgenden Tabellen sind für 1300—23.
16. *Almanach perpetuum ad inveniendum vera loca planetarum in signis* »translatum de *Arabico*» [lies de *hebr.*?].
   Ms. Digby 167[5]; MACRAY p. 171, lässt weg »pro a. 1396», was im *Cat. ms. Angl.* I, 85 n. 1768 (wo *Almanacke*) angegeben ist;

[illegible]

[illegible] mit [illegible] (acu [illegible] einer Note eine Taf [illegible] — [illegible] »Farkas [illegible] ANDAI [illegible] der Almanach hinzugefügt wurde

[illegible] dem Almanach des [illegible] = PHILIPPHATUS [illegible] München 158 [illegible] Almanach in seine [illegible] Übersetzung der Sonnen von [illegible] Luc [illegible] Kin [illegible] verweisen. [illegible] Ele [illegible] Tafeln über der Almanach [illegible] in der [illegible] die Tafeln und d [illegible] Tafeln des Almana [illegible] dem »Alm [illegible] metrische [illegible] Almanach [illegible]

[illegible]

[illegible]

Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans son mémoire: *Svenska matematikens historia*, F. W. HULTMAN a publié[1] un petit traité intitulé *Regule de tri*. Ce traité, qui a été tiré d'un manuscrit de la bibliothèque royale de Stockholm, composé vers l'an 1515 à Rome par le savant suédois PEDER MÅNSSON (mort en 1534), commence:

> Arismetrice regulam quandam invenere generalissimam ad quemcumque ignotum per aliquos notos inveniendum numerum quam nonnulli regulam auream dixere: Itali vero regulam de tri.

et finit: Pone ad regulam sic. 24 homines habuerunt unum modium: quot modios 677 homines, et reperies in quociente 28 modios et cum hoc $^7/_{24}$ (!) unius modii. Et quamvis sint multe alie similes regule, tamen si istas sciveris locare debite sufficiunt. Amen.

Le manuscrit cité de PEDER MÅNSSON contient aussi deux autres traités mathématiques. Le premier, intitulé *Instrumentum ...lidis*, commence:

> Fiat quadratum rectangulum scilicet *abcd* et super angulos *ab* duas pone pinnulas perforatas ut per ipsas terminum rei mensurande possis conspicere, et fac regulam in quantitate dyametri prædicti quadrati aut longiorem que vocetur *de*.

et finit: Insuper et altitudinem turris, value aut fenestre et alterius rei investigare si placet: pro exemplo.

Le second traité, qui porte le titre *Baculus Jacob*, commence: Accipiatur baculus cujusvis longitudinis quem in partes equales dividas; circa sectiones rimas aut foramina fabrices. Dehinc baculum parvum mensure unius partis divisionis predicte facias et paratus est baculus.

et finit: Sic simili modo latitudinem investigabis si baculum ita vertas ut extremitates baculi parvi dextrorsum et sinistrorsum protendantur.

HULTMAN a indiqué expressément[2] que PEDER MÅNSSON est l'auteur du traité: *Regule de tri*, et, évidemment, il suppose tacitement qu'il en est de même des deux autres traités.

De mon côté, j'ai estimé toujours[3] que PEDER MÅNSSON n'a que copié ces trois traités, d'autant plus que le traité *Regule de tri* contient des exemples où un chiffre dans le calcul est fautif bien que le résultat soit exact, ce qui semble prouver que PEDER MÅNSSON n'a pas fait les calculs lui-même. Mais comme je ne pouvais pas retrouver les sources d'où les traités auraient été tirés, je me permis d'insérer dans la Bibliotheca Mathematica 1885, col. 48 une demande sur ce point.[4] Jusqu'à ce jour je n'y ai reçu aucune réponse; cependant, ayant eu occasion d'examiner la *Margarita philosophica* de REISCH[5] j'ai trouvé que tous les trois traités en sont extraits, le premier du lib. IV, tract. 5, cap. 6, et les deux autres du lib. VI, tract. 2, cap. 4. Les changements peu nombreux qu'a faits PEDER MÅNSSON, ne se rapportent qu'à la rédaction. Il a donné au second traité le titre *Instrumentum euclidis*, sans doute parce que REISCH dit que cet instrument peut être construit à l'aide d'une proposition d'EUCLIDE. Dans ce traité, il y a aussi un passage qui semble ajouté par PEDER MÅNSSON. D'après REISCH, on doit inscrire au carré géométrique »limbum quadrantis in 90 gradus divisum», mais avant de copier ces mots, PEDER MÅNSSON enseigne de procéder ainsi: »inscribatur limbus incipiendo ab angulo *c* usque ad *a* de quinque in quinque usque ad 90 inclusive», après quoi il remarque: »sed in hoc exemplo numeri non habent locum praeter parvitatem hujus exempli»; on voit de suite que ce procédé est identique avec celui de REISCH.

Les trois traités dont il a été question, doivent donc être revendiqués à REISCH.

[1] HULTMAN, *Svenska aritmetikens historia*. Tidskrift för matematik och fysik 3, 1870, p. 245—249.

[2] HULTMAN, *Svenska aritmetikens historia*. Tidskrift för matematik och fysik 5, 1874, p. 4.

[3] Voir ENESTRÖM, *Anteckningar om matematikern Petrus de Dacia och hans skrifter*. Öfversigt af [svenska vetenskapsakademiens förhandl. 1885, n:o 3, p. 16.

[4] Comparez aussi GÜNTHER, *Die Erfindung des baculus geometricus*. Bibliotheca Mathematica 1885, col. 137, et GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter* (Berlin 1887), p. 167, 247—248.

[5] D'après GRÄSSE, *Trésor des livres rares*. T. 6 (1865), p. 73, la première edition de la *Margarita philosophica* a paru en 1496. Je n'ai pas eu recours à cette édition.

Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt?

Von EMIL WOHLWILL in Hamburg.

Die umfassenderen Veröffentlichungen aus LEONARDO DA VINCI's handschriftlichem Nachlass, die wir Herrn CHARLES RAVAISSON-MOLLIEN verdanken, geben in nicht geringerem Masse als die früher bekanntgewordenen ausgewählten Fragmente Veranlassung, vor Allem in den Betrachtungen aus dem Bereich der Mechanik die geniale Eigenart des grossen Forschers zu bewundern; gleichzeitig aber gestatten diese Reproductionen ohne Auswahl und ohne Auslassung ungleich besser als jene Blumenlesen, in den Gedanken des Meisters die Beziehungen zum Wissen und Denken der Vorgänger und Zeitgenossen wiederzufinden und dadurch schärfer, als es bisher möglich gewesen ist, seine geschichtliche Stellung zu bestimmen, klarzustellen, inwieweit er in die Entwicklung der Wissenschaft fördernd eingegriffen oder etwa — wie gewöhnlich angenommen wird — Fortschritte in der Erkenntniss der Principien vorweggenommen hat, die dem folgenden Zeitalter von Neuem gewonnen werden mussten.

Unter den Fragen, die auf Grund des vollständigeren Materials erneuter Erörterung unterzogen werden müssen, ist diejenige nach dem Verhältniss LEONARDO's zum Beharrungsgesetz eine der wichtigsten. Dass L. D. V. in der Erkenntniss dieses Grundgesetzes der Dynamik GALILEI zuvorgekommen sei, durfte nach den Mittheilungen VENTURI's als wahrscheinlich angesehen werden, wenngleich eine von ihm gegebene klare Formulirung der bedeutungsvollen Lehre nirgends angeführt wird. Nun sind aber in dem Abdruck des mit *A* bezeichneten Bandes der Pariser Sammlung zahlreiche Aussprüche LEONARDO's bekannt geworden, die sich mit dieser Auffassung nicht in Einklang bringen lassen. Besteht in Wahrheit ein Widerspruch zwischen den verschiedenartigen Äusserungen? Und wenn dies der Fall wäre — entsprechen dieselben vielleicht verschiedenen Entwicklungsstufen ähnlicher Art, wie sie in GALILEI's Forschung sich nachweisen lassen? Um darüber mit einiger Wahrscheinlichkeit zu entscheiden, bedarf es vor Allem des Rückblicks auf die Ansichten, zu denen man in Betreff des Beharrens der Bewegung im 15ten Jahrhundert gelangt war.

Ich habe an anderer Stelle[1] gezeigt, dass der Annahme des ARISTOTELES, nach der die mitgetheilte Bewegung durch eine eigenthümliche vermittelnde Wirkung des Mediums erhalten wird, jedenfalls vor der Periode LEONARDO DA VINCI's die Lehre von der *vis impressa* und dem *impetus impressus* gegenübergestellt wurde. Nach dieser dauert die mitgetheilte Bewegung fort, weil der Bewegungsantrieb auf den bewegten Körper selbst übertragen, ihm »eingeprägt» wird; die Dauer der Bewegung entspricht der Grösse des übertragenen Antriebs und der bewegenden Kraft; im Wirken verzehrt sich der Antrieb, die mitgetheilte Bewegung muss daher, auch abgesehen von Widerständen, naturgemäss sich verlangsamen und endlich aufhören. Diese Ansicht findet sich in eigenthümlicher Formulirung schon bei NICOLAUS VON CUSA (1401—64), es ist jedoch nicht unwahrscheinlich, dass sie noch älteren Ursprungs ist. Anderseits liegt sie ausgesprochenermassen noch bei GALILEI's ältesten Forschungen zur Bewegungslehre zur Grunde.

In der Anwendung auf die Erklärung der Bewegungserscheinungen kommt diese Lehre von der allmälig abnehmenden *vis impressa* der Deutung auf Grund des Beharrungsgesetzes vielfach so nahe, dass man — wenn nur die unterscheidenden Punkte nicht zur Sprache kommen — Indicien für die Kenntniss des GALILEI'schen Gesetzes auch bei solchen Forschern zu finden glauben kann, die durch anderweitige Äusserungen beweisen, dass sie über die Vorstufe nicht hinausgekommen sind. Als ein merkwürdiges Beispiel derartiger Erklärungen habe ich die wenig beachtete Erörterung hervorgehoben, in der GIORDANO BRUNO zur Widerlegung des bekannten Arguments gegen die Bewegung der Erde die Fallbewegung auf bewegten Schiffen mit derjenigen auf ruhendem Ufer vergleicht.[2] Ich glaube gezeigt zu haben, dass auch zwei von VENTURI mitgetheilte Erörterungen L. DA VINCI's nur so lange als Ableitungen aus dem Beharrungsgesetz aufgefasst werden mussten, als man die Tragweite jener älteren Lehre unberücksichtigt liess.[3] Unter dem gleichen Gesichtspunkt betrachtet, bietet auch der vermeintliche Widerspruch der Äusserungen kein schwer zu lösendes Problem.[4]

Beachtung verdient vor Allem, dass L. D. V. — vielleicht als Einziger vor DESCARTES — das Beharren des Zustands als ein ganz allgemein in den Naturerscheinungen zu Tage tretendes Princip bezeichnet. »Naturgemäss», heisst es in dem »Tractat von der Malerei», »verlangt ein jedes Ding sich in seinem Zustande zu erhalten» (*mantenersi in suo essere*). Der gleiche Gedanke findet sich ein zweites Mal in ungefähr denselben Worten

in der Pariser Handschrift *A*. Wie die Formulirung, so bekundet auch die weitere Verwendung dieser Sätze, dass LEONARDO denselben die Bedeutung eines physikalischen Axioms zuerkannt hat. Es kann also ein Zweifel darüber nicht bestehen, dass er sehr wohl gekannt hat, was man als Trägheit der Materie bezeichnet. Zu erörtern bleibt nur, ob er als Consequenz seines allgemeinen Princips bereits die »unzerstörbare Erhaltung eines jeden Geschwindigkeitsgrades« begriffen hat.

Im *Trattato della pittura* legt L. den allgemeinen Satz seinen Anweisungen zur Herstellung eines natürlich erscheinenden Faltenwurfs zu Grunde. »Der Stoff des Gewandes«, führt er aus, »hat gleiche Dichte und Dicke auf beiden Seiten, er hat deshalb das Verlangen, in ebener Lage zu bleiben; wird er daher durch eine Biegung oder Falte genöthigt, die ebene Lage zu verlassen, so folgt er der Natur der Kraft da, wo er mehr gezwungen ist, bei dem Theil aber, der dem Zwange ferner liegt, wirst du finden, dass er sich mehr seiner ersten Natur nähert, nämlich der freien Ausbreitung«.[5]

Die Anwendung fasst hier, wie man sieht, nicht einen Widerstand gegen Zustandsänderung schlechthin ins Auge, sondern ein Widerstreben gegen den Zwang, der der inneren Natur des Stoffes angethan werden soll.

Offenbar überträgt L. D. V. auf diesen Fall, was er zumeist in Bezug auf die Zustände der Ruhe und der Bewegung beobachtet hat. Unter den Beobachtungen dieser Art verdient zunächst Hervorhebung ein Beispiel für die »Trägheit des ruhenden Körpers«, das zum Beweis für diese Eigenschaft noch heute in den Lehrbüchern der Physik erwähnt wird und, wie es scheint, zuerst von L. D. V. erörtert worden ist. »Der Schlag«, sagt L., »der einen Körper trifft, geht von dem erst gestossenen Theil nur auf denjenigen über, der sich hinter ihm befindet. Trifft der Schlag einen Körper, der sich unter einem andern befindet, so wird der getroffene mit dem Schlage sich fortbewegen und der über ihm liegende wird an die Stelle fallen, die der getroffene verlassen hat. Je schneller die Bewegung ist, durch die der Schlag verursacht wird, um so genauer wird der Gegenstand, der über dem getroffenen liegt, an die Stelle fallen, die dieser verlassen hat. Je langsamer die Bewegung ist, die den Schlag erzeugt, um so mehr wird der getroffene Gegenstand, indem er vor dem Schlage weicht, den über ihm liegenden mit sich nehmen; den Versuch kannst du mit den Steinen des Damenbretts machen.«[6]

Schon die von VENTURI mitgetheilten Betrachtungen er-

weisen, dass L. D. V. nicht geringere Aufmerksamheit dem Beharren der Bewegung zugewandt hat. In der That findet sich sein Princip in der bereits erwähnten zweiten Stelle an der Spitze einer Auseinandersetzung über Wirbelbewegung des Wassers. »Ganz allgemein«, sagt er hier, »verlangen alle Dinge sich in ihrer Natur zu erhalten.«[7] Daher sucht der Lauf des bewegten Wassers sich der Kraft seiner Ursache gemäss zu erhalten und wenn es Widerstand findet, beendet es die Länge des begonnenen Laufs durch kreisförmige und gewundene Bewegung.[8]

In näherer Erläuterung derselben Ansicht heisst es bald darauf: »jede Bewegung die durch Kraft hervorgerufen ist, muss einen Lauf vollenden je nach dem Verhältniss zwischen dem bewegten und dem bewegenden Gegenstande. Und wenn er Widerstand findet, wird er die Länge des ihm zukommenden Weges durch Kreisbewegung oder durch mannigfaltiges Springen oder Hüpfen in solcher Weise zurücklegen, dass wenn man Zeit und Weg berechnet, es eben so ist, als wenn der Lauf ohne irgend welchen Widerstand gewesen wäre.«[9]

Damit ist deutlich ausgesprochen, dass auch, wo keinerlei Widerstände vorhanden sind, die Bewegung nicht immer dauern, sondern aufhören wird, wenn der Weg zurückgelegt ist, dessen Länge durch das Verhältniss zwischen bewegender Kraft und bewegter Masse bestimmt ist. Als »Natur« des bewegten Körpers, in welcher derselbe sich zu erhalten strebt, ist demnach nicht die jeweilig erlangte Geschwindigkeit angesehen, sondern die Fähigkeit, denjenigen Weg zurückzulegen, der ihm nach der Einwirkung einer bestimmten bewegenden Kraft zukommt.

Der so definirte Begriff des zukommenden Weges (*debito viaggio*) gehört offenbar dem Gedankenkreis der vorbereitenden Lehre von der Einprägung der Bewegung und der Kraft an. Dieser Lehre scheinen auch im Übrigen LEONARDO's Anschauungen über das Beharren der Bewegung sich auf's nächste anzuschliessen.

Mit ARISTOTELES scheint er die Fernwirkung ausschliessen zu wollen, wenn er als Grundsatz ausspricht, dass »nichts Lebloses treiben oder ziehen kann, ohne das Getriebene zu begleiten«, aber weniger noch kann ihn das Medium als begleitender Treiber befriedigen; »solche Treiber«, sagt er, »können nur die Kraft oder das Gewicht sein.«[10] Auf die Frage: was ist Kraft? antwortet er: »ich verstehe darunter ein geistiges Vermögen, eine unsichtbare Macht, die vermittels einer hinzukommenden äusseren Gewalt durch Bewegung hervorgerufen und Körpern,

die sich ausserhalb ihrer natürlichen Gewohnheit befinden, mitgetheilt und eingeflösst wird.»[11]

Der Ausdruck *forza infusa*, dessen sich LEONARDO hier und bei andern Gelegenheiten bedient, ist durchaus gleichbedeutend mit *vis impressa*[12]; er redet ebenso von *moto infuso*; daneben kommen in gleichem Sinne die Wendungen *forza collocata nei corpi, moto applicato nei corpi* vor; das Wort *impressa* findet sich dagegen in der hier zunächst in Betracht kommenden Handschrift nur in der Anwendung auf die verwandte Erscheinung der durch Schlag zum Tönen gebrachten Glocke. »Der Schlag«, meint L. D. V., »lässt in der Glocke etwas ihm Ähnliches eingeprägt zurück, wie die Sonne im Auge oder der Geruch in der Luft.«[13] Es verdient Beachtung, dass hundert Jahre später GALILEI durch den Vergleich mit der Wirkung des Hammers auf die Glocke zu veranschaulichen versucht hat, wie dem geworfenen Körper die Bewegung eingeprägt wird, und dass unmittelbar neben diesem Vergleich sich der andere mit der Übertragung der Wärme auf den kalten Körper findet, dessen sich in verwandtem Sinne schon SIMPLICIUS, der Commentator des ARISTOTELES bedient.[14]

Dass nun auch die *forza infusa* von LEONARDO als eine naturgemäss abnehmende gedacht ist, machen schon die angeführten Stellen glaublich, nach denen der bestimmten Kraft unter allen Umständen eine bestimmte Länge des unter ihrer Einwirkung zurückgelegten Weges entspricht. Wie er in dieser Beziehung denkt, tritt nicht in allen seinen Ausführungen in gleicher Klarheit hervor, weil er bestimmter und klarer als alle seine Nachfolger bis auf GALILEI die Bewegungshindernisse, namentlich den Widerstand der Luft kennt und berücksichtigt und deshalb da, wo bei ihm vom Aufhören der Bewegung die Rede ist, zuweilen zweifelhaft erscheinen kann, ob er nicht eine derartige Gegenwirkung stillschweigend mit in Betracht zieht. Mehrfach spricht er aus, dass mit der Abnahme des Widerstandes die Dauer der Bewegung wächst.[15] Dennoch kann über seine wahre Meinung kein Zweifel bestehen. Er hat nicht allein nirgends ausdrücklich immerwährende Dauer der Bewegung für den Fall der Beseitigung aller Widerstände gelehrt,[16] sondern in den verschiedensten Wendungen die Dauer der durch Kraft erzeugten, d. h. der »gewaltsamen» Bewegung als eine beschränkte, das Aufhören der übertragenen Kraft und Bewegung als dem Wesen und Ursprung derselben entsprechend bezeichnet. »Ist die Kraft«, sagt er im Anschluss an die bereits citirte Stelle, »dasjenige, was ein Anderes bewegt, so begleitet auch sie, was

[illegible] verzehrt; [illegible] Stande [illegible] kein [illegible] die Ur- [illegible]

[illegible] bewegenden [illegible] sie [illegible] Und [illegible]

[illegible] Annahme der [illegible] Aus- [illegible] geschieden- [illegible] die [illegible] Er nimmt [illegible] grossten [illegible] die [illegible] treibt sie die [illegible] kreisförmige [illegible] Die so [illegible] eigen- [illegible] hervor,[1] [illegible] bis er, vom [illegible] werden und sich [illegible] Richtung kann [illegible] durch die ent- [illegible] je mehr er [illegible] und um so [illegible] Bewegung an- [illegible]

[illegible] dass der [illegible] verlassen wird,[2] [illegible] Verminderung des [illegible]

[illegible] vorliegenden [illegible] der Bewegung [illegible] einen principiellen Fortschritt [illegible] nicht zu bezeichnen.

Es wird kaum erforderlich [illegible] auszusprechen, dass bei dem grossen Umfang der [illegible] durchforschten Handschriften dies Resultat [illegible] ein vorläufiges, fernerer Bestätigung bedürftiges, betrachtet werden kann. Weitere Forschungen werden insbesondere darüber Aufschluss zu geben [illegible], ob in [illegible] Denken der Standpunkt des *motus*

die sich ausserhalb ihrer natürlichen Gewohnheit befinden, mitgetheilt und eingeflösst wird.»[11]

Der Ausdruck *forza infusa*, dessen sich LEONARDO hier und bei andern Gelegenheiten bedient, ist durchaus gleichbedeutend mit *vis impressa*[12]; er redet ebenso von *moto infuso*; daneben kommen in gleichem Sinne die Wendungen *forza collocata nei corpi, moto applicato nei corpi* vor; das Wort *impressa* findet sich dagegen in der hier zunächst in Betracht kommenden Handschrift nur in der Anwendung auf die verwandte Erscheinung der durch Schlag zum Tönen gebrachten Glocke. »Der Schlag«, meint L. D. V., »lässt in der Glocke etwas ihm Ähnliches eingeprägt zurück, wie die Sonne im Auge oder der Geruch in der Luft.»[13] Es verdient Beachtung, dass hundert Jahre später GALILEI durch den Vergleich mit der Wirkung des Hammers auf die Glocke zu veranschaulichen versucht hat, wie dem geworfenen Körper die Bewegung eingeprägt wird, und dass unmittelbar neben diesem Vergleich sich der andere mit der Übertragung der Wärme auf den kalten Körper findet, dessen sich in verwandtem Sinne schon SIMPLICIUS, der Commentator des ARISTOTELES bedient.[14]

Dass nun auch die *forza infusa* von LEONARDO als eine naturgemäss abnehmende gedacht ist, machen schon die angeführten Stellen glaublich, nach denen der bestimmten Kraft unter allen Umständen eine bestimmte Länge des unter ihrer Einwirkung zurückgelegten Weges entspricht. Wie er in dieser Beziehung denkt, tritt nicht in allen seinen Ausführungen in gleicher Klarheit hervor, weil er bestimmter und klarer als alle seine Nachfolger bis auf GALILEI die Bewegungshindernisse, namentlich den Widerstand der Luft kennt und berücksichtigt und deshalb da, wo bei ihm vom Aufhören der Bewegung die Rede ist, zuweilen zweifelhaft erscheinen kann, ob er nicht eine derartige Gegenwirkung stillschweigend mit in Betracht zieht. Mehrfach spricht er aus, dass mit der Abnahme des Widerstandes die Dauer der Bewegung wächst.[15] Dennoch kann über seine wahre Meinung kein Zweifel bestehen. Er hat nicht allein nirgends ausdrücklich immerwährende Dauer der Bewegung für den Fall der Beseitigung aller Widerstände gelehrt,[16] sondern in den verschiedensten Wendungen die Dauer der durch Kraft erzeugten, d. h. der »gewaltsamen» Bewegung als eine beschränkte, das Aufhören der übertragenen Kraft und Bewegung als dem Wesen und Ursprung derselben entsprechend bezeichnet. »Ist die Kraft», sagt er im Anschluss an die bereits citirte Stelle, »dasjenige, was ein Anderes bewegt, so begleitet auch sie, was

gestrichene Stelle auf Fol. 27 v° der Handschrift A, in der es von der durch Kraft hervorgerufenen Bewegung heisst: »sie endet nicht ohne Gewalt ihres Widerstandes«. Der klare Wortlaut vorhergehender und nachfolgender Sätze rechtfertigt die Annahme, dass L. auch hier nichts weiter habe sagen wollen als: sie endet nicht vor Vollendung des *debito viaggio*.

17 *Manuscrit A*, fol. 21 v°.

18 *Manuscrit A*, fol. 34 v°.

19 *Onde trovando esso peso men resistenza d'aria con piu velocità raddoppia suo corso.*

20 *Manuscrit A*, fol. 43 v°.

21 An anderer Stelle beschäftigt sich L. mit der Untersuchung, an welcher Stelle der gekrümmten Bahn die bewegende Ursache den bewegten Körper verlässt. Cf. RICHTER, l. c. II, p. 426 (nach der Handschrift I 2, 72 b.): *Domando in che parte del suo moto curvo la causa che move lasciera la cosa mossa e mobile.*

RECENSIONEN. — ANALYSES.

P. Riccardi. Saggio di una bibliografia Euclidea. Memoria. (Estratta dalle Memorie della reale accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, tomo 8_4.) Bologna 1887. 4°. 125 p.

Ce mémoire est composé de deux parties. Dans la première (p. 2—10), l'auteur donne une notice sur Euclide et sur ses travaux; la seconde est consacrée à la bibliographie Euclidienne proprement dite, et procède par ordre chronologique des écrits. A ces deux parties sera jointe plus tard une troisième, contenant des additions ainsi que des tables méthodiques et alphabétiques.

Parmi les ouvrages d'Euclide l'auteur fait mention en premier lieu des *Elementa* et il rend compte des principales éditions ou traductions de ce traité. En parlant des traductions, il indique que Boëtius a reproduit les énoncés des quatre premiers livres des *Elementa*, et qu'Atelhard de Bath traduisit Euclide de l'arabe en latin. Il aurait pu ajouter ici que, d'après ce qu'a prouvé M. Curtze, il y avait en Europe, vers l'an 1000, une traduction latine des énoncés des *Elementa* qui a été utilisée par Atelhard et Campano. M. Riccardi rapporte aussi que la traduction publiée en 1482 à Venise avec le commentaire de Campano a été attribuée par quelques auteurs à Atelhard, par d'autres auteurs à Campano, et il remarque que, d'après Libri, les plus récentes recherches confirment la première hypothèse. Il convient de faire observer que cette question a été beaucoup discutée aussi pendant ces derniers temps, en premier lieu par MM. Curtze et Weissenborn, dont le dernier l'a décidée en faveur de Campano.

Dans la bibliographie, qui contient plus de 1000 titres, sont indiqués non seulement les écrits que l'auteur a vus lui-même, mais aussi ceux mentionnés dans différents ouvrages bibliographiques. Comme les indications de ces ouvrages ont été parfois inexactes ou incomplètes, il y a ça et là dans le mémoire deux citations se rapportant à la même édition des *Elementa*. Ainsi, pour ce qui concerne les traductions publiées en Suède, il est certain que l'édition 1743[2] = l'édition 1741[2], l'éd. 1815[1] = l'éd. 1814[4], l'éd. 1842[4] = l'éd. 1841[1], l'éd. 1845[4] = l'éd. 1844[3]. Il est aussi très probable que l'éd. 1509[2] = l'éd. 1510[1]; en effet, M. Vastchenko-Zachartchenko, le seul auteur qui

ait signalé l'existence de l'éd. 1509[2], dit que cette édition est imprimée »Venetiis, in aedibus Joannis Tacuini» et qu'elle contient la traduction de ZAMBERTI, avec les commentaires de THÉON et l'ouvrage de HYPSICLES. Par conséquent, cette édition ne différerait de l'éd. 1510[1] que par une unité de l'année d'impression. De même, il semble que l'éd. 1533[1] = l'éd. 1534[1], l'éd. 1541[1] = l'éd. 1545[2], l'éd. 1606[1] = l'éd. 1608[2], l'éd. 1615[2] = l'éd. 1615[1], l'éd. 1618[1] = l'éd. 1618[2], etc.

Outre les éditions ou traductions des oeuvres d'EUCLIDE, M. RICCARDI a aussi signalé un certain nombre d'autres écrits qui se rattachent plus ou moins étroitement à EUCLIDE ou aux *Elementa*. A ce nombre pourrait être ajouté le mémoire de M. WEISSENBORN: *Die Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath nach zwei Handschriften der kgl. Bibliothek in Erfurt* (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **3**, 1880). Nous nous permettons de faire observer aussi que l'auteur de l'écrit 1869[1] est M. C. F. LINDMAN et que l'écrit 1879[6] n'est qu'un tirage à part de l'écrit 1880[1].

Par le mémoire présent, l'éminent auteur de la *Biblioteca matematica Italiana* a donné une nouvelle preuve de sa grande érudition. Mais il est évident qu'il lui a été absolument impossible d'avoir recours à tous les écrits nécessaires. Pour cette raison, au commencement de la partie bibliographique, il remarque lui-même:

> »Nel pubblicare questa seconda parte io confido nella cortesia dei cultori della bibliografia matematica per potere con numerore aggiunte da comprendersi nella terza parte, rendere meno incompleto che sia possibile questo Elenco, cui auguro venga solo apprezzato come una raccolta di materiali che possa servire per opera di maggior peso sulla storia della didattica delle scienze esatte, e sulla importanza scientifica delle principali esposizioni del capitale lavoro del nostro sommo geometra.»

Esperons que cet appel produira un bon effet, de manière que nous obtenions bientôt une bibliographie complète de toutes les éditions ou traductions des *Elementa*. Certainement, personne ne serait mieux en état d'achever une telle bibliographie que M. RICCARDI.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von — journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.
1887 : 4. — [Notice sur ce journal:] Das Archiv (Berlin) **1**, 1887—88, 39. — | *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **6**$_6$, 1888, 6 p. (A. Favaro.)

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.
20 (1887): 3—6.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
32 (1887) : 6. **33** (1888) : 1.

Baldi, B., Vita di Pitagora. Tratta dall' autografo ed annotata da E. Narducci.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 197—308.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden. 1887.
8°, VI + 466 p. — Tirage à part des Verslagen en Mededeelingen der Akademie van Wetenschappen (Amsterdam); Afd. Natuurkunde **14**$_2$, **16**$_2$, **18**$_2$, **19**$_2$, **20**$_2$; **1**$_3$, **2**$_3$.

Bonnel, J. F., Étude sur l'histoire de l'astronomie: La découverte du double mouvement de la terre. Tours 1887.
8°, 208 p.

Favaro, A., Documenti per la storia della Accademia dei Lincei nei manoscritti Galileiani della Biblioteca Nazionale di Firenze. Studi e ricerche.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 95—158.

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Esposizione e disegno. Firenze 1888.
8°, 57 p.

Harnack, A., Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Rede zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs, gehalten in der Aula des Polytechnikums zu Dresden. Dresden, Zahn & Jaensch 1887.
8°, 26 p. — [1 M.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 221—222. (Cantor.)

Hunrath, K., Zur Geschichte der annähernden Berechnung quadratischer Irrationalitäten.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 1—11.

Le Paige, C., Sur un théorème attribué à La Hire.
Biblioth. Mathem. 1887, 109.

Le Paige, C., [Note historique sur une méthode de construction des axes d'un ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.]
; Journ. de mathém. spéciales 1887. 4 p.

Rayet, G., Notes sur l'histoire de la photographie astronomique. (Suite et fin.)
Bullet. astronom. **4**, 1887, 262—272, 307—320, 344—360, 449—456.

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea.
| *Bologna*, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie $\mathbf{8}_4$, 1887, 399—523.

Schram, R., Theodor von Oppolzer. Necrolog.
Leipzig, Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **22**, 1887, 177—208. — Avec portrait.

Steinschneider, M., Geminus in arabischer, hebräischer und zweifacher lateinischer Übersetzung.
Biblioth. Mathem. 1887, 97—99.

Tannery, P., Études sur Diophante. III. Les problèmes algébriques indéterminés des livres II et III.
Biblioth. Mathem. 1887, 103—108.

Tannery, P., La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars 1887.
8°, VI + 188 p. — [5 fr.] — Ce volume est formé par la réunion des articles que l'auteur a publiés, depuis avril 1885, dans le Bulletin des sciences mathématiques. — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887, 273—276. (X.) — Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 27—31. (CANTOR.)

°**Thurion, J.**, Histoire de l'arithmétique. Bruxelles, Vromant 1885.
8°, VIII + 164 p.

°**Wappler**, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. (Programm des Gymnasium zu Zwickau.) Zwickau 1887.
4°, 32 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 156—157. (CANTOR.)

°**Weissenborn, H.**, An Moritz Steinschneider. Zugleich mein letztes Wort Max Curtze gegenüber. Eisenach 1887. 8°.

Weissenborn, H., Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Berlin, Mayer & Müller 1888.
8°, VI + (2) + 251 p. + 6 pl. — [9 M.]

Wittstein, A., Bemerkung zu einer Stelle in Almagest.
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 201—208.

Wohlwill, E., Die Prager Ausgabe des Nuncius Sidereus.
Biblioth. Mathem. 1887, 100—102.

Anfrage 18 [über das Wort »theca« oder »theta«].
Biblioth. Mathem. 1887, 120. (K. HUNRATH.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von M. HENOCH und E. LAMPE. Band 17 (1885). Berlin, Reimer 1887.

8°. — Les pages 1—40 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1885.

GÜNTHER, S., Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin 1887. 8°.

Deutsche Litteraturz. 8, 1887, 1653—1654. (M. CURTZE.) — Liter. Centralbl. 1888, 86—87. (—Z—R.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Inhalt und Namen-Verzeichniss der Bände **1—100**. 1826—1887. Berlin, Reimer 1887. 4°.

Biblioth. Mathem. 1887, 112—113. (G. VALENTIN.)

LORIA, G., Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica. Torino 1887. 4°.

Biblioth. Mathem. 1887, 110. (S. GÜNTHER.)

NARDUCCI, E., Vite inedite di matematici italiani scritte da Bernardino Baldi. (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886). Roma 1887. 4°.

Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 3_4, 1887, *2* : 582—583. (E. NARDUCCI.) — Das Archiv (Berlin) **1**, 1887—88, 39.

SUTER, H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. Zürich 1887. 4°.

Deutsche Litteraturz. 8, 1887, 1653—1654. (M. CURTZE.) — Liter. Centralbl. 1888, 86—87. (—Z—R.)

TODHUNTER, I., A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. Edited by K. PEARSON. Vol. I. Cambridge 1886. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 35. (B. NEBEL.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{12}_2$, 1888, 34—43.

VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO, M. E., Istorija matematiki. Istoritcheskij otcherk rasvitija geometrii. I. Kiew 1883. 8°.

Biblioth. Mathem. 1887, 114—116. (V. V. BOBYNIN.) — Fiziko-matem. naouki **3**, 1887, B : 169—175. (V. V. BOBYNIN.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1886. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 229—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1887, 117—120. — Fiziko-matemat. naouki **3**, 1887, B : 142—144, 176, 189—192. — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 225—228; **33**, 1888; Hist. Abth. 38—40. — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 159—196, 309—344.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

19. M. Günther a prouvé (voir Biblioth. Mathem. 1885, col. 137—140) que l'instrument appelé *baculus geometricus* a été connu déjà vers le milieu du 15:e siècle, et il a émis l'hypothèse que l'usage de cet instrument ait été enseigné à Wien par Johann von Gmünden. M. Weissenborn, qui, dans l'écrit: *Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters* (1888), a attribué l'instrument *quadratum geometricum* aux Arabes, semble supposer que le *baculus geometricus* ait été inventé aussi par les Arabes. Est-ce que la théorie de cet instrument a été traitée par quelque mathématicien arabe?

On sait que le *baculus geometricus* a été appelé *baculus Jacob* déjà par Th. Ruffi (vers l'an 1450) et après lui par plusieurs autres auteurs. Est-il probable que ce nom se rapporte à quelque mathématicien *juif* du moyen âge?

(G. Eneström).

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1888.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 2. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 2.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'Université de Gand.

Par P. MANSION à Gand.

Le cours d'histoire des mathématiques a été institué à l'Université de Gand, au début de l'année académique 1884—1885. Il est obligatoire, comme le cours de Méthodologie mathématique, pour les élèves de la Faculté des Sciences qui font partie de l'École normale (3:me année d'Études) et se destinent à l'enseignement dans les Athénées et Collèges. D'après les réglements, il ne comporte qu'une leçon d'une heure par semaine, pendant toute l'année, soit environ trente leçons; et encore, une partie de ce temp restreint doit être consacrée à l'esquisse du développement de la physique. Heureusement, en pratique, une grande liberté m'a été laissée dans l'organisation de ce cours nouveau. J'ai pu, d'une part, réduire considérablement la partie du cours relative à la physique et, d'autre part, donner à chaque leçon la durée habituelle des leçons de mathématiques à l'Université de Gand, c'est-à-dire une heure et demie.

Malgré le peu de temps dont je dispose, j'ai essayé, chaque année, depuis 1884, de faire un exposé d'ensemble de l'histoire des mathématiques, plutôt que d'approfondir, devant mon auditoire, un point ou l'autre du développement de la science. Outre que le cours devait être encyclopédique et non spécial, dans la pensée de l'autorité supérieure qui l'a établi, il m'a semblé impossible d'aborder utilement l'étude minutieuse de périodes particulières, parce que les élèves, au début du cours,

n'ont qu'une idée extrêmement vague de l'histoire des mathématiques.

J'ai cru néanmoins pouvoir accorder à l'étude de périodes déterminées un temps plus considérable qu'à celle de telle autre, afin de combiner, dans une certaine mesure, les avantages de l'enseignement encyclopédique et ceux de l'enseignement spécial.

En 1884—1885 et en 1885—1886, je me suis surtout attaché à l'histoire du développement progressif de la géométrie élémentaire, ce qui m'a conduit, en particulier, à cette conclusion (à laquelle sont d'ailleurs arrivés aussi, à très peu près, MM. Allman, Heiberg et P. Tannery): »Des treize livres des *Éléments* d'Euclide, celui qui est le plus son oeuvre personnelle, c'est le livre X, traitant des incommensurables.«

L'année suivante (et aussi cette année même), je me suis surtout occupé des origines de l'Analyse infinitésimale. La partie essentielle de mes recherches a paru, en appendice, dans mon *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* de l'Université de Gand (Paris, Gauthier-Villars, 1887) ou dans une brochure publiée à part. Voici deux des conclusions auxquelles j'ai été conduit par cette étude; elles diffèrent jusqu'à un certain point de celles qui ont cours dans l'histoire traditionnelle de la science: 1:o) Newton et Leibniz ont manié avec rigueur la méthode des *évanouissants* ou *in(dé)finiment petits*, parce qu'ils avaient pleine conscience, comme les géomètres antérieurs (Fermat, par exemple) et la plupart des géomètres postérieurs (Maclaurin) de l'identité essentielle de cette méthode avec celle d'Archimède. 2:o) Le point de départ des recherches qui leur firent trouver, l'un et l'autre, l'analyse infinitésimale, c'est la découverte de *l'identité du problème inverse des tangentes avec le problème des quadratures* et celle d'un algorithme régulier plus (Leibniz) ou moins (Newton) bon, pour traiter ces questions et le problème direct des tangentes.

Si le temps ne me fait défaut, j'espère étudier plus tard, comme point spécial, un sujet très différent des précédents, mais qui appartient plus aux mathématiques pures qu'il ne le paraît au premier abord, savoir: *les origines du système de* Copernic. Le grand astronome de Thorn avait une connaissance plus exacte de l'astronomie ancienne que ses successeurs, Kepler, par exemple, et j'ai lieu de croire que cette circonstance n'a pas été sans influence, et sur la forme et sur le fond même de sa pensée.

[redacted]

Mon expérience de l'enseignement de l'histoire des mathématiques, quelque courte qu'elle soit encore, m'a révélé deux lacunes à combler dans la littérature de cette partie de la science.

En premier lieu, il serait extrêmement désirable que l'on pût mettre entre les mains des élèves, un bon manuel, un compendium de l'étendue du livre de Hoefer, mais naturellement fait avec plus de soin que cette compilation. Ensuite, il serait presque aussi indispensable d'avoir une sorte de chrestomathie mathématique, contenant des extraits des mathématiciens de l'antiquité, du moyen âge, de la renaissance, et même, dans une certaine mesure, des temps modernes.

Le compendium ferait connaître rapidement aux élèves, en gros, et nécessairement sous une forme trop moderne, le développement de la science, dans ses grandes lignes. La chrestomathie, au contraire, mettrait l'étudiant en contact avec la pensée des géomètres du passé, sous sa forme concrète et servirait de correctif au compendium. Ces deux manuels permettraient d'ailleurs au professeur de réduire considérablement la partie encyclopédique du cours et ainsi, il pourrait plus facilement, chaque année, étudier d'une manière approfondie l'un ou l'autre point spécial de l'histoire de la science.

Note historique sur la règle de médiation.

Par P. MANSION à Gand.

M. P. TANNERY a signalé avec raison [1], l'importance de la *règle de médiation* employée par CHUQUET dans l'extraction des racines carrées et, en général, dans le calcul des valeurs approchées quelconques. Il a engagé en même temps ceux qui s'occupent d'histoire des mathématiques à chercher des exemples d'application de cette règle postérieurs à 1563, date de la dernière édition d'un livre d'ORTEGA.

Voici un exemple curieux de l'emploi de la règle de médiation cité par M. BIERENS DE HAAN. [2] Cet exemple est contenu dans le passage suivant d'un livre d'ADRIEN METIUS [3], le fils (1571—1635), où il explique comment son père ADRIEN ANTHONISZ (= fils d'Antoine) (1527—1607) a trouvé, vers 1589, la célèbre valeur approchée de π, $\frac{355}{113}$:

> Parens . . . in libello quem conscripsit adversus Quadraturam Circuli SIMONIS A QUERCU, demonstravit proportionem peripheriae ad suum diametrum esse minorem $3\frac{17}{120}$, hoc est $\frac{377}{120}$, majorem $3\frac{15}{106}$, hoc est $\frac{333}{106}$, quarum proportionum *intermedia* existit $3\frac{16}{113}$ sive $\frac{355}{113}$.

Evidemment le rapport $\frac{335}{113}$ a été obtenu en prenant la demi-somme des numérateurs 377 et 333 et la demi-somme des dénominateurs 120 et 106, comme le remarque M. BIERENS DE HAAN. C'est donc une application de la *règle de médiation*.

[1] P. TANNERY, *L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.* Biblioth. Mathem. 1887, 17—21.

[2] BIERENS DE HAAN, *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.* XII. Verslagen en mededeelingen der Akademie van wetenschappen (Amsterdam) **12**$_2$, 1878, 4—5.

[3] METIUS, *Arithmeticæ et geometriæ practica* (Franeqverae 1611), 88—89.

Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates.

Von H. Weissenborn in Eisenach.

Die Beschreibungen von den im Mittelalter üblichen Mess-Instrumenten, hinsichtlich ihrer Gestalt, der Art und Weise ihrer Anfertigung, und ihrer Anwendung, welchen wir in alten Büchern begegnen, sind, mit Ausnahme der allereinfachsten, fast alle unklar und ungenau, denn sie rühren häufig genug von Nicht-Sachverständigen her, die, weil sie das Wesentliche nicht vom Unwesentlichen zu unterscheiden vermochten, letzteres hervorhoben, ersteres aber nur mangelhaft oder auch wohl gar nicht behandelten. Ebenso finden wir die verschiedensten Benennungen dieser Werkzeuge, indem geringfügige Abänderungen häufig auch eine Veränderung des Namens zur Folge hatten, oder aber, indem man, falls man zur Ausführung einer Messung sich nur eines Teiles eines zusammengesetzten Instrumentes bediente, auf diesen den Namen des ganzen übertrug. Da nun alle diese mittelalterlichen Messungen vorzugsweise auf solche von Winkeln hinauskommen, und diese Winkelmessungen, abgesehen vom einfachen rechtwinkligen Dreieck, mittelst des sogenannten geometrischen Quadrates bewirkt werden, so erklärt es sich, dass dieses, namentlich in der s. g. Geometrie Gerbert's, mochte es für sich allein und losgelöst vom ganzen, oder mit diesem verbunden zur Anwendung kommen, häufig auch als *astrolabium* oder *astrolapsus* bezeichnet wird. Man findet Näheres hierüber in meiner Schrift: *Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters* (Berlin, 1888), p. 111, 154—160. Aus der dort genannten Schrift des Georg Purbach: *Quadratum Geometricum praeclarissimi Mathematici* Georgij Burbachij (1516) ersehen wir, dass Purbach das geometrische Quadrat bald durch *quadratum*, bald durch *gnomon*, bald durch *gnomon geometricus*, bald durch *instrumentum gnomonicum*, am häufigsten aber kurz durch *instrumentum* bezeichnet. Da ferner in der *Margarita philosophica* des G. Reisch (1496) von neueren Astronomen nur Purbach und Regiomontan genannt sind, Schriften dieser also dem Verfasser der *Margarita* vorgelegen haben müssen, so werden wir uns nicht wundern, hier als Bezeichnungen für das geometrische Quadrat neben *quadrans* und *astrolabium* auch *instrumentum gnomonale* und kurz *instrumentum* angewandt zu finden.

Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres.

Par G. Eneström à Stockholm.

On sait que la querelle célèbre entre les frères Bernoulli au sujet du problème des isopérimètres termina essentiellement avec la publication, le 1 mars 1701, de l'*Analysis magni problematis isoperimetrici* de Jacques Bernoulli. On sait aussi que, bien que Jean Bernoulli eût envoyé, en janvier 1701, sa solution du problème à l'académie des sciences de Paris, pour être publiée immédiatement après l'analyse de Jacques Bernoulli, cette solution ne parut qu'en 1706, après la mort de Jacques Bernoulli.[1] Pour expliquer ce délai, les historiens ont supposé en général que Jean Bernoulli, soupçonnant quelque vice dans sa méthode, ait craint de la soumettre au jugement de son frère, et que, pour cette raison, il laissât dormir paisiblement sa solution pendant cinque ans au dépot de l'académie.[2]

Cette explication, quelque probable qu'elle soit, n'est pas parfaitement exacte. En effet, la correspondance inédite de Jean Bernoulli avec Varignon[3] fait voir, que c'était le dernier qui persuada Jean Bernoulli de *réclamer* le paquet contenant la solution et que, à cause de cette réclamation, le manuscrit, cachété au sceau de l'académie, fut renvoyé à l'auteur le 23 mars 1701 par Fontenelle, alors sécretaire de l'académie des sciences de Paris. Varignon craignit que la publication de la solution de Jean Bernoulli n'allât établir une nouvelle lutte entre les frères, et pour empêcher cela, il arrangea de manière que la solution ne pût pas être publiée. Après la mort du frère, Jean Bernoulli remit de nouveau à Varignon le paquet, qui portait encore le cachet de l'académie, et la solution fut publiée en 1706 dans les Mémoires de l'académie des sciences de Paris.

[1] Comparez Eneström, *Framställning af striden om det isoperimetriska problemet* (Upsala universitets årsskrift 1876), p. 38, 55—57.

[2] Voir p. ex. Bossut, *Histoire générale des mathématiques*, Paris 1810, t. 2, p. 41—42.

[3] Cette correspondance est gardée dans la bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm.

Notizie storiche sulla Geometria numerativa,

di Gino Loria a Genova.

I. Introduzione.

Il problema che la Geometria numerativa si propone, può enunciarsi così: *Determinare fra gli* ∞^r *enti geometrici di data definizione il numero di quelli che soddisfano a un numero di condizioni equivalenti ad* **r** *condizioni semplici.* Tradotto in linguaggio algebrico, questo problema si riduce alla *ricerca del numero delle soluzioni finite di un sistema di equazioni dotate di singolarità qualunque;* si riduce, cioè, a quella che può ritenersi essere la questione capitale della Teoria dell' eliminazione.

Difficile è l'assegnare l'epoca in cui si possono rintracciare i primi germi di questa parte della Scienza della estensione. Il giorno in cui un geometra, trovato il modo di costruire una figura soggetta a date condizioni, si propose di discutere la soluzione per riconoscere, non solo come dovevano essere disposti i dati affinchè quella costruzione si potesse effettivamente eseguire, ma anche per stabilire quante di quelle figure potevano soddisfare le condizioni imposte; in quel giorno fu studiato un problema di Geometria numerativa. Però, la disciplina che porta oggi questo nome, si differenzia dagli studii a cui testè alludemmo perchè essa si propone di determinare il numero delle soluzioni di una questione senza avere sciolta questa questione, spesso anzi senza aver modo di risolverla; cerca ad esempio l'ordine di un luogo senza preoccuparsi della costruzione di esso. Ad essa soltanto è consacrata la presente Nota.

II. Periodo di preparazione.

Fra le numerose proposizioni di cui Steiner ci lasciò gli enunciati, parecchie trattano questioni che sono del dominio della Geometria numerativa. Tali sono quelle che si riferiscono al numero delle coniche che passano per tre punti dati di una data cubica piana e la osculano altrove [1]; o alle coniche quadritangenti a una curva di quarto ordine, o aventi assegnate relazioni di contatto con curve date. [2] Ancor più palesemente appartengono alla parte di Geometria di cui ci occupiamo gli enunciati dei numeri delle coniche tangenti a 5, 4 o 3 coniche e passanti rispettivamente per 0, 1 o 2 punti [3] o dei numeri

di quelle di cui si conosce un certo numero p di punti, un c
numero t di tangenti e un certo numero n di normali, nu
soggetti alla condizione $p + t + n = 5$;[4] o finalmente i nu
di cubiche piane soggette a date condizioni[5]. Meno espli
mente ma pur sempre vi appartiene gran parte della memo
*Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt ha
und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, s
über geradlinige Transversalen der letzteren*[6] e quello dell' al
Ueber algebraische Curven und Flächen[7].

Siccome non ci è nota la via che guidò STEINER
scoperta dei suoi teoremi, così si può dire che i suoi studii
tribuirono al progresso della Scienza, specialmente per ciò che
spinsero molti geometri a cercare dei metodi che servissero a
stificare le asserzioni del grande geometra Tedesco. E che qu
ricerca non sia stata senza frutto è dimostrato da molti la

Citerò fra questi anzitutto la memoria del BISCHOFF: *Er
Sätze über die Tangenten algebraischer Curven*[8] nella quale s
invocati i soccorsi dell'Algebra moderna per dimostrare al
dei teoremi di STEINER e altri analoghi; il BISCHOFF però — co
del resto lo stesso STEINER — incorse in alcuni errori che fu
rilevati da CHASLES[9]; per correggerli basta tener conto d
soluzioni improprie, come notò il CREMONA[10]. Gli enunc
publicati da STEINER nel T. 55 del Journal für Mathemati
furon dimostrati dal DE JONQUIÈRES[12]. Di proposizioni
sono analoghe ad alcune di STEINER o che ne sono estensi
tratta la memoria dello stesso DE JONQUIÈRES: *Solutions de q
ques questions générales concernant les courbes algébriques plan*
nella quale è studiato il problema di »determinare la classe dell
viluppo di una retta che seca una data curva algebrica in m
che una data funzione algebrica razionale intera delle mutue
stanze dei punti d'intersezione abbia un dato valore». A
degli enunciati di STEINER si possono giustificare serven
di una trasformazione quadratica, come ebbe a notare il BER
nella sua pregevole dissertazione *De transformatione secundi o
nis ad figuras geometricas adhibita* (Berlin 1864). — Infine qu
sulle normali furono dimostrati da parecchii e in vario m
completati; si veggano p. es. le note del DARBOUX[14] e del MARC
e le memorie che lo STURM publicò nei volumi 6, 7 e 9
Mathematische Annalen[16].

Della Geometria numerativa fa parte anche il lavoro di
JONQUIÈRES: *Théorèmes généraux concernant les courbes géomé
ques planes d'un ordre quelconque*[17] la cui importanza è dov
in particolare alla nozione ivi introdotta di *indice* di un siste

[redacted]

semplicemente infinito di curve piane. Non ci è permesso di tacere che a parecchii dei teoremi ivi enunciati sono necessarie delle modificazioni[18]; la causa delle inesattezze commesse dal DE JONQUIÈRES è da ricercarsi nel metodo che egli usò, il quale consiste in una applicazione del teorema di BÉZOUT e non permette di separare le soluzioni improprie[19]. Notiamo anche che il DE JONQUIÈRES erroneamente credette alla possibilità di rappresentare in coordinate cartesiane con un'equazione della forma $\sum_{r=0}^{r=m} \lambda^{m-r} f_r(x,y) = 0$ ogni serie di curve di indice m.

[1] STEINER, *Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **32**, 1846, 300—304, oppure JACOB STEINERS Gesammelte Werke (Berlin 1881—1882), T. 2, p. 375.

[2] STEINER, *Aufgaben und Lehrsätze.* Journal für Mathem. **45**, 1853, 183—185; **49**, 1855, 273—278, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 437 e 613.

[3] STEINER, *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte.* Journ. für Mathem. **37**, 1848, 161—192, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 389.

[4] STEINER, *Vermischte Sätze und Aufgaben.* Journ. für Mathem. **55**, 1858, 356—378, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 361.

[5] STEINER, *Aufgaben und Lehrsätze.* Journ. für Mathem. **45**, 1853, 375—380, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 485.

[6] Journ. für Mathem. **47**, 1854, 7—105, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 501.

[7] Journ. für Mathem. **49**, 1855, 333—348, oppure STEINERS Gesammelte Werke, T. 2, p. 621.

[8] Journ. für Mathem. **56**, 1859, 166—177.

[9] CHASLES, *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes d'ordre quelconque ou satisfaire à diverses autres conditions.* Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **58**, 1864, 222—226.

[10] CREMONA, *Einleitung in einer Theorie der ebenen Curven* (Greifswald 1865), n° 111 bis.

[11] Vedi sopra, nota 4).

[12] JONQUIÈRES, *Note sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque parmi ces conditions, il*

[illegible] Journal de mathématiques [illegible] 4, 1859, [illegible]

[illegible] Math. [illegible] 59. [illegible]

Darboux [illegible] *[illegible]* 70. 1870, [illegible]

Mannheim [illegible] *Krümmung* [illegible] Mathematische Annalen 5, [illegible]

[illegible] Mathem. Ann. 6. [illegible] 507—582; 9. [illegible]

[illegible] de mathem. 4, [illegible]

[illegible] *Note sur les* [illegible] de mathém., 10, [illegible] *sur les* [illegible] Giornale di matematiche 4 [illegible] 212—213).

[illegible] *Geometrie* [illegible] Mathem. Ann. 27, 1886, 58—101.

III. Teoria delle Caratteristiche dei sistemi di curve e di superficie.

[illegible] si possono designare [illegible] numerativa, [illegible] Chasles [illegible] con cui egli [illegible] scientifica.

La [illegible] la determinazione [illegible] coniche [illegible]. A breve distanza [illegible] per iscopo la costruzione [illegible] e la determinazione [illegible] seconda[12] tratta dei [illegible] sotto angoli di [illegible]. Del metodo per [illegible] Chasles si occupò [illegible] Comptes rendus 27 [illegible] espressamente i [illegible] sistema di coniche, la con[illegible] sistema e il principio

di corrispondenza possono prestare nella soluzione dei problemi di Geometria numerativa. Questo metodo, nella parte che concerne la nozione di caratteristiche, è un perfezionamento, che la pratica aveva manifestato necessario, di quello che il De Jonquières avea basato sul concetto di indice di un sistema di curve (cfr. § II); ma il perfezionamento è così grande che a ragione Chasles può dirsi creatore della dottrina delle caratteristiche. Il De Jonquières non fu però di questo avviso; ciò diede luogo a una vivace discussione che egli sostenne contro Chasles e che il lettore troverà nei Comptes rendus 1866[24] e in alcuni opuscoli citati a pag. 331 del *Rapport sur les progrès de la Géométrie par* M. Chasles (Paris 1870).

Dopo aver esposti i concetti fondamentali del suo metodo, Chasles diede nuovi esempii dell'applicazione di esso[25] e se ne servì per risolvere questioni complicate in cui è necessario tener conto dei punti multipli di curve d'ordine superiore[26], in cui si presentano delle condizioni multiple[27], in cui compajono certe serie di normali[28], in cui vi sono delle condizioni di perpendicolarità fra varii sistemi di rette[29], o in cui finalmente si considerano gli asintoti, i diametri, ecc. delle coniche di un sistema.[30]

Gli splendidi risultati ottenuti da Chasles ebbero un'eco in tutto il mondo scientifico, chè numerosi furono i lavori aventi per iscopo di perfezionare i di lui procedimenti, di pervenire per altra via a' suoi teoremi e di generalizzarli. Fra essi citeremo alcune note del Cremona[31], del Cayley[32] e del Dino[33], nonchè la lunga memoria dello Zeuthen: *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques*[34] e l'importante memoria di Cayley: *On the curves which satisfy given conditions*[35] nella quale è mostrato l'uso delle equazioni funzionali per risolvere problemi di Geometria numerativa. — Lo stesso Chasles estese notevolmente i suoi metodi, generalizzando a sistemi di curve d'ordine qualunque le ricerche che egli aveva fatte in origine per le coniche[36]. Studii analoghi furon fatti dal De Jonquières[37] e vennero quindi da esso estesi a sistemi di superficie[38]; si collegano ad essi le *Recherches sur les séries de courbes et de surfaces algébriques* dello stesso autore (Paris 1866), altri articoli che egli ha publicati in parecchie raccolte scientifiche,[39] infine le soluzioni date da Zeuthen[40] di questioni relative a contatti di varie specie di curve e superficie.

Alle comunicazioni di Chasles sulla teoria dei sistemi di curve, fecero seguito altre di Cayley[41], Cremona[42] e Hirst[43]; a quelle del Jonquières[44] una di Cayley[45] e parecchie importanti

[redacted]

memorie del BRILL[46]. Di argomenti affini tratta la ben nota memoria dello ZEUTHEN: *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden*[47], quella del CAPORALI: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*[48], e alcuni scritti del KREY[49], del LINDEMANN[50] e dello SPOTTISWOODE.[51]

Nel frattempo CHASLES aveva enunciati molti teoremi sui sistemi semplicemente infiniti di coniche nello spazio[52] e sui sistemi analoghi di quàdriche.[53] Quelli furono in gran parte dimostrati per via analitica dall' HIERHOLZER[54] e dal CAYLEY[55]; a questi si connettono gli scritti di DARBOUX[56] e HALPHEN[57] e le belle memorie dello SCHUBERT.[58] Il SALMON e lo ZEUTHEN si occuparono pure di sistemi di quàdriche, il primo dimonstrandone le proprietà mediante considerazioni di spazii a più dimensioni[59], l'altro studiando le quàdriche polari di un punto rispetto a una superficie algebrica.[60]

Termineremo questo § dicendo che la ricerca delle caratteristiche dei sistemi elementari di cubiche piane fu fatta da ZEUTHEN[61] e, quasi contemporaneamente, dal MAILLARD nella tesi: *Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires des courbes planes du troisième ordre* (Paris 1871); la ricerca analoga per le curve piane di terzo ordine e terza o quarta classe si deve allo SCHUBERT[62], quella per le cubiche gobbe allo STURM[63] e a SCHUBERT (si vegga il § 25 del *Kalkül der abzählenden Geometrie* [Leipzig 1879], il quale contiene il sunto di una memoria premiata nel 1875 dall'Accademia danese).

[20] Vedi sopra, nota 9).

[21] CHASLES, *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question.* Comptes rendus etc. **58**, 1864, 297—308.

[22] CHASLES, *Systèmes des coniques qui coupent des coniques données, sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions déterminées.* Comptes rendus etc. **58**, 1864, 425—431.

[23] CHASLES, *Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février. Différences cette entre méthode et la méthode analytique. Procédés généraux de démonstration.* Comptes rendus etc. **58**, 1864, 1167—1176.

[24] CHASLES, *Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes.* Comptes rendus etc. **63**, 1866, 816—821, 874—878, 907—909. — JONQUIÈRES, *Observations*

relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes. Ib. **63**, 1866, 870—874.

25 CHASLES, *Exemples des procédés de démonstration annoncés dans la séance précédente 27 Juin 1864. — Suite des propriétés relatives aux systèmes de sections coniques.* Comptes rendus etc. **59**, 1864, 7—15, 93—97.

26 CHASLES, *Questions dans lesquelles il y a lieu de tenir compte des points singuliers des courbes d'ordre supérieur. Formule générale comprenant la solution de toutes les questions relatives aux sections coniques.* Comptes rendus etc. **59**, 1864, 209—218.

27 CHASLES, *Questions dans lesquelles entrent les conditions multiples, telles que des conditions de double contact ou de contact d'ordre supérieur.* Comptes rendus etc. **59**, 1864, 344—357.

28 CHASLES, *Propriétés de systèmes de coniques, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes ou divers points.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 419—430.

29 CHASLES, *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquelles se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries de droites.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 487—494.

30 CHASLES, *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 511—520.

31 CREMONA, *Sur le nombre de coniques qui satisfont à des conditions doubles.* Comptes rendus etc. **59**, 1864, 776—779.

32 CAYLEY, *Sur les coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée.* Comptes rendus etc. **63**, 1866, 9—12.

33 DINO, *Sur la théorie des systèmes de coniques.* Comptes rendus etc. **65**, 1867, 499—501.

34 Nouvelles annales de mathématiques **5**$_2$, 1866, 241—262, 289—297, 385—398, 433—443, 481—492, 529—540. Originariamente questo lavoro comparve in danese col titolo *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, der ere underkastede 4 Betingelser* (Kjøbenhavn 1865). Un sunto di esso trovasi nei Comptes rendus etc. **62**, 1866, 177—183.

35 Philosophical transactions of the royal society [of London] **158**, 1868, 145—172.

[redacted]

[illegible] 58. 1804. 537. —
[illegible]
[illegible] 333—334.
— [illegible]
[illegible]
[illegible] 58. [illegible] —
[illegible] Ib.
54. [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] rendus etc. 58. [illegible]
[illegible] 44.
[illegible]
[illegible] 58. 1804.
[illegible]
[illegible]
[illegible] 58. [illegible] — [illegible] Stegga
[illegible]
[illegible] Ann. de ma-
[illegible] Leuthen,
[illegible]
[illegible] 385—403).
[illegible]
[illegible]
[illegible] Journ.
[illegible] 58. [illegible] — [illegible]
[illegible] Ann. I.
[illegible]
[illegible]
[illegible] applicata
[illegible]
[illegible]
[illegible] Comptes
[illegible] 58. [illegible]
[illegible] Comptes rendus etc.
54. [illegible]
[illegible] Comptes rendus
[illegible] 64. [illegible]
[illegible] Comptes rendus etc. 64.
[illegible]
[illegible] courbes d'ordre
[illegible] avec une courbe
[illegible]

courbes du degré r qui ont deux contacts l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n' etc. Comptes rendus etc. **63**, 1866, 423—425, 485—488.

35 Cayley, *Note sur quelques formules de M. E. de Jonquières, relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données.* Comptes rendus etc. **63**, 1866, 666—670.

36 Brill, *Über diejenigen Curven eines Büschels welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren. — Über zwei Berührungsprobleme. — Über Systeme von Curven und Flächen.* Mathem. Ann. **3**, 1871, 459—468; **4**, 1871, 527—549; **8**, 1875, 534—538. — Cfr. anche gli sviluppi dati dal Krey negli scritti: *Über dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar. — Note über ein Eliminationsproblem.* Mathem. Ann. **10**, 1876, 221—226; **12**, 1877, 476—480, nonchè la nota del Fouret, *Démonstrations par le principe de correspondance, d'un théorème sur le contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique.* Comptes rendus etc., **84**, 1877, 436—439.

37 Danske Videnskabenes Selskabs skrifter. Naturv. og Matem. Afd. **10**$_5$ n:o 4, 1872.

38 In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami (Milano 1881), p. 144—170.

39 Krey, *Einige Anzahlen für Kegelflächen. — Über Systeme von Plancurven.* Acta Mathematica **5**, 1884, 83—96; **7**, 1885, 49—94.

40 Lindemann, *Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre.* Bulletin de la société mathématique de France, **10**, 1882, p. 21 e seg.

41 Spottiswoode, *On the sextactic points of a plane curve.* Philosophical Transactions, **154**, 1865, p. 657 e seg. *Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini.* Comptes rendus etc. **83**, 1876, p. 627 e seg. — *On curves having four point contact with a triply infinite pencil of curves.* Proc. of the Lond. math. society, **8**, 1877, p. 23 e seg. — All' estensione allo spazio dei risultati di queste memorie è consacrato il lavoro dello stesso autore: *On hyperjacobian surfaces and curves* (Phil. Transactions, **167**, 1877).

42 Chasles, *Systèmes de coniques qui satisfont à sept conditions dans l'espace.* Comptes rendus etc. **61**, 1865, 389—396.

[53] CHASLES, *Expression générale du nombre des surfaces déterminées par neuf conditions quelconques.* Comptes rendus etc. **62**, 1866, 405—413.

[54] HIERHOLZER, *Über Kegelschnitte im Raume.* Mathem. Ann. **2**, 1870, 563—586.

[55] CAYLEY, *On the surfaces each the locus of the vertex of a cone which passes trough m given points and touches 6—m given lines.* Proceedings of the London Mathem. soc. **4**, 1873, 11—47. — Di questioni relative alle coniche dello spazio trattano anche due note del LÜROTH: *Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden;* Journ. für Mathem. **68**, 1868, 185—190; *Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume;* Mathem. Ann. **3**, 1871, 124—133.

[56] DARBOUX, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.* Comptes rendus etc. **67**, 1868, 1333—1334.

[57] HALPHEN, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.* Comptes rendus, **76**, 1876, 1074—1077. V. anche HALPHEN, *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre.* Bullet. de la soc. mathém. de France **2**, 1874, p. 27 e seg.

[58] SCHUBERT, *Zur Theorie der Charakteristiken.* Journ. für Mathem. **71**, 1870, 366—386. — *Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.* Ib. **73**, 1871, 96. — *Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung.* Mathem. Ann. **10**, 1876, 318—364.

[59] SALMON, *On some points in the theory of elimination.* Quarterly journal of mathematics **7**, 1866, 327—337.

[60] ZEUTHEN, *Note sur les quadriques polaires.* Annali di matematica $\mathbf{4}_2$, 1870—1871, 331—337.

[61] ZEUTHEN, *Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques.* Comptes rendus etc. **74**, 1872, 521—525, 604—607, 726—730.

[62] SCHUBERT, *Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts.* Mathem. Ann. **13**, 1878, 429—539.

[63] STURM, *Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von kubischen Raumcurven.* Journ. für Mathem. **79**, 1875, 99—139. — *Weitere Untersuchungen über kubische Raumcurven.* Ib. **80**, 1875, 128—149, 334.

(*Continua.*)

Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Die mit Dank aufgenommene Belehrung des Herrn M. CANTOR[1] veranlasst mich, eine alte Schuld abzutragen, und noch einmal auf AHMED BEN IUSUF zurückzukommen, und zwar mit einigen neuen Quellen. Wenn ich bei der Benutzung derselben nicht gänzlich in dem engeren Gebiete der Bibliotheca Mathematica mich halte, so möge man das entschuldigen: bei wenig bekannten oder zweifelhaften Persönlichkeiten ist oft die Entscheidung einer *Autoritätsfrage* (und eine solche wird durch Herrn CANTOR angeregt) erst durch die allseitige Beleuchtung der Persönlichkeit angebahnt; auch sonst ist es den Pflegern einer Disciplin meist erwünscht, die Leistungen der Autoren auf anderen Gebieten kennen zu lernen. Man darf heutzutage nicht bloss die »Theilung der Arbeit«, sondern auch das Zusammenwirken, namentlich auf dem Gebiete der Geschichte der Wissenschaften, als einen Fortschritt bezeichnen. So erlaube ich mir denn hier, ehe ich von AHMED B. IUSUF handle, auf seinen *Vater* zurückzugehen, der, meines Wissens, noch nirgends besprochen ist, auch mit dem Sohne confundirt scheint. Als Hauptquelle dient hier die *Geschichte der Aerzte von* IBU ABI OSEIBIA, *herausgeg. von* A. MÜLLER (Königsberg 1884);[2] ich werde der Kürze halber dieses Werk mit »OSEIBIA» bezeichnen.

1.

ABU'L-HASAN (oder HUSEIN) IUSUF BEN IBRAHIM führt den Beinamen »IBN AL-DÂJE», das heisst Sohn der Amme[3]; OSEIBIA (II, 34) nennt ihn auch »AL-'HASIB» (der Rechner)[4], und an einer Stelle bei OSEIBIA (I, 34) scheint davon die Rede zu sein, dass er die Revolution (»Ta'hwil») des Jahres 215 H. berechnen sollte. Er war Freigelassener (Mula, Klient) des unglücklichen ABU ISHAK IBRAHIM IBN AL-MAHDI (OSEIBIA I, 183) und ein grosser Theil der Nachrichten IUSUF's (bei OSEIBIA, I, 77, 79, 131 ff., 134, 135, 150, 152, 158,[5] 165, 167, 168 nach dem Tode IBRAHIM's, 183), steht in Verbindung mit diesem Patron. Da OSEBIA dem IUSUF keinen besonderen Artikel gewidmet hat, so war er nicht Arzt.

Sein Wohnort war Bagdad; im Jahre 225 H. (839) verliess er Irak und befand sich in Damaskus[6], wahrscheinlich später

in Kahira[7]. Einige, ausserdem erwähnte Daten gehören einer früheren Zeit an.[8]

OSEBIA führt IUSUF mehr als 30 Male als *Gewährsmann* an, ohne auch nur ein einziges Mal den *Titel* einer Schrift desselben anzugeben, was er sonst zu thun pflegt, wenn seine Mittheilung einer solchen entnommen ist. Das ist für die ihm beigelegten Schriften von einiger Wichtigheit.

Was den Inhalt der auf ihn zurückgeführten Nachrichten bei OSEIBIA betrifft, so sind diese natürlich durch die Tendenz, die OSEIBIA selbst verfolgt, auf Arznei und Aerzte beschränkt; allein OSEIBIA berichtet nicht bloss Wissenchaftliches: er liebt, wie alle Orientalen, das Anecdotenhafte, wodurch seine Biographien ein buntes Colorit erhalten, aber auch Personen und Verhältnisse mit wenigen Strichen kennzeichnen.

Eine andere Beobachtung führt darauf, dass IUSUF nicht bloss berichtet, was er selbst gesehen und erlebt hat, sondern er scheint ein wissbegieriger Mann gewesen zu sein, wohl auch ein neugieriger, der sich gern erzählen liess, und in einem grösseren Kreis hochgestellter und ausgezeichneter Männer sich über allerlei unterhielt und erkundigte, auch wiederum nach der guten Sitte seiner Zeitgenossen, seine nächste Quelle, mitunter auch die der letzteren bis auf die erste, ehrlich angab. Ein Bild jenes Kreises gewährt uns eine Zusammenstellung der Namen der Personen, welche IUSUF als Gewährsmänner für seine Berichte anführt (die Ziffer in Parenthese bezieht sich auf OSEIBIA Bd. I): Isa ben Hikam (p. 119, 120),[9] Farakh, genannt abi Khorasan, Mula des 'Sali'h ben al-Raschid (133, cf. p. 145), al-Abbas ben Ali ibn al-Mahdi (149), Ismaïl ben Abi Sahl ben Naubakht (152), Abd Allah und Zakkarijje al-Teifuri (153, 156, 157), abu Muslim (155), Musa ben Israïl al-Kufi (über den jüdischen Arzt Furat, 161—163), Ajjub ben al-'Hikam al-Ba'sri (163), Salmaweih (ibid.), Ibrahim ben Fazarun (170), 'Anbasa ben Ishak al-Dhabi (ibid.), Ahmed ben Harun al-Scharabi in Kahira (177), Ibrahim ben Ali, der Arzt (178), Michael ben Maseweih (184), Ahmed b. Raschid al-Katib (II, 34).[10]

IUSUF muss etwas geschrieben haben; denn die vielfachen Anführungen OSEIBIA's (resp. AL-KIFTI's) sind doch wohl nicht aus einer Mittelquelle, welche so viele *mündliche* Mittheilungen IUSUF's enthielt, geschöpft. P. 77 citirt OSEIBIA unseren IUSUF »in der Bestimmung des Wohnorts GALEN's«, nach einer Anfrage des IBRAHIM IBN AL-MAHDI bei DJIBRIL etc. Demnach hat IUSUF einen Artikel über GALEN geschrieben. Sehen wir uns nun nach den Schriften um, welche IUSUF verfasst haben soll.

Im *Fihrist* des IBN NADIM (p. 160 Zeile 12) wird berichtet, dass IUSUF den *Diwan* des ABU NOWAS redigirt habe. Aus dieser Redaction können die Citate OSEIBIA's nicht stammen. Dagegen erwähnt der Bibliograph HAGI KHALFA (s. VII, 1250 n. 9277) 3 Schriften unter dem Schlagwort »Akhbar» (Erzählungen, Kunden), welches mehr eine sachliche Bezeichnung als ein eigentlicher Titel ist, nämlich

a) Erzählungen von den *Aerzten* (I, 184 n. 181).[11]

b) Erzählungen von den *Astronomen* (I, 191 n. 239).[12]

Von einem solchen Werke, das für uns von höchstem Interesse gewesen wäre, habe ich bis jetzt keine Spur entdecken können. Sollte hier der Vater mit dem Sohne confundirt sein?

c) Erzählungen von IBN AL-MAHDI (I, 184 n. 177, cf. VII, 1285 n. 927). Wir haben gesehen, dass viele Stellen bei OSEIBIA diese Persönlichkeit und ihre Umgebung betreffen, wie auch der Sohn AHMED, im Commentar zum *Centiloquium*, dergleichen im Namen des Vaters erwähnt. Einer solchen Schrift konnten allerdings auch Nachrichten über Aerzte und Astronomen entnommen sein. Doch verlangt die Geschichte nicht Möglichkeiten sondern positive Zeugnisse, die mir nicht bekannt sind. Ich bekenne aber hierbei, dass neuere Geschichtsquellen leicht meiner Kenntniss entgangen sein konnten.

[1] M. CANTOR, *Ahmed und sein Buch über die Proportionen*. Bibliotheca Mathematica 1888, S. 7—9.

[2] MÜLLER schreibt USEIBIA; ich halte mich an die lange herrschende Schreibung. Über dieses Werk und einige Ergänzungsschriften von MÜLLER, s. meine Anzeige im Literaturblatt für Oriental. Philologie **2**, 1883, S. 400—404. — Im Index S. 139 unter IUSUF ist noch I, 153 hinzuzufügen. OSEIBIA benutzt grossentheils das (unedirte) biographische Wörterbuch von AL-KIFTI, das ich für diesen Artikel nicht vergleichen konnte (s. z. B. *Lesarten* S. 23—24 zu S. 181).

[3] Über diesen Namen vergl. AMARI, *Storia dei Musulm.* ecc. II, 183 (»Daja»); D'HERBELOT, *Bibliotheca Orientalis* (II, 195 der deutschen Übersetzung, ed. Halle 1787) schreibt DAHIAH, und daher ALB. HALLER, *Bibliotheca medica* I, 415. Der Beinamen kommt noch im XIII. Jahrh. vor; s. v. HAMMER-PURGSTALL, *Literaturgesch. der Araber*, VII, 435 n. 7963. — HUSEIN für HASSAN, s. MÜLLER, l. c. *Lesarten* S. 23, 24.

[4] Für AL-'HASIB scheint der lateinische Übersetzer des

Commentars zum *Centiloquium* vom Sohne AHMED die Lesart »al-Katib» vor sich gehabt zu haben, daher »scriptoris» bei WÜSTENFELD, *Die Übersetzungen* u. s. w., S. 28; s. unten 2.

[5] Unter IAZID BEN ZEID etc., dessen voller Namen in AL-KIFTI's Wörterbuch (letzter Art. im Buchst. Ja) ein Wenig abweicht; vergl. WÜSTENFELD, *Gesch. der arab. Aerzte*, S. 20 n. 47. LECLERC, *Histoire de la médecine arabe* II, 391. V. HAMMER-PURGSTALL, l. c. IV, 328 n. 2458 macht daraus: »Iahja ben Iesid ben Soheir»!

[6] OSEIBIA I, 186 und p. 121 (cf. Journal Asiatique 1855, V, 449; VIRCHOW's Archiv für pathol. Anatomie 37, S. 390). — IUSUF war in *Almeidan* beim Arzte DJIBRIL (OSEIBIA I, 129).

[7] OSEIBIA I, 177. Wir werden den Sohn AHMED in Africa finden.

[8] Anno 215, 217, 220 H. (OSEIBIA I, 173, 179, 183).

[9] Pag. 119 erzählt der *Sohn* ABU DJA'FAR AHMED im Namen des Vaters; s. die französ. Übersetzung im Journal Asiat. 1855, V, 449 (t. VI, 158 war hierauf zu verweisen); vgl. Archiv für pathol. Anat., l. c., LECLERC, l. c. I, 84; meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi*, p. 18.

[10] Nachrichten über verschiedene andere Personen s. S. 160, 167, 171, 175.

[11] V. HAMMER-PURGSTALL, l. c. III, 399 n. 1308 (anno 786! vergl. Bd. I p. CXCIX n. 491) citirt OSEIBIA ohne eine bestimmte Stelle anzugeben, wahrscheinlich auf Grund der vielen Citate.

[12] V. HAMMER-PURGSTALL I, l. c. n. 490. D'HERBELOT, l. c., hatte falsch »mutadjatsemin» (für munaddjemin») gelesen und Gottverkörperer übersetzt, was aber »mudjassimin» lautet.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

P. Mansion. ESQUISSE DE L'HISTOIRE DU CALCUL INFINITÉSIMAL. Extrait du »Résumé du cours d'analyse infinitésimale». Gand, Hoste 1886. 8°, 37+2 p.

Dans le premier chapitre de cette esquisse, l'auteur mentionne les précurseurs et les inventeurs du calcul infinitésimal. Il regarde comme précurseurs EUDOXOS, EUCLIDES, ARCHIMEDES, PAPPOS, NEPER, KEPLER, CAVALIERI, GRÉGOIRE DE S:T VINCENT, DESCARTES, FERMAT, ROBERVAL, SLUSE, PASCAL, WALLIS et HUYGENS, et il indique les recherches par lesquelles chacun d'eux a contribué à l'invention de l'analyse supérieure. Parmi les inventeurs, il signale en premier lieu NEWTON et LEIBNIZ, puis aussi les plus grands analystes du 18ᵉ et 19ᵉ siècles. Le second chapitre est consacré à la traduction des premières expositions du calcul infinitésimal, données par LEIBNIZ en 1684 (dans les Acta Eruditorum) et par NEWTON en 1687 (dans les *Philosophiæ naturalis principia mathematica*); M. MANSION y a ajouté aussi quelques notes explicatives. Enfin, le troisième chapitre contient une petite recherche sur le sens du terme: *in(dé)finiment petit* et une notice historique sur les principaux auteurs, depuis KEPLER jusqu'à COURNOT, qui se sont servis de cette notion. M. MANSION estime que le terme cité a été employé dans trois sens différents, à savoir: indéfiniment petit, zéro (gardant la trace de son origine), et pseudo-infiniment petit (c. a. d. une quantité différente de zéro et cependant inférieure à toute grandeur assignable); c'est dans le premier sens que, après CAUCHY, le terme a été universellement adopté, et M. MANSION croit avoir trouvé aussi que NEWTON et LEIBNIZ concordent, au fond, avec CAUCHY en ce point. — En appendice, il y a quelques notices sur la considération de l'infini employée par VIÈTE, TACQUET, BARROW et quelques autres géomètres.

Les indications données par M. MANSION dans son *Esquisse* contiennent beaucoup d'intéressants détails; nous regrettons seulement que l'auteur n'ait pas jugé à propos de les lier ensemble sous forme d'un mémoire. Mais la forme actuelle dépend sans doute de ce que les notices sont extraites d'un Cours d'analyse destiné aux étudiants.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

H. Suter. Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. (Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Kantonsschule in Zürich 1887.) Zürich, Höhr 1887. 4°. (2) + 58 p.

Le premier chapitre de ce mémoire, qui a paru aussi dans la Festschrift der Kantonsschule in Zürich zur Begrüssung der XXXIX. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner (Zürich 1877), contient des notices générales sur la fondation, l'organisation et le développement des universités au moyen-âge. Dans le second chapitre l'auteur donne des renseignements plus détaillés sur la faculté des sciences (*Artistenfacultät*) des universités, en particulier sur les différentes sciences y enseignées, les cours universitaires, les livres classiques, les disputations et les examens. Le troisième chapitre, contenant la partie essentielle du mémoire, est consacré aux mathématiciens et à l'enseignement des sciences mathématiques au moyen-âge jusqu'à l'an 1450. Cet enseignement était d'abord presque parfaitement négligé aux universités, et nous n'avons que peu de notices sur l'étude des mathématiques à Paris, à Oxford et à Bologna, avant l'an 1200. A Oxford, encore au 13^e^ siècle, l'enseignement de géométrie ne fut pas porté, pour la plupart des étudiants, au delà de la 5^e^ proposition du 1^er^ livre des *Elementa*, et à Paris les statuts de l'an 1215 ne font pas mention de leçons ordinaires de mathématiques. Mais plus tard l'étude des mathématiques fit des progrès considérables, et pour ce qui concerne l'université de Paris, les mathématiques y furent comprises en 1366 parmi les leçons ordinaires.

Le mémoire de M. Suter rend compte des principaux mathématiciens au moyen-âge, de leurs ouvrages et des études universitaires des mathématiques dans ce temps; faute d'espace, il n'a pu analyser les ouvrages indiqués. Il traite plus en détail les universités allemandes et anglaises; pour les autres, il lui a manqué une partie des sources nécessaires. Il n'a pas non plus eu recours à l'important ouvrage de M. S. Günther: *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin 1887), qui parut pendant l'impression de son mémoire. Cependant, les nombreuses sources qu'il a utilisées, lui ont permis de donner beaucoup de notices intéressantes relatives à l'étude des mathématiques au moyen-âge.

Stockholm. G. Eneström.

P. Tannery. La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie. Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars 1887. 8°, VI + (2) + 188 p.

Il n'est nullement notre intention de donner ici une analyse détaillée et critique de cet important ouvrage, dont les différents chapitres ont paru, pour la première fois, dans le Bulletin des sciences mathématiques. Une telle analyse ne peut guère être faite que d'un historien qui s'est attaché particulièrement à l'étude de la géométrie des Grecs. Nous nous restreindrons par conséquent à rendre compte du plan de l'ouvrage de M. P. Tannery.

Dans l'introduction M. Tannery signale comme le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes, de »préciser les circonstances et de déterminer les causes de la décadence passée, en vue de connaître les précautions à prendre pour éviter une décadence future», problème dont la résolution exige évidemment plusieurs recherches précédentes, semblables aux celles contenues dans cet ouvrage, et que, par conséquent, l'auteur n'a pas eu l'intention de résoudre pour le présent. Le but immédiat qu'il s'est proposé, est de soumettre les sources de la connaissance de la géométrie grecque à une critique méthodique, »rechercher spécialement comment les traditions se sont formées et comment elles nous ont été transmises, pour déterminer ainsi ce que nous pouvons affirmer, ce que nous pouvons seulement considérer comme probable, ce qu'au contraire nous devons regarder comme purement conjectural ou même tout à fait incertain». Quant aux travaux de MM. Bretschneider et Allman sur la géométrie grecque, M. Tannery remarque qu'ils ont porté plutôt sur les documents considérés en eux-mêmes, que sur leur origine réelle, d'où il suit que leur but n'a pas été parfaitement identique à celui de M. Tannery.

La source capitale de l'histoire de la géométrie grecque est, comme on sait, le long fragment historique du Prologue de Proclus, est c'est à une traduction et à une étude approfondie de ce fragment que l'auteur a consacré une très grande partie de son ouvrage. De cette étude, il conclut que Proclus n'a pas utilisé directement l'histoire de géométrie composée par Eudemus, mais seulement par l'intermédiaire de Geminus, et il tire de là des conséquences relatives à l'interprétation du contenu du fragment. Cependant, il ne se borne pas à ce frag-

ment, mais il fait usage aussi des matériaux fournis par les autres sources de la géométrie grecque. En particulier, il tire quelques conclusions importantes d'un manuscrit arabe de la bibliothèque de Leyde, contenant, sur les six premiers livres des *Elementa*, une suite de scolies qui portent le nom de HÉRON. Les recherches de M. TANNERY s'arrêtent sur la conclusion qu'après la période alexandrine les questions relatives aux définitions des *Elementa* ont été considérées comme épuisées dans l'antiquité; EUCLIDE est dès lors classique sans aucune restriction et la géométrie élémentaire, regardée comme parfaite, reste absolument stationnaire. M. TANNERY réserve pour la seconde partie de son travail l'examen approfondi de ce que l'on peut savoir sur l'histoire des définitions, soit avant, soit après EUCLIDE.

L'auteur a divisé son ouvrage en 14 chapitres dont voici les titres: 1. *Proclus et Geminus.* — 2. *Sur l'époque où vivait Geminus.* — 3. *Le classement des mathématiques, d'après Geminus.* — 4. *Les applications de la géométrie dans l'antiquité.* — 5. *Le résumé historique de Proclus.* — 6. *La tradition touchant Pythagore, Oenopide et Thalès.* — 7. *La constitution des Eléments.* — 8. *Hippocrate de Chios.* — 9. *Démocrite et Archytas.* — 10. *Les géomètres de l'académie.* — 11. *La technologie des Eléments d'Euclide.* — 12. *Les continuateurs d'Euclide.* — 13. *Héron sur Euclide.* — 14. *Les »Définitions« du pseudo-Héron.* A la fin, il a ajouté un index des noms propres très utile pour le lecteur.

Il est évident qu'un ouvrage tel que le présent, doit contenir un grand nombre de conjectures qui ne rencontreront pas toutes un assentiment général, et probablement quelques-unes des hypothèses de M. TANNERY doivent être modifiées; mais, en tout cas, nous sommes convaincu que son travail sera d'une grande utilité pour la connaissance de l'histoire des mathématiques dans l'antiquité.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

H. Weissenborn. GERBERT. BEITRÄGE ZUR KENNTNIS DER MATHEMATIK DES MITTELALTERS. Berlin, Mayer & Müller 1888. 8°, VI+(2)+251 p.+6 pl.

M. WEISSENBORN fait remarquer que nos connaissances sur l'état des mathématiques pendant la première moitié du moyen-âge sont tirées, pour une grande part, des deux écrits intitulés *Geometria Boëtii* et *Geometria Gerberti*, et que, par conséquent, la question de l'authenticité ou de la non-authenticité de ces

deux écrits est d'une importance capitale pour l'histoire des mathématiques. Il a cherché à établir dans quelques travaux antérieurs que la *Geometria Boëtii* est l'oeuvre d'un faussaire très postérieur à BOËTIUS (probablement au commencement du 11e siècle); le but de cet ouvrage est de démontrer que la *Geometria Gerberti* n'est pas écrit par GERBERT. A cet effet, M. WEISSENBORN soumet la *Geometria Gerberti* à une critique méthodique, d'où il conclut qu'elle doit avoir été composée, par divers auteurs, dans le cours du 11e siècle, et que ces auteurs ont utilisé non seulement des sources gréco-romaines, mais aussi des sources arabes; en particulier, il estime que les méthodes et les instruments y indiqués pour mesurer des lignes et des angles, sont tirés d'ouvrages arabes.

Pour ce qui concerne GERBERT lui-même, M. WEISSENBORN admet qu'il a, le premier en Europe, employé les chiffres arabes, mais sans zéro, et la division complémentaire. Au reste, M. WEISSENBORN entre dans quelques détails relatifs à la vie de GERBERT, par exemple sur sa demeure à Bobbio et son voyage en Espagne, en vue de réfuter certaines conclusions de M. CANTOR. Il a consacré aussi tout un chapitre à la multiplication complémentaire dont il attribue l'invention aux arabes, en observant que cette méthode n'a rien affaire à NICOMACHUS.

Nous nous abstenons de toute critique soit des conclusions générales de M. WEISSENBORN, soit des raisons sur lesquelles il s'est appuyé. Les principaux résultats auxquels il est arrivé, auront sans doute peu de change d'être acceptés d'emblée par la plupart des ses collègues, et ils deviendront probablement l'objet de polémiques sérieuses. Selon nous, l'ouvrage de M. WEISSENBORN peut être étudié avec intérêt, indépendamment de ses conclusions, parce qu'il a appelé l'attention sur quelques points de l'histoire des mathématiques qui n'ont pas encore été soumis à des discussions approfondies et qui, par conséquent, ont besoin d'être examinés de plus près. Seulement, nous aurions désiré que l'auteur eût abrégé le deuxième chapitre (*Alte Mess-Methoden und Mess-Instrumente*) qui nous semble trop long à l'égard du but de l'ouvrage.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publiée par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1888: 1.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.
20 (1887): 7—10.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
33 (1888): 2.

Bertelli, T., Di alcune teorie e ricerche elettro-sismiche antiche e moderne.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 481—542.

Bjerknes, C. A., La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler.
Biblioth. Mathem. 1888, 1—2.

БОБЫНИНЪ, В. В., Первоначальное развитiе системъ счисленiя.
Fiziko-matem. naouki **3** (1887), 1888, A: 1—15. — BOBYNIN, V. V., Sur le premier développement des systèmes de numération.

Cantor, M., Ahmed und sein Buch über die Proportionen.
Biblioth. Mathem. 1888, 7—9.

Christensen, S. A., Den første Bestemmelse af en krum Linies Længde.
Tidsskr. for Mathem. 5_5, 1887, 121—125.

Curtze, M., Leopold Prowe. Eine Gedächtnisrede gehalten in der ausserordentlichen Sitzung des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst am 10. October 1887. Thorn 1888.
8°, 15 p. — Avec portrait.

°**Czerny, A.**, Aus dem Briefwechsel des grossen Astronomen G. v. Pȩurbach. Wien 1888.
8°, 24 p. — [0,50 M.]

°**Drohojowska**, Les savants modernes et leurs oeuvres: Cassini, Arago, Le Verrier, Puiseux. Lille 1887.
8°, 192 p.

°**Dühring, E.**, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Dritte Auflage. Leipzig 1887.
8°, 28+610 p. — [10 M.]

°Двухсотлѣтіе памяти Ньютона (1687—1887). Москва 1888.
8°, 51 p. — [50 kop.] — Le deux-centième jubilé de NEWTON. Discours prononcés à Moscou le 2 déc. 1887 par N. E. CHOUKOWSKI, A. G. STOLJETOFF, V. K. TSERASKIJ et V. J. TSINGER. — [Analyse:] Fiziko-matem. naouki **4** (1888), A: 86—89. (V. V. BOBYNIN.)

Eneström, G., Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson.
Biblioth. Mathem. 1888, 17—18.

°**Engelbrecht, A.**, Hephaestion von Theben und sein astrologisches Compendium. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Astrologie. Wien 1887.
8°, 102 p. — [2 M.]

E., Θ., Александръ Θедоровичъ Малининъ (Некрологъ.)
Vjestnik elem. matem. **4**, 1886, 203—208. — Nécrologie sur A. F. MALININ.

°**Euclides**, Elementa. Edidit J. L. HEIBERG. Volumen V: Elementorum qui feruntur libri 14 et 15 et Scholia in Elementa. Lipsiæ, Teubner 1888.
8°, 113 + 738 p. — [7,50 M.]

Favaro, A., Di Giovanni Tarde e di una sua visita a Galileo dal 12 al 15 novembre 1614.
Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 345—371.

Favaro, A., Appendice prima alla Libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 372—376.

Favaro, A., Serie terza di scampoli Galileiani.
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e Memorie **4**, 1888. 23 p.

Favaro, A., Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna.
| Atti e memorie della R. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna $\mathbf{6}_3$, 1888. 60 p.

°**Gould, S. C.**, Bibliography on the polemic problem: What is the value of π? 1888.

Henry, Ch., Sur divers points d'histoire des mathématiques.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 389—403. —
1°. L'auteur signale une interprétation du passage géometrique du *Ménon*, publiée par WOEPCKE en 1856, restée inconnue des commentateurs et qui offre sans altération du texte la solution de la célèbre difficulté.
2°. Il expose diverses observations critiques relatives à la partie hindoue des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de M. CANTOR.
3°. Il réfute l'opinion récemment émise d'après laquelle les signes planétaires seraient des radicales des cinq classes de l'alphabet d'Açoka.
4°. Il observe que les manuscrits de la géométrie de BOÈCE 13020, 13955, 14080 de la Bibliothèque nationale de Paris ne renferment pas d'abacus. Bien entendu, cette observation laisse indécise la question de l'authenticité ou de la non-authenticité de la géométrie de BOÈCE.
5°. Il reproduit une notation ingénieuse employée dans certains jeux en Pologne, très analogue avec des notations magiques et astrologiques.
6°. Il prouve qu'un manuscrit sur la machine arithmétique possédé par M. CH. RICHET renferme des pages inédites de PASCAL sur l'usage de cette machine.

7°. Il complète et rectifie en plusieurs points la biographie de TORRICELLI et de MERSENNE.

8°. Il signale dans les oeuvres de MONGE et d'AMPÈRE, d'après M. SYLVESTER et M. CAYLEY, l'équation différentielle des coniques retrouvée depuis et des formules importantes pour la théorie des réciprocants.

9°. Enfin il rectifie une omission numérique de WOEPCKE dans une table des nombres congruents $2xy$ et après divers renseignements sur la solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, il signale divers papiers du regretté WOEPCKE.

Hjort, V., Hans Carl Frederik Christian Schjellerup.
Tidsskr. for Mathem. **5**$_4$, 1887, 148—153.

КЛЕЙБЕРЪ, I., Изъ исторіи ариѳметики. Умноженіе и дѣленіе. I.
Vjestnik elem. matem. **3**, 1887, 217—228. KLEIBER, J., Sur l'histoire de l'arithmétique. Multiplication et division.

Kronecker, L., Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten.
Berlin, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1888, 439—442. — Correction d'un malentendu, relatif aux dernières recherches de DIRICHLET, à propos d'un passage du tome **7**, p. II des Acta Mathematica.

°**Lange, L.**, Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffs. Leipzig, Engelmann 1886.
8°, 141 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 34. (P. ZECH.)

°**Lehmann, E.**, De la Hire und seine Sectiones Conicae. I. Leipzig 1888.
4°, 28 p. — [1,20 M.]

Le Paige, C., Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les »Leçons de ténèbres«.
Biblioth. Mathem. 1888, 10—12.

Marie, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome XII: D'Arago à Abel et aux géomètres contemporains. Paris, Gauthier-Villars 1888.
8°, (6) + 258 p. — [6 fr.] — [Analyse:] Deutsche Litteraturz. **9**, 1888, 530—531. (M. CURTZE.) — [Analyse du tome XI:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 222—223. (CANTOR.) — [Analyse des tomes VI—XI:] Deutsche Litteraturz. **8**, 1887, 1853. (M. CURTZE.)

Marre, A., Théorème du carré de l'hypoténuse.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 404—406. — Notices historiques.

°**Pluzanski**, Aristotelea de natura astrorum opinio ejusque vices apud philosophos tum antiquos, tum medii aevi. Parisiis 1887.
8°, 145 p.

°**Rothlauf, B.**, Die Physik Plato's, eine Studie auf Grund seiner Werke. Programm zur Schlussfeier des Schuljahres 1886—87 an der königl. Kreis-Realschule. München 1887.

4°, 51 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 220—221. (CANTOR.)

[**Schpatchinskij, E. K.**], [Nécrologies sur Ivan Jendrchejevitch, Balfour Stewart et Justin Bourget.]
Vjestnik elem. matem. **4**, 1888, 36—40.

Schram, R., Notice sur les travaux de Théodore Oppolzer avec la liste complète de ses publications. Traduite de l'allemand par E. PASQUIER.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 439—480.

Schumann, E., Professor Dr. Joh. Frdr. Wilh. Gronau. Sein Leben und seine Verdienste um die Wissenschaft. (Programm des Realgymnasiums zu S:t Johann.) Danzig 1888.
4°, 10 p.

Steinschneider, M., Über das Wort Almanach.
Biblioth. Mathem. 1888, 13—16.

°**Tannery, P.**, Pour l'histoire de la science hellène, de Thalès à Empèdocle. Paris, Alcan 1887.
8°, 396. — [Analyse:] Bull. d. sc. mathém. 12_2, 1888, 33. (X.)

Tannery, P., Etudes sur Diophante. IV. Les problèmes algébriques indéterminés des trois derniers livres.
Biblioth. Mathem. 1888, 3—6.

°**Terquem, A.**, La science romaine à l'époque d'Auguste. Etude historique d'après Vitruve.
[*Lille*, Soc. d. sc., Mémoires 1885. 174 p. — [Analyse:] Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 385—388. (A. FAVARO.)

Wohlwill, E., Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17. Jahrhundert. Ein Beitrag zur Geschichte der Naturwissenschaft in Hamburg.
[Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaft (Hamburg) **10**. 1887. 66 p.

Wohlwill, E., Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt?
Biblioth. Mathem. 1888, 19—26.

Question 19 [sur le *baculus geometricus*].
Biblioth. Mathem. 1888, 32. (G. ENESTRÖM.)

ANSCHÜTZ, C., Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg 1599. Prag 1886. 8°.
Deutsche Litteraturz. **8**, 1887, 1630—1631. (e.)

CARR, G. S., A synopsis of elementary results in pure mathematics: containing propositions, formulæ, and methods of analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

20. Tandis que l'ancienne géométrie grecque, dans la longue période du moyen âge, était partout ailleurs complétement tombée dans l'oubli, elle occupait, comme on sait, les savants arabes, auxquels nous devons aussi la possession d'un certain nombre d'ouvrages de mathématiques grecs. Aussi bien la forme dans laquelle ceux-ci nous ont été transmis que les propres travaux mathématiques des Arabes, montrent qu'ils avaient une grande intelligence des ouvrages grecs, et il était par suite à prévoir qu'ils devaient avoir donné d'importants développements aux résultats qui y sont consignés. A côté de grands progrès incontestables dans tout ce qui se rapporte au calcul numérique, on a aussi cru en trouver de pareils dans le domaine de l'algèbre. Mais comme des auteurs plus récents ont signalé dans la géométrie grecque des recherches et des résultats algébriques de même nature que ceux dont on a attribué l'honneur aux Arabes, la question des rapports des Arabes à leurs devanciers grecs mérite d'être examinée de plus près. On demande donc une étude des ouvrages de mathématiques arabes qui ont été traduits en latin ou en une langue européenne moderne, principalement de ceux qui traitent de la théorie et de la discussion des équations et de l'application des sections coniques à cette théorie, dans le but de déterminer le degré plus ou moins grand d'originalité dont les Arabes, dans leurs travaux sur ces matières, font preuve vis-à-vis de leurs devanciers grecs.* (Académie Danoise des sciences.)

---

21. Dans la célèbre lettre que NEWTON a adressée à OLDENBURG, le 24 octobre 1676, pour LEIBNIZ, il fait l'observation suivante: »LEIBNIZ ne semble pas avoir remarqué que je représente habituellement par des lettres des quantités affectées du signe *plus* ou du signe *moins*. De cette manière, je ne multiplie pas inutilement le nombre des théorèmes» (LEIBNIZens *mathematische Schriften, herausg. von* GERHARDT, I, 1849, p. 138, ou NEWTONI *Opuscula, ed.* CASTILLON, I, 1744, p. 346—347).

* L'Académie Danoise des sciences a proposé le prix Schou (400 couronnes) pour une réponse à cette question. Le mémoire ne doit pas porter le nom de l'auteur, mais une devise, et être accompagné d'un billet cacheté muni de la même devise, et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. La réponse doit être adressée avant la fin d'octobre 1889 à M. H. G. ZEUTHEN, professeur à l'université de Copenhague.

D'autres géomètres, avant NEWTON, ont-ils employé *systématiquement* des lettres (sans signe) pour désigner indifféremment des quantités positives ou des quantités négatives?

(P. Mansion.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1888.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK HERAUSGEGEBEN VON | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888. STOCKHOLM. № 3.

NEUE FOLGE. 2. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 2. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz.

Von M. CURTZE in Thorn.

Herr C. LE PAIGE hat gezeigt[1], dass der Satz:

> Wenn ein Kreis im Innern eines festen Kreises vom doppelten Radius rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des rollenden Kreises einen Durchmesser des festen,

nicht DE LA HIRE angehört, wie vielfach angegeben wird. Derselbe gehört jedoch ebensowenig TACQUET oder CARDANO oder LODOVICO FERRARI an, denen Herr LE PAIGE denselben zuteilt, sondern keinem Geringeren als NICOLAUS COPPERNICUS. Der Satz findet sich nebst Beweis in dessen Werke *De revolutionibus orbium caelestium Libri VI* und zwar Liber III, Cap. IV: *Quomodo motus reciprocus sive librationis ex circularibus constet.*[2]

Ehe im Jahre 1543 dieses Werk des COPPERNICUS die Presse verliess, hatte GEORGIUS IOACHIMUS RHETICUS denselben schon in seiner sogenannten *Narratio prima*[3], welche zuerst *im Drucke* über das Coppernicanische System Nachricht gab, bekannt gemacht.

In der Säkularausgabe der *Revolutiones* des COPPERNICUS habe ich aus dem Originalmanuscripte noch folgende Anmerkung, welche COPPERNICUS ausgestrichen hat, abdrucken lassen.[4]

> Vocant autem aliqui motum hunc in latitudinem circuli, hoc est dimetientem, cuius tamen periodum et dimensionem a circumcurrente eius deducunt, ut paulo inferius ostendemus. Estque hic obiter animadvertendum, quod, si circuli *hg* et *cf* fuerint inequales manentibus caeteris conditionibus, non rectam lineam, sed conicam sive cy-

lindricam sectionem describent, quam ellypsim vocant matici.

Daraus folgt, dass Coppernicus über die Bewegu Systemes beider Kreise auch dann richtige Vorstellunger sobald derselbe nicht mit dem halben Radius des festen beschrieben war.

[1] Le Paige, *Sur un théorème attribué à La Hire.* I theca Mathematica 1887, S. 109.

[2] Nicolai Copernici *Torinensis de revolutionibus coelestium, Libri VI.* Norimbergae apud Joh. Pe Anno M.D.XL.III. Fol. 67. — In der zweiten A (Basileae, Henric Petri Anno M.D.LXVI) steht d liche Stelle ebenfalls auf Blatt 67; in der dritt Nicolaus Muler besorgten (Amstelodami, Wil sonius, Anno MDCXVII) auf Seite 157—159; Säkularausgabe (Thoruni 1873) auf Seite 165—

[3] *Ad clarissimum virum D. Joannem Schonerum a revolutionum eruditissimi viri, et Mathematici excellen Reverendi D. Doctoris* Nicolai Copernici, *Tor Canonici Varmiensis per quendam juvenem, Math studiosum Narratio Prima.* Am Ende: Excusum per Franciscum Rhodum. M.D.XL. Blatt 17^{b} – 1 der Säkularausgabe steht die Stelle Seite 471—.

[4] Nicolai Copernici *Thorunensis De Revolutionib bium Caelestium Libri VI. Ex Auctoris Autogra cudi Curavit Societas Copernicana Thorunensis.* Georgii Joachimi Rhetici *De Libris Revolutionum tio Prima.* Thoruni, Sumptibus Societatis Coper MDCCCLXXIII. S. 166, Zeile 6—1 v. u.

Notizie storiche sulla Geometria numerativa,

di GINO LORIA a Genova.

IV. Legame fra la Teoria dei sistemi di curve o di superficie e quella delle equazioni differenziali.

Di grande importanza per la Teoria dei sistemi di curve piane è il legame che si può stabilire fra essa e quella delle equazioni differenziali (di primo ordine) della forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

rappresentando gl'integrali di una fra queste equazioni con una serie di curve piane di caratteristiche (p, q). L'equazione differenziale data fa allora corrispondere ad ogni punto, p direzioni uscenti da esso; ad ogni retta, q punti posti in essa. A tale corrispondenza fu condotto CLEBSCH nelle sue ricerche sui connessi[64]; indipendentemente da CLEBSCH, essa fu studiata dal FOURET in parecchii lavori[65] e quindi estesa allo spazio.[66]

Fra le applicazioni fatte dal FOURET dalle corrispondenze testè indicate, noteremo l'estensione a sistemi di curve trascendenti del teorema che indica quante curve di un sistema semplicemente infinito tocchino una data curva algebrica[67], la determinazione dell'ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (algebriche o trascendenti) di un sistema semplicemente infinito colle superficie di un sistema analogo doppiamente infinito, e quello dell'ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (algebriche o non) di un sistema doppiamento infinito con una superficie algebrica.[68]

[64] CLEBSCH, *Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*. Mathem. Ann. **6**, 1873, 203—215.

[65] FOURET, *Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques*. Comptes rendus etc. **78**, 1874, 831—834. — *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* ($\mu = 1$, $\nu = 1$). Ib. 1693—1697. — *Intégration géométrique de l'équation $L(xdy - ydx) - Mdy + Ndx = 0$ dans laquelle L, M, N désignent des fonctions linéaires de x et y*. Ib. 1837—1840. — *Sur les points fondamentaux du faisceau des courbes planes dé-*

fini par une équation différentielle du premier ordre a-brique. Comptes rendus etc. **86**, 1878, 586—589. *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, a-briques ou transcendantes, définies par deux caractéristiq* Bull. de la soc. math. de France, **2**, 1874, 72—83. *Sur les courbes planes transcendantes susceptibles de partie d'un système* (μ, ν). Ib. 96—100. — *Du no des branches de courbes d'un système* (μ, ν) *qui coupen courbe algébrique donnée sous un angle de grandeur d ou dont les bissectrices aient une direction donnée.* Com rendus etc. **83**, 1876, 633—636. — *Sur la déterm tion, par le principe de correspondance, du nombr points de contact ou d'intersection sous un angle donn courbes d'un système avec une courbe algébrique.* Bul la soc. math. de France, **5**, 1877, 19—24. — *termination par le principe de correspondance du n des points d'un plan en lesquels se touchent trois c appartenant respectivement à trois systèmes donnés.* 130—134.

[66] FOURET, *Sur certains groupes de surfaces, algébriques transcendantes, définis par deux caractéristiques.* Comp rendus etc. **79**, 1874, 467—470. — *Propriétés des plexes de surfaces, définis par deux caractéristiques.* 689—693. — *Sur la notion des systèmes généraux de s faces algébriques ou transcendantes, déduite de la notion implexes.* Comptes rendus etc. **80**, 1875, 167—1 — *Sur quelques conséquences d'un théorème général, relati un implexe et à un systeme de surfaces.* Ib. 805—808. *Du contact des surfaces d'un implexe avec une surfac gébrique.* Ib. **82**, 1876, 1497—1500. — *Intégration géo trique de l'équation aux dérivées partielles* $L(px + q$ $- Mp - Nq + R = 0$ *dans laquelle* L, M, N *et désignent des fonctions linéaires de* x, y, z. Comp rendus etc. **83**, 1876, 794—797. — *Sur les points fon mentaux du réseau de surfaces défini par une équa aux dérivées partielles du premier ordre algébrique, liné par rapport à ses derivées.* Comptes rendus, etc. 1878, 654—656.

[67] FOURET, *Nombre des points de contact des courbes algé ques ou transcendantes avec une courbe algébrique.* Co tes rendus etc. **82**, 1876, 1328—1331.

[68] V. i lavori inseriti nel T. **80** dei Comptes ren e che furono già citati nella nota 66).

V. Generalizzazione della Teoria delle caratteristiche.

Un notevole progresso fu fatto della Geometria numerativa coll'introduzione di nuovi enti, oltre alle curve e alle superficie, ai quali è applicabile il metodo di CHASLES; si può dire che CHASLES stesso lo compì colle sue numerose ricerche sulle serie di triangoli.[69] Le prime comunicazioni che egli fece su tale argomento all'Accademia Francese concernono le serie di triangoli simili soggetti a tre condizioni comuni[70] e la determinazione del numero dei triangoli simili soddisfacenti quattro condizioni[71]; altre questioni relative ai triangoli simili furono trattate da CHASLES nelle due comunicazioni successive.[72] Nei lavori seguenti egli si occupò dei triangoli isoperimetri in generale[73] o di quei triangoli isoperimetri di cui si conosce un lato o un vertice[74] e che sono soggetti ad altre tre condizioni comuni.

Dello stesso ordine sono gli studii che guidarono l'HIRST ad estendere alle correlazioni piane e solide[75] la teoria delle caratteristiche; studii che furon poi continuate con successo dallo STURM[76] e dal VISALLI[77] e diedero origine alla memoria: *Über die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde* dovuto allo SCHUBERT.[78]

[69] Della estensione allo spazio di queste ricerche non si occupò, per quanto io so, che l'HOSSFELD, nella memoria: *Über die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung* (Zeitschrift für Mathematik und Physik **29**, 1884, 351—367).

[70] CHASLES, *Questions relatives à des séries de triangles semblables assujettis à trois conditions communes.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 1373—1381.

[71] CHASLES, *Détermination du nombre de triangles semblables qui satisfont à quatre conditions.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 1599—1607.

[72] CHASLES, *Sur les séries de triangles semblables.* Comptes rendus etc. **79**, 1874, 877—885. — *Nouveaux théorèmes sur les séries de triangles semblables.* Ib. **79**, 1874, 1427—1435.

[73] CHASLES, *Théorèmes relatifs à des séries de triangles de même périmètre satisfaisant à quatre conditions.* Comptes rendus etc. **84**, 1877, 55—61.

[74] CHASLES, *Théorèmes relatifs à des séries de triangles, isopérimètres, qui ont un côté de grandeur constant, et satisfont à trois autres conditions diverses.* Comptes rendus

etc. **84**, 1877, 471—477. — *Triangles isopérimètres ayant un côté de longueur constante, et satisfaisant à trois autres conditions.* Ib. 627—632. — *Triangles isopérimètres ayant un coté de grandeur constant et un sommet en un point fixe.* Ib. 1051—1055.

[75] HIRST, *On the correlation of two planes.* Annali di matem. $\mathbf{6}_2$, 1875, 260—297; $\mathbf{8}_2$, 1877, 287—300. — *On the correlation of two planes,* — *Correlation in space.* — *Note on the correlation of two planes.* — Proceed. of the London mathem. soc. **5**, 1874, 40—70; **6**, 1875, 7—9; **8**, 1877, 262—273.

[76] STURM, *Über correlative oder reciproke Bündel.* — *Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften.* Mathem. Ann. **12**, 1877, 254—368; **19**, 1882, 461—486.

[77] VISALLI, *Sulle correlazioni in due spazii a tre dimensioni.* Memorie della R. accademia dei Lincei, $\mathbf{3}_4$, 1886, 579—671.

[78] Journ. für Mathem. **88**, 1880, 311—342.

VI. Principii di corrispondenza e loro applicazioni.

Alla Geometria numerativa appartengono anche i numerosi teoremi che diede CHASLES come applicazioni del principio di corrispondenza da lui scoperto: ne parleremo dopo aver detto qualche cosa di questo.

Per le forme elementari CHASLES lo fece conoscere in alcuni casi particolari fin dal 1855[79] e in generale nella sua comunicazione già citata del 27 Giugno 1864[80]: in seguito[81] egli ne mise in luce i caratteri particolari. Più tardi egli e CAYLEY[82] l'estesero a tutte le forme razionali di prima specie. Il SALTEL indicò poi[83] un metodo per distinguere le coincidenze che avvengono a distanza finita e ne fece molteplici e interessanti applicazioni[84]. — La generalizzazione del principio di corrispondenza a sistemi di punti appartenenti a curve di genere qualunque è dovuta a CAYLEY[85], al quale però non riuscì di dare una dimostrazione generale del risultato al quale l'induzione lo aveva condotto. Ciò fu fatto in due modi diversi dal BRILL[86]; un ulteriore estensione del principio di corrispondenza fu non a guari scoperta dall' HURWITZ[87]. — La generalizzazione del principio di corrispondenza di CHASLES al piano e allo spazio fu trovata dal SALMON[88] e dallo ZEUTHEN[89]; la generalizzazione di esso a spazii lineari qualunque dal PIERI.[90]

Infinite sono le applicazioni che può ricevere il principio di corrispondenza anche limitato a forme razionali di prima specie: a tali applicazioni son dedicate le numerose comunicazioni fatte da CHASLES all'Accademia Francese negli ultimi anni della sua vita. Noteremo fra esse la determinazione della classe dell'evoluta e della caustica per riflessione di una curva algebrica piana[91]; la dimostrazione di molti teoremi di vario genere delle curve d'ordine qualunque[92]; quella di altre proprietà relative ai diametri[93], agli assi armonici[94] e alle oblique condotte dei punti di una curva sotto angoli della stessa grandezza[95]; ai poligoni inscritti o circoscritti a curve di ordine o classe qualunque.[96] Col mezzo del principio di corrispondenza, CHASLES estese anche la teoria delle normali a curve algebriche[97] e stabilì molti teoremi generali relativi al movimento di una figura piana nel proprio piano.[98] Di grande interesse teorico è la determinazione che egli fece mediante lo stesso principio del numero delle intersezioni di due curve appartenenti allo stesso piano[99]; il ragionamento che lo guidò a questo risultato può generalizzarsi e conduce in molti casi a trovare il numero delle soluzioni di n equazioni algebriche con n incognite e a risolver questioni affini, come dimostrarono il FOURET[100] e il SALTEL.[101]

Nè queste sono le uniche applicazioni fatte da CHASLES del suo principio. Egli diede anche molte proposizioni relative a coppie di segmenti posti su tangenti, su normali o su oblique di date curve algebriche e fra i quali esiste una relazione di eguaglianza o che sono in un dato rapporto[102] o che dànno un prodotto costante[103] oppure una somma costante[104]; altri de' suoi teoremi concernono terne analoghe di cui si conosce il prodotto[105] o la somma.[106] Queste ricerche guidarono CHASLES a certe leggi generali relative alla Geometria piana di cui ci sembra opportuno riportare gli enunciati:

I. Quando fra i dati di una questione avente per iscopo la determinazione dell'ordine di un luogo o della classe di un inviluppo, si trova che un punto deve scorrere su una curva d'ordine n, l'ordine cercato o la classe cercata saranno della forma nf, essendo f una funzione degli altri dati della questione. E correlativamente.[107]

II. Quando nella ricerca dell'ordine di un luogo o della classe di un inviluppo intervengono i punti di una curva d'ordine n e classe ν e le tangenti in essi, l'ordine cercato o la classe cercata saranno della forma $nf + \nu\varphi$, ove f e φ sono funzioni degli altri dati della questione.[108]

III. Quando nella ricerca dell'ordine di un luogo o della classe di un inviluppo intervengono un punto di una curva d'ordine n e classe ν e la tangente in un altro punto, l'ordine o la classe conterranno nella loro espressione il fattore $n\nu$; che se invece intervengono un punto della curva e le tangenti condotte da esso alla curva stessa, l'ordine o la classe saranno della forma $nf + \nu\varphi + n\nu F$, essendo f, φ, F funzioni degli altri dati.[109] La dimostrazione e la generalizzazione allo spazio di queste leggi, formò argomento di parecchi lavori del FOURET.[110]

Ci è impossibile enumerare tutte le applicazioni che furon fatte del principio di corrispondenza, tanto esse sono numerose e disseminate in lavori di genere diverso. Ci basti di non tacere le dimostrazioni che esso fornì al BERTINI[111], allo ZEUTHEN[112] e allo SCHUBERT[113] del teorema di RIEMANN sull'eguaglianza del genere di due curve punteggiate projettivamente; e le memorie di ZEUTHEN sulle caratteristiche plückeriane dagli inviluppi[114] e su alcune formole e alcuni teoremi di Geometria numerativa.[115]

[79] CHASLES, *Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'une grande usage en géométrie.* Comptes rendus etc. **41**, 1855, 1097—1107.

[80] V. nota 23).

[81] CHASLES, *Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 577—585.

[82] CHASLES, *Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement.* Comptes rendus etc. **62**, 1866, 579—586. — CAYLEY, *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe.* Ib. **62**, 1866, 586—590. — CHASLES, *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement.* Ib. **62**, 1866, 1354—1364.

[83] SALTEL, *Sur une extension analytique du principe de correspondance de M. Chasles.* Comptes rendus etc. **80**, 1875, 1064—1067. Si vegga anche la nota *Sur les courbes gauches du genre zéro.* Ib. 1324—1326.

[84] SALTEL, *Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout.* Comptes rendus etc. **81**, 1875, 884—886. — *Application d'un théorème complémentaire du principe de correspondance, à la détermination sans calcul, de l'ordre de multiplicité d'un point O qui est un point multiple d'un lieu géométrique*

donné. Ib. 1047—1050. — *Détermination, par le principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques.* Ib. **82**, 1876, 63—66. — *Rectification à la communication précédente.* Ib. **83**, 1876, 529—532. — *Détermination par le principe de correspondance analytique, de l'ordre de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou d'une surface donnée.* Ib. 608—611. — *Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface dont l'équation renferme n paramètres liés entre eux par n—2 relations.* Ib. 894—896.

[45] Cayley, *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe.* Comptes rendus etc. **62**, 1866, 586—590. Cfr. anche la memoria citata nella nota 35).

[46] Brill, *Über Entsprechen der Punktsysteme auf einer Curve.* — *Über die Correspondenzformel.* Mathem. Ann. **6**, 1873, 33—65; **7**, 1874, 607—622. Si vegga anche il recentissimo lavoro dello stesso autore: *Über algebraische Correspondenzen.* Mathem. Ann. **31**, 1888, 374—409.

[47] Hurwitz, *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip.* Mathem. Ann. **28**, 1887, 561—585.

[48] Salmon, *Analytical geometry of tree dimensions* (2. ed., Dublin 1865).

[49] Zeuthen, *Sur les principes de correspondances du plan et de l'espace.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 1553—1557.

[50] Pieri, *Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni.* Rendiconti della R. accademia dei Lincei **3**, 1887, *1*: 196—199. Il Caporali giunse prima e indipendentemente dal Pieri allo stesso risultato, ma non lo fece conoscere; v. Caporali, *Memorie di geometria* (Napoli 1888), p. 329—332.

[51] Chasles, *Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre m et de la classe n.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 394—399.

[52] Chasles, *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le principe de correspondance.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 577—588.

[53] Chasles, *Propriété des diamètres des courbes géométriques.* Comptes rendus etc. **72**, 1871, 794—800.

[54] Chasles, *Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques.* Comptes rendus etc.

73, 1871, 229—237. — *Théorèmes concernant les axes harmoniques des courbes géométriques, dans lesquels on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur une courbe unicursale.* Ib. **73**, 1871, 1241—1247. — *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques.* Ib. **73**, 1871, 1289—1296, 1405—1413; **74**, 1872, 21—23.

95 CHASLES, *Théorèmes relatifs aux obliques menées par les points d'une courbe, sous des angles de même grandeur.* Comptes rendus etc. **74**, 1872, 1146—1154, 1277—1279.

96 CHASLES, *Sur les polygones inscrits ou circonscrits à des courbes.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 922—928.

97 CHASLES, *Généralisation de la théorie des normales des courbes géométriques où l'on substitue à chaque normale un faisceau de droites.* Comptes rendus etc. **80**, 1875, 505—512.

98 CHASLES, *Théorèmes généraux sur le déplacement d'une figure sur un plan.* Comptes rendus etc. **80**, 1875, 346—352.

99 CHASLES, *Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie.* Comptes rendus etc. **75**, 1872, 736—744; **76**, 1873, 126—132.

100 FOURET, *Détermination à l'aide du principe de correspondance, du nombre des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues.* Comptes rendus etc. **78**, 1874, 183—186. — *Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques.* Bullet. de la soc. mathém. de France **1**, 1873, 122 e seg. — *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface.* Ib. **1**, 1873, 258 e seg. — *Démonstration du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues.* Ib. **2**, 1874, 127—139.

101 SALTEL, *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique.* Mémoires de l'académie de Belgique (in 8:o) **24**, 1875 (n° 5, 33 pages). — *Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout.* Comptes rendus etc. **81**, 1875, 884—886. — *Détermination, par le*

principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. Ib. **82**, 1876, 63—66. — *Sur le principe de correspondance et le moyen qu'il offre de lever quelques difficultés dans les solutions analytiques.* Ib. **82**, 1876, 324—326.

102 CHASLES, *Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes.* Comptes rendus etc. **81**, 1875, 253—259. — *Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes.* Ib. **81**, 1875, 355—360. — *Nouveaux théorèmes relatifs à des conditions d'égalité de grandeur des segments rectilignes sur les tangentes des courbes géométriques, d'ordre et de classe quelconques.* Ib. **81**, 1875, 643—649. — *Détermination de la classe des courbes enveloppes qui se présentent dans la question d'égalité de grandeur de deux segments faits sur des tangentes de courbes géométriques.* Ib. **81**, 1875, 757—762. — *Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'égalité de deux segments pris sur des normales et des tangentes des courbes d'ordre et de classe quelconques.* Ib. **81**, 1875, 993—999. — *Théorèmes dans lesquels se trouvent des couples de segments ayant un rapport constant.* Ib. **81**, 1875, 1221—1227. — *Théorèmes relatifs à des couples de segments rectilignes ayant un rapport constant.* Ib. **83**, 1876, 97—101.

103 CHASLES, *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments ayant un produit constant.* Comptes rendus etc. **82**, 1876, 1399—1405. — *Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditions de produit constant de deux segments variables.* Ib. **82**, 1876, 1463—1469.

104 CHASLES, *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante.* Comptes rendus **83**, 1876, 467—472, 495—501, 519—524. — *Théorèmes relatifs à des couples des segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux courbes étant d'ordre et de classe quelconque.* Ib. **83**, 1876, 1123—1129. — *Théorèmes concernant des couples de segments pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant

[illegible] *[illegible] courbes étant d'ordre [illegible]*. Ib. **83.** 1876. 1105—1201.

[illegible] CHASLES. *[illegible] à des systèmes de trois segments [illegible]. — Rectification à une [illegible]*. — Comptes rendus **83.** 1876. 580—594, [illegible]

[illegible] CHASLES. *[illegible] systèmes de trois segments [illegible]*. Comptes rendus etc. **83.** 1876. [illegible]

[illegible] CHASLES. *[illegible] géométriques.* Comptes rendus etc. **84.** 1877. [illegible]—674.

[illegible] CHASLES. *[illegible] géométriques concernant [illegible] d'une courbe [illegible]* etc. Comptes rendus etc. **85.** 1877. [illegible]

[illegible] CHASLES. *[illegible] géométriques d'ordre [illegible]*. Comptes rendus etc. **85.** 1877. [illegible]

[illegible] *[illegible] géométriques énoncées [illegible]*. Comptes rendus etc. **85.** 1877. 134 [illegible] *[illegible] relatives [illegible] M. Chasles.* Ib. **85.** 1877. [illegible] *[illegible] classes d'une [illegible] chaque tangente [illegible] d'une autre courbe [illegible]*. Ib. **85.** 1877. 844 [illegible] *[illegible] la classe [illegible] chaque [illegible] d'une tangente [illegible]*. Ib. **85.** 1877. 944 [illegible]

[illegible] *[illegible] pan-[illegible]*. Giornale di matematiche [illegible] 1869. [illegible]—120.

[illegible] *[illegible] sur des séries [illegible]*. Mathem. Ann. **3.** 1871. [illegible]

[illegible] SCHUBERT. *[illegible] bei zwei [illegible]*. Mathem. Ann. **10.** 1876. [illegible]

[illegible] *Détermination [illegible] des [illegible]*. Comptes rendus etc. **78.** 1874. 274—278.

339—342. Ivi trovasi l'estensione della nozione di genere ai sistemi di curve piane.

[115] ZEUTHEN, *Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative.* Acta Mathem. **1**, 1882, 171—188.

VII. Ricerche di Halphen.

CHASLES guidato dall'induzione affermò che in un sistema semplicemente infinito di coniche, il numero delle coniche sodisfacenti una nuova condizione semplice è espresso mediante una funzione lineare omogenea delle caratteristiche del sistema. Un teorema analogo pei sistemi doppiamente infiniti fu supposto dal CREMONA.[116]

Nè l'uno nè l'altro sono veri incondizionatamente. Questa osservazione fu fatta dal SALTEL[117] e dall'HALPHEN.[118] Ma le modificazioni necessarie all'enunciato di CHASLES (le quali provengono da una forma degenere di conica sfuggita al grande geometra) e la ricerca dei casi in cui esso è vero, sono il tema di parecchii importantissimi scritti dell' HALPHEN.[119] I tentativi fatti prima per dimostrare l' asserzione di CHASLES sono di CLEBSCH[120], HALPHEN[121], LINDEMANN[122], SCHUBERT[123] e HURWITZ[124] e di altri. I migliori fra i lavori a noi noti, che seguirono quelli di HALPHEN, esponendo diversamente i di lui risultati o sviluppando i suoi concetti, sono uno del DEL PEZZO[125], due dello STUDY[126], e uno infine del BURALI-FORTI.[127]

[116] CREMONA, *Sur le nombre des coniques qui satisfont à des conditions doubles.* Comptes rendus etc. **59**, 1864, 776—779.

[117] SALTEL, *Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à une cinquième condition.* Bulletin de l'académie de Belgique **42**$_2$, 1876, 617—624.

[118] HALPHEN, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques.* Comptes rendus etc. **83**, 1876, 537—538. — *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.* Ib. 886—888.

[119] HALPHEN, *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques.* — *Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles.* Proc. of the London mathem. soc. **9**, 1878, 149—170; **10**, 1879, 76—87. — *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques.* Mathem. Ann. **15**,

1876. 10—38. — *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.* Journal de l'école polytechnique de Paris 45. 1878, 27—90.

[121] CLEBSCH. *Zur Theorie der Charakteristiken.* Mathem. Ann. 6. 1873. 1—15.

[122] HALPHEN. *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre.* Bullet. de la soc. mathem. de France 1. 1873. 130—141. 226—240; 2. 1874. 11—33. — *Application de la théorie des caractéristiques par les coniques à une question relative aux polygones de Poncelet.* Bulletin de la société philomatique de Paris 3. 1876. 1—10.

[123] CLEBSCH. *Vorlesungen über Geometrie. Herausgegeben von* F. LINDEMANN (Leipzig 1875, in-8°).

[124] Vedi nota 124.

[125] HURWITZ und SCHUBERT. *Über den Chasles'schen Satz* [illegible]. Nachrichten der Universität zu Göttingen 1876, p. 503 e seg.

[126] DEL PEZZO. *Sui sistemi di coniche.* Rendiconto dell'accademia delle scienze di Napoli 23. 1884, 61—73.

[127] STUDY. *Über die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem.* Mathem. Ann. 27. 1886. 58—101, 102—105.

[128] BURKHARDT. *Sui sistemi di coniche.* Giornale di matematiche 24. 1886. 320—333. — Per le ricerche analoghe sulle quadriche si vegga l'ultima delle memorie del HALPHEN citate nella nota 120 e lo scritto del BURKHARDT, *Sui sistemi lineari di quadriche* (Giornale di matematiche 24. 1886, 334—345).

VIII. L'opera di H. Schubert.

L'ultimo progresso notevole fatto dalla Geometria numerativa è dovuto allo SCHUBERT. Taccio delle note che questo scienziato pubblicò a varie riprese nelle Göttinger Nachrichten perchè i risultati ivi consegnati si ritrovano ampliati in altri lavori. Cito invece le importanti memorie dei Mathematische Annalen [129], le quali contengono i principii di una teoria metodica della dottrina che ci occupa e la loro applicazione allo studio delle tangenti singolari delle superficie algebriche [130] e alla determinazione delle singolarità dei

[redacted]

complessi di rette. Il contenuto di queste memorie è poi passato a far parte dell'importantissima opera *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879) dalla cui comparsa può farsi datare l'erezione della Geometria numerativa a dottrina individuale[130]; come punti più salienti di essa rileveremo l'esposizione da un punto di vista elevato e generale dei principii di corrispondenza già noti e la dimostrazione di altri nuovi, l'enunciato generale del problema delle caratteristiche e i metodi atti a risolverlo in un gran numero di casi. Non dubitiamo che la considerazione in cui è tenuta quest'opera, che è già grande, andrà vieppiù crescendo col numero dei geometri che si dedicheranno allo studio e all'applicazione di quanto essa racchiude.

Sono continuazione di essa gli studii dello stesso SCHUBERT sulla Geometria numerativa del triangolo[131], delle corrispondenze trilineari[132] e delle corrispondenze quadratiche[133]. Dell'estensione delle teorie della Geometria numerativa agli spazii lineari comunque estesi trattano due importanti scritti recenti dello SCHUBERT.[134] Infine, del *Kalkül der abzählenden Geometrie* si servì il KREY studiando una particolare corrispondenza fra due superficie[135] e lo STURM per semplificare la soluzione che egli aveva dato[136] del problema della projettività nello spazio.[137]

[128] SCHUBERT, *Beiträge zur abzählenden Geometrie. Erste Abhandlung; Moduln vielfacher Bedingung bei Flächen zweiter Ordnung. — Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. — Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen. — Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades.* Mathem. Ann. **10**, 1876, 1—116, 318—364; **11**, 1877, 347—378; **12**, 1877, 180—201, 202—221.

[129] Il KREY estese più tardi (*Über singuläre Tangenten algebraischer Flächen;* Mathem. Ann. **15**, 1879, 211—237) i teoremi di SCHUBERT a superficie dotate di singolarità.

[130] Cfr. CAYLEY. *On Schubert's method of the contact of a line with a surface.* Quarterly journal of mathematics **17**, 1880, 247—258. — HALPHEN, *Observations sur la théorie des caractéristiques.* Bullet. de la soc. mathém. de France **8**, 1880, 31—34. — SCHUBERT. *Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques.* Ib. 60—61. *Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple.* Ib. 61—62.

[131] SCHUBERT, *Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks*. Mathem. Ann. **17**, 1880, 153—212.

[132] SCHUBERT, *Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems*. Hamburg 1882 (Programm).

[133] SCHUBERT, *Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformationen der Ebene*. Mittheil. der Mathem. Gesellsch. in Hamburg **1**, 1882, p. 31 e seg.

[134] SCHUBERT, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums*. Mathem. Ann. **26**, 1886, 26—51. — *Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension*. Acta Mathem. **8**, 1886, 97—118.

[135] KREY, *Über einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen*. Mathem. Ann. **18**, 1881, 82—90.

[136] STURM, *Das Problem der räumlichen Projectivität*. Mathem. Ann. **6**, 1873, 513—550.

[137] STURM, *Über correlative oder reciproke Bündel*. Mathem. Ann. **12**, 1877, 254—368.

Über eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler.

Von S. GÜNTHER in München.

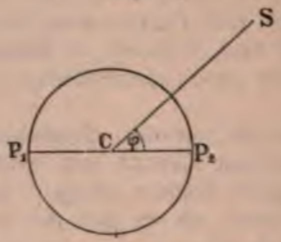
Dass JOHANN KEPLER unter den Vorläufern von LEIBNIZ obenansteht und bei verschiedenen Gelegenheiten Operationen ausführt, welche man nicht anders denn als *wirkliche Integrationen* bezeichnen kann, darf als eine bekannte Thatsache gelten; wir verweisen z. B. auf PFLEIDERER's[1] und GERHARDT's[2] Darstellungen der in der *Stereometria doliorum* niedergelegten Gedanken. Jedoch ist es nicht allein dieses allerdings besonders bemerkenswerte Werk, welches für KEPLER's Antizipation von Infinitesimalbetrachtungen in Frage zu kommen hat, vielmehr geben auch die astronomischen Schriften zum öftern Veranlassung, die Kühnheit des Ideenfluges zu bewundern, mit welcher der grosse Denker sich über Schwierigkeiten hinwegzusetzen verstand, zu deren Bewältigung es noch keine methodischen Hilfsmittel gab. Einer der interessantesten unter diesen Fällen soll im Folgenden näherer Betrachtung unterzogen werden; das Interesse steigert sich noch, wenn man erfährt, dass KEPLER durch das Studium des PAPPUS dazu angeregt wurde, einen strengen Beweis für eine Wahrheit zu führen, zu deren Erkenntnis ihm vorher nur eine unvollständige Induktion verholfen hatte.

Die Bekanntschaft mit der »Sammlung» des alexandrinischen Kommentators hat KEPLER erst verhältnismässig spät gemacht; seiner eigenen Angabe zufolge[3] war ihm diese reiche Quelle noch unbekannt, als er sich mit der Ausarbeitung der *Astronomia nova* beschäftigte, wogegen er in der *Harmonice mundi* sich bereits mit PAPPUS wohl vertraut zeigt. So gedenkt er[4] in der Einleitung zu genanntem Buche ebenso wie an anderer Stelle[5] der von PAPPUS ausgegangenen Einteilung der geometrischen Aufgaben in lineare, ebene und körperliche, und fügt hinzu, dass zur Auflösung eines Problemes der dritten Art die Mittel der Elementargeometrie nicht mehr ausreichen. Die Trisection des Winkels z. B. sei eine solche; sie lasse sich nicht mit Lineal und Zirkel, wohl aber durch Anwendung einer Hyperbel, Quadratrix oder Helix bewerkstelligen. Auch der Theorie der Isoperimeter, wie sie bei PAPPUS zu finden, geschieht mehrfach Erwähnung; einmal wird der Kreis als ein solches Gebilde

bezeichnet[6], ein andermal stützt sich der Beweis für die Behauptung, die Gestalt des Kosmos müsse eine sphärische sein, auf den Lehrsatz, dass die Kugel bei geringster Oberfläche den grössten Raum einschliesse.[7] Auch die sogenamnte GULDIN'sche Regel, die ja eigentlich auf PAPPUS zurückgeht, wird in der »Fassberechnung« bei der Kubatur eines Torus-Körpers benützt[8], ohne dass jedoch über den Bezug dieses Verfahrens eine Bemerkung beigefügt wäre.

Treten wir nunmehr dem Gegenstande näher, welchem diese Note in erster Linie gewidmet ist. Bei seinen Bestrebungen, für die Abweichung der Planetenbahn von der reinen Kreisform eine physikalische Ursache auszumitteln, war KEPLER auf seine eigentümliche Lehre *vom planetarischen Magnetismus* verfallen, deren Eigenart in allen den teilweise vorzüglichen Schriften, welche über KEPLER'sche Kosmologie erschienen sind, nicht die ihr vonrechtswegen zukommende Beachtung gefunden hat*. Hier lässt sicht natürlich nur soviel mitteilen, als zum Verständnisse der zu besprechenden mathematischen Entwicklung unbedingt erforderlich ist. Die ganze Planetenkugel, so wird angenommen, ist magnetisch, der Sonnenkörper ist es nicht minder, und zwar strebt der eine Pol P_1 (Fig. 1) der Sonne

Fig. 1.



zu, während der andere Pol P_2 von ihr abgestossen wird. Mit einer geradezu staunenswerten Energie ringt nun KEPLER danach, einen mathematischen Ausdruck zu finden für das Verhältnis, in welchem Anziehung a_1 und Abstossung a_2 oder, um in der Sprache des Originales zu reden, *appetentia* und *fuga* zu einander stehen. Wenn die vom Zentrum C nach der Sonne S

* Aus diesem Grunde hat der Verf. Gewicht darauf gelegt, in einer demnächst erscheinenden, einem allgemeinerem Zwecke zugewandten Abhandlung* gerade auch die Hypothese von den magnetischen Planetenachsen mit den anderweiten Anschauungen KEPLER's über magnetische Dinge gemeinsam zu beleuchten.

gezogene grade Linie mit der Achse $P_1 P_2$ den spitzen Winkel φ einschliesst, so muss obiges Verhältnis, modern ausgedrückt, eine Function von φ sein, und diese Grösse $F(\varphi)$ ist es eben, auf deren Bestimmung es ankommt. Hiezu bedürfte es natürlich mehrerer Bedingungen; eigentlich aber ist deren nur eine vorhanden, nämlich die, dass wenn φ ein rechter Winkel wird, der Bruch $\frac{a_1}{a_2} = F(\varphi) = F(90^\circ)$ den Wert 1 annehmen muss. Da dies also nicht hinreicht, müssen wohl oder übel willkürliche Voraussetzungen aushelfen, und man weiss, dass KEPLER um solche niemals verlegen war, unbekümmert darum, ob eine solche Annahme nur ein sehr kurzes Dasein hatte und recht bald wieder verworfen werden musste. Zuerst soll, wenn wir wieder das konkrete Bild unserer Formeln an die Stelle der damals notwendigen Umschreibungen setzen, $F(\varphi) = \frac{2\varphi}{360^\circ - 2\varphi}$ sein, was allerdings der einzigen vorhandenen Anforderung genügt, aber doch bald sich als so wenig zutreffend erweist, dass der Autor selbst mit einem »*falsum hoc*« darüber zur Tagesordnung übergeht.* Besser gelingt anscheinend der Versuch, trigonometrische Grössen einzuführen; anfänglich schwankt die Wahl noch, doch wird $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi$ als wahrer Wert schliesslich anerkannt. Es soll nämlich sein

$$a_1 = \text{konst.}(1 - \cos\varphi), \qquad a_2 = \text{konst.}(1 + \cos\varphi),$$

somit

$$\frac{a_1}{a_2} = F(\varphi) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi.$$

So für die eine Hälfte der Umlaufszeit, während für die andere natürlich der Tangente die Kotangente zu substituiren wäre.

Wir beschäftigen uns von nun an ausschliesslich mit der Art und Weise, wie KEPLER die Grösse a_1 bestimmt, indem seinen Ansichten gemäss a_2 damit zugleich gegeben ist. Den Schlüssel liefert der folgende Ausspruch:[11] *Cum cujusque arcus sinus sit mensura fortitudinis illius anguli, summa sinuum erit fere mensura summae fortitudinum seu impressionum per omnes partes aequales circuli: quarum omnium communis effectus est tota*

* Die betreffende Stelle findet sich[10] als Randnotat in einem an den bekannten friesischen Mathematiker DAVID FABRICIUS gerichteten Briefe.

libratio peracta.* Das heisst aber doch offenbar nichts anderes als: *Zerlegt man den Bogen φ in unendlich viele, unendlich kleine und gleiche Teile, so gilt es, um a_1 zu erhalten, nur die Sinus aller dieser Bogen, vom Anfangspunkte aus, zu summieren.* Heutzutage erfüllen wir diese Forderung, indem wir

$$\int_0^\varphi \sin\varphi \, d\varphi = -\Big|_0^\varphi \cos\varphi = -\cos\varphi + 1 = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$$

bilden. Wenn also auch Kepler seinerseits zu diesem Resultate, resp., wie er dies meistenteils nennt, zum Sinus versus von φ gelangt, so kann man zweifellos mit allem Rechte die These formulieren: Kepler *hat bereits das einfachste unter den Integralen goniometrischer Funktionen — und zwar nicht etwa als unbestimmtes, sondern als bestimmtes Integral — auszuwerten verstanden.*

Wie in Wahrheit zuerst diese Entdeckung gemacht ward, entzieht sich unserer Kontrolle, denn Kepler begnügt sich mit einem Beweise *a posteriori*, der ein sehr empirisches Gepräge trägt. Er setzt nämlich etwas kühn $d\varphi = 1°$, bildet die Summe:

$$\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \ldots$$

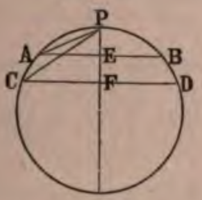
indem er für jeden einzelnen Sinus die Zahl aus seiner Tafel entnimmt, und zeigt am Spezialfalle $\varphi = 90°$, dass in der Tha

$\sum_{p=0}^{p=89} \sin(1 + p)$ von sin vers* $90° = 100000$ nicht allzuviel ve schieden ist. Besser gelingt die Verification noch in einer anderen Spezialfalie. Vorläufig lässt Kepler es bei dieser a genäherten Rechnung bewenden, offenkundig deshalb, weil über besseres nicht zu verfügen hatte — läge also nichts we teres vor, so wäre unsere obige These zwar nicht gerade u richtig, allein der Vorhalt läge doch auch nicht ferne, da einem gelegentlichen Aperçu, welches mehr zufällig als notwe dig das richtige traf, eine zu hohe Bedeutung beigelegt word wäre.

* Diese ›Schwankung‹ der von Kepler den Planeten verliehen magnetischen Achsen hat selbstverständlich nichts mit dem gemein, man späterhin als Libration bezeichnete. Indem der eine Pol sich d Zentralkörper zu nähern, der andere dagegen von diesem zu entfernen such konnte es nicht ausbleiben, dass die Achse von dem ihr eigentlich zuget ten Parallelismus abgelenkt wurde. Die enge Kausalverbindung in welc diese Libration zur Auffindung des ersten — chronologisch betrachtet, zwei ten — Kepler'schen Gesetzes steht, ist unserer festen Überzeugung nach noch nicht so erklärt, wie es die Geschichtsforschung wünschen müsste.

Allein, sobald KEPLER mit PAPPUS bekannt wurde, änderte sich, wie er selbst uns berichtet, die Sache. Im fünften Buche der *Epitome*[12] lässt er sich nämlich darüber folgendermassen vernehmen: *Demonstrationem ejusdem theorematis per numeros et anatomiam circuli* — das ist eben die direkte Zahlenberechnung von vorhin — *vide tentatam in Comm. Martis Cap. LVII. Ibi loci videbatur haec proportio nonnihil deficere, quia Pappum nondum legeram* . . .' Dieser erst habe ihm die Augen geöffnet, und zwar durch das nachstehende Theorem seines fünften* Buches:[14] Wenn AB und CD (Fig. 2) zwei Parallelkreise einer Kugel

Fig. 2.



sind, deren gemeinschaftlicher Pol P ist, so verhalten sich die Oberflächen der durch diese Kreise abgeschnittenen Kalotten APB, CPB zu einander wie die Flächeninhalte der über AP und CP als Durchmessern beschriebenen Kreise. Hieraus folgt nämlich, wenn E und F bezüglich die Mittelpunkte der beiden Parallelkreise vorstellen, dass sich die beiden Kalotten auch, unter ρ den Kugelradius verstanden, wie $2\rho.PE : 2\rho.PF$ oder wie $PE : PF$ verhalten; man braucht nur die Höhe irgend einer Kugelhaube nach einem vorgegebenen Verhältnisse zu teilen, um durch den dem Teilungspunkte entsprechenden, der Basis parallelen, Kreis auch die Oberfläche im gleichen Verhältnisse geteilt zu bekommen. Daraus folge, dass man in der erwähnten Summe der Sinus den Zuwachs des Argumentes so klein machen dürfe, als man wolle, und wenn man ihn kleiner als jede noch so kleine Grösse werden lasse, so stelle sich eine Summe heraus, welche dem Sinus versus nicht blos beinahe (*fere*), sondern in aller Strenge gleich sei.** Hierin

* FRISCH nennt irrtümlich das achte Buch als dasjenige, aus welchem KEPLER sich Belehrung erholt habe.[13]

** Der Zusammenhang zwischen der Librationstheorie und dem — gegenwärtig auch in die elementarsten Lehrbücher der Raumlehre übergegangenen — Lemma des PAPPUS liegt in KEPLER's Festsetzung, dass die Kräfte a_1 und a_2 jeweils den von der *appetentia* und *fuga* beherrschten Kugelkalotten proportional seien.

ist denn doch der Begriff des Unendlichkleinen und der Gegensatz der Differenzialrechnung gegenüber der Rechnung mit endlichen — wenn auch kleinen — Differenzen klar und bestimmt ausgesprochen, und es ist kein Zufall, dass gerade hiermit zuerst das früher vermiedene Wort »unbegrenzt« ausgesprochen wird.*

Die eigentliche Herleitung des Satzes, dass das Integral von $\sin\varphi$, zwischen den Grenzen φ und 0 genommen $= 1 - \cos\varphi$ sei, denkt sich FRISCH in seinen trefflichen Scholien zur KEPLER-Ausgabe vor sich gegangen, wie folgt. Kurz vorher, ehe er die Funktion $F(\varphi)$ zu ermitteln unternimmt, hat KEPLER, indem er sich auf CARDANUS und JOST BÜRGI beruft, darauf hingewiesen, dass

$$\text{(I)} \qquad \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \operatorname{cotang}\frac{1}{2}\varphi$$

sei, vorausgesetzt, es könne $n\varphi = \pi$ gesetzt werden. Dann ist natürlich

$$\text{(II)} \quad \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin\frac{1}{2}n\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}\varphi.$$

Andererseits weiss man, dass, unter n' eine beliebige ganze Zahl verstanden

$$\text{(III)} \qquad \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n'\varphi =$$
$$\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}(1 - \cos n'\varphi)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}\varphi$$

ist; es besteht also auch die Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n'\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi} =$$
$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + 1 - \cos n'\varphi.$$

Nun soll aber, wie jeder folgende, so schon der erste Bogen unendlich klein sein, $\sin^2\varphi$ ist somit ein der Null gleich zu achtendes Glied; über die Grösse n ist noch nicht verfügt, sie kann also so gewählt werden, dass der links im Nenner stehende Bruch der Einheit gleich wird, und dann ist das den Zähler einnehmende Integral gleich dem rechts stehenden Sinus versus, wobei n' als unendlich gross angenommen wurde. An

* Wir meinen diese Stelle[18]: *Atqui si sphaerica superficies intelligatur divisa in zonas infinitas aeque latas, erit quaelibet zona ut circulus aliquis latitudine carens.*

und für sich hat die Ableitung, so wie sie FRISCH gibt, eine entschiedene Schwäche* die wir soeben thunlichst zu heben trachteten, allein auch in dieser Gestalt scheint sie weder sachlich noch historisch das zu leisten, was sie leisten soll.

Wir müssen es vielmehr eingestehen: über KEPLER's Entdeckungsgang breitet sich in diesem Falle ein Schleier, welchen zu lüften wir nicht imstande sind. Die Thatsache selbst jedoch, um deren Feststellung es uns zu thun war, wird durch diesen Mangel unserer Erkenntnis nicht berührt, vielmehr steht es fest, dass der grosse Astronom, nachdem ihm eine anscheinend sehr harmlose Stelle bei PAPPUS plötzlich den wahren Sinn des Infinitesimalbegriffes erschlossen hatte, eine Summation vollzog, welche durchaus einer Integration der Jetztzeit äquivalent ist.

[1] PFLEIDERER, *Kepleri methodus, solida quaedam sua dimetiendi, illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata* (Tübingen 1795).
[2] GERHARDT, *Die Entdeckung der höheren Analysis* (Halle 1855), S. 15 ff.
[3] KEPLER, *Opera omnia, ed.* FRISCH. Vol. VI (Frankfurt und Erlangen 1866), S. 407.
[4] Ibid. Vol. V, S. 80.
[5] Ibid. Vol. V, S. 110.
[6] Ibid. Vol. IV, S. 607.
[7] Ibid. Vol. VI, S. 140.
[8] Ibid. Vol. IV, S. 582 ff.
[9] GÜNTHER, *Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus* (Wien 1888). Geographische Abhandlungen herausg. von PENCK. Band 3, Heft 2.
[10] KEPLER, *Opera omnia, ed.* FRISCH, Vol. III, S. 103.
[11] Ibid. Vol. III, S. 390.
[12] Ibid. Vol. VI, S. 407.
[13] Ibid. Vol. III, S. 501.
[14] PAPPI *Alexandrini Collectionis quae supersunt, ed.* F. HULTSCH, Vol. I (Berlin 1876), S. 407 ff.
[15] KEPLER, *Opera omnia, ed.* FRISCH, Vol. VI, S. 407.

---

* Diese Schwäche, welche man auch als eine Erschleichung auffassen könnte, wenn nicht einem Manne wie FRISCH gegenüber auch die Möglichkeit der Begehung eines absichtlichen Fehlers ausgeschlossen wäre, liegt darin, dass φ in (II) und (III) strenge genommen nicht den nämlichen Bogen bedeutet. Und doch wurden beide φ als gleich angenommen, um in (IV), welche Gleichung durch Division mit (II) in (III) entstand, das Fortheben zu ermöglichen.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von **M. Cantor.** XXXII. Jahrgang. Leipzig, Teubner 1887. In-8°, VI+240 p.

La Zeitschrift für Mathematik und Physik a été fondée en 1856. Déjà la première année en contenait des mémoires relatifs à l'histoire des mathématiques, p. ex. celui de M. Cantor: *Über die Einführung unserer gegenwärtigen Zahlzeichen in Europa;* de plus, le journal était accompagné d'une Literaturzeitung, où il y avait aussi des analyses d'ouvrages d'histoire des mathématiques. A partir de l'année 1857 on trouve, dans la table des matières, une rubrique spéciale intitulée: »Geschichte der Mathematik», et, en effet, chaque volume contenait plusieurs articles historiques; la plupart de ces articles étaient de la main de M. Cantor, qui fut en 1859 un des directeurs du journal. En 1875 les mémoires historiques furent séparés des autres mémoires et réunis avec les analyses sous le titre: *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.* Cependant il faut observer qu'il il y a beaucoup de mémoires historiques publiés par la rédaction de la Zeitschrift, non dans cette »Abtheilung», mais dans des suppléments dont quelques uns portent le titre spécial: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.*

Les mémoires d'histoire des mathématiques publiés ainsi par la Zeitschrift für Mathematik und Physik renferment beaucoup de recherches importantes et ont contribué puissamment au développement de cette science.

Le 32ᵉ tome dont nous rendrons compte ici, contient six mémoires ou notes d'histoire des mathématiques, dont *deux* se rapportent à l'antiquité, *un* au moyen âge, *deux* au 16ᵉ siècle, enfin *un* à Gauss.

Le mémoire de M. Demme: *Die platonische Zahl* (p. 81—99, 121—132) contient une étude sur le nombre géométrique de Platon signalé dans un passage du 8ᵉ livre de la »République». Ce passage renfermant une sorte d'énigme, a été l'objet de nombreuses et savantes recherches, sans qu'il ait été possible d'en donner une interprétation qui satisfasse à tous. M. Demme émet une nouvelle conjecture sur le nombre de Platon, fort ingénieuse sans doute, mais qui ne nous semble pas plus problable que plusieurs des interprétations antérieures.

Dans la note: *Bemerkung zu einer Stelle im Almagest* (p. 201—208), M. WITTSTEIN a pris pour point de départ une inscription se trouvant au célèbre globe céleste exécuté en 1225 par l'astronome arabe KAISAR et indiquant que, à cause de la précession des équinoxes, il fallait ajouter 16° 46′ aux longitudes des étoiles dans le catalogue de PTOLÉMÉE. M. WITTSTEIN compare la position de l'étoile Regulus signalée par PTOLÉMÉE avec celle calculée par les astronomes modernes, et il trouve une différence dont il examine la cause.

M. SUTER a publié (p. 41—56) un petit traité du géomètre ALBERTUS DE SAXONIA intitulé: *Questio de proportione dyametri quadrati ad costam *ejusdem*, et un autre traité: *Datis duabus lineis inequalibus, inter eas duas medias proportionales invenire*, également composé par quelque géomètre du moyen âge. Le premier traité contient des démonstrations du théorème que la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté, le second est essentiellement une réproduction de deux méthodes indiquées par EUTOKIOS pour construire deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

M. ANSCHÜTZ a inséré (p. 1—15) la fin de son mémoire: *Über die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes*, où il rend compte des efforts de KEPLER pour découvrir et expliquer les inégalités du mouvement de la lune.

M. BIERENS DE HAAN a publié (p. 161—173) *Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantijn Huygens*, se rapportant à une polémique entre les géomètres néerlandais STAMPIOEN et WAESSENAER au sujet de l'extraction de la racine cubique d'un binôme irrationnel. Dans cette dispute, DESCARTES a joué un rôle important en fournissant au WAESSENAER les arguments dont celui-ci se servait. M. BIERENS DE HAAN a ajouté une traduction en français des passages écrits en néerlandais et plusieurs notes biographiques ou bibliographiques.

M. SIMON a donné (p. 99—101) un *Verzeichniss von Druckfehlern in der Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe*, d'où il résulte que plusieurs des errata de l'édition originale de ces mémoires ont été conservés dans les réimpressions.

Le volume dont nous traitons contient aussi un appel de M. FAVARO, relatif aux manuscrits galiléiens, des listes d'écrits de mathématiques publiés en 1887, deux »Abhandlungsregister» pour l'année 1886, et un grand nombre d'analyses d'ouvrages récemment publiés. Parmi les ouvrages analysés se trouvent plusieurs relatifs à l'histoire des mathématiques p. ex. par MM.

[redacted]

HEIBERG, BILFINGER, GIESING, TANNERY, MENDTHAL, GÜNTHER, ANSCHÜTZ, MARIE, ALBRECHT, WAPPLER, FAVARO, FRIIS, ROTHLAUF et HARNACK. Les analyses des ouvrages des auteurs cités sont toutes de la main de M. CANTOR, et elles renferment beaucoup de remarques importantes ayant trait au sujet auquel se rapporte chaque ouvrage.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

A. Favaro. PER LA EDIZIONE NAZIONALE DELLE OPERE DI GALILEO GALILEI SOTTO GLI AUSPICII DI S. M. IL RE D'ITALIA. ESPOSIZIONE E DISEGNO. Firenze 1888. In-4°, 57 p.

Le gouvernement italien a décidé de faire publier une édition complète des oeuvres de GALILEO GALILEI, et M. A. FAVARO a été chargé de rédiger cette édition. Avant de commencer cette entreprise, M. FAVARO a jugé à propos de résumer les raisons pour lesquelles on a trouvé nécessaire de publier la nouvelle édition, et les principes qui seront suivis par la rédaction. A cet effet, il rend compte des éditions antérieures des oeuvres de GALILEI, parues à Bologna en 1655—1656, à Firenze en 1718, à Padova en 1744, à Milano en 1808—1811 et en 1832, enfin de celle rédigée par ALBÈRI et publiée à Firenze en 1841—1856, et il fait voir pourquoi aucune d'entre elles ne peut satisfaire aux besoins des savants. Ensuite il expose le plan de la nouvelle édition, qui sera divisée en 20 volumes d'environ 500 pages in-4°. Les volumes 1—9 contiendront les oeuvres scientifiques et le volume 10 les écrits se rapportant aux belles-lettres; les 9 tomes suivants seront consacrés à la correspondance de GALILEI et renfermeront non seulement des lettres soit de GALILEI, soit adressés à lui, mais aussi d'autres lettres relatives à son action scientifique. Enfin, dans le tome 20 M. FAVARO a l'intention de réunir des documents sur GALILEI, une bibliographie Galiléienne et des indices très étendus. Dans chaque section, l'ordre chronologique des écrits sera gardé.

Les recherches nombreuses et minutieuses que M. FAVARO a publiées, dans le cours de la dernière dizaine d'années, sur l'éminent savant florentin, ont mis hors de doute qu'il s'acquittera d'une manière satisfaisante de la grande et difficile mission dont il a été chargé, et à laquelle nous lui souhaitons le plus grand succès possible.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

…TTICA DI CLAUDIO TOLOMEO, DA EUGENIO … — SCRITTORE DEL SECOLO XII — RI… … TRADUZIONE ARABA DI UN TESTO … LA PRIMA VOLTA CONFORME A UN … AMBROSIANA, PER DELIBERAZIONE DELLA … NZE DI TORINO PUBBLICATA. Torino … — IX tab.

…vrages ont si vivement attiré l'attention des …que de PTOLÉMÉE, depuis HÉLIODORE de La… presque son contemporain, jusqu'aux écrivains … M. GOVI a donc bien mérité de la science en … ce qui nous reste de cet ouvrage, savoir la tra… en latin, d'après une translation arabe du texte grec, … perdu. Cette traduction latine ne contient (de même … la version arabe, dont on ne connaît plus un seul exem… que les 2ᵉ, 3ᵉ et 4ᵉ livres de l'Optique de PTOLÉMÉE, avec un fragment du 5ᵉ. Le 1ᵉʳ livre ainsi que le reste du 5ᵉ et dernier, sont probablement tout à fait perdus.

Après avoir raconté dans l'introduction l'histoire de l'Optique de PTOLÉMÉE, M. GOVI critique avec raison la méthode inexacte par laquelle l'Opticien grec détermine le lieu de l'image d'un point lumineux vu dans un miroir sphérique, et il fait mention à cette occasion du problème d'ALHAZEN, dont il donne une riche bibliographie des solutions tentées ou proposées. Il reconnaît cependant à PTOLÉMÉE le mérite qui lui appartient d'avoir mis l'expérience et la mesure comme fondements de l'optique, en tant que science naturelle; devançant en cela ROGER BACON, LÉONARD DE VINCI et GALILÉE.

M. GOVI s'arrête ensuite particulièrement sur la réfraction, dont l'étude place PTOLÉMÉE parmi ceux qui ont le mieux mérité de l'optique. Il fait voir quelle a été la formule empirique d'interpolation par laquelle PTOLÉMÉE a essayé de lier ensemble et de compléter les résultats de ses expériences sur la réfraction de la lumière dans l'eau et dans le verre. La formule de PTOLÉMÉE ne représentait pas la vraie loi de la réfraction, telle qu'elle a été découverte par SNELL et DESCARTES; M. GOVI le démontre en développant, pour la première fois, en fonction des arcs la relation qui lie l'angle de réfraction et l'angle d'incidence, relation qui n'est donnée ordinairement qu'en fonction des sinus. Nous croyons utile de réproduire ici cette expression. En désignant par i l'angle d'incidence, par ρ l'angle de réfraction

(en parties du rayon), et par $\nu = \frac{1}{n}$ la valeur inverse de l'indice de réfraction, M. Govi obtient (p. XXXII)

$$\rho = \nu i - \frac{1}{6}\nu i^3 (1 - \nu^2) + \frac{1}{120}\nu i^5 (1 - 10\nu^2 + 9\nu^4)$$

$$- \frac{1}{5040}\nu i^7 (1 - 91\nu^2 + 315\nu^4 - 225\nu^6) + \ldots$$

En parlant de la réfraction astronomique, M. Govi rappelle qu'elle était déjà connue de Cléomède, avant que Ptolémée en fît mention.

Plus loin, M. Govi signale un passage où Ptolémée semble faire allusion au principe, qu'on croyait très moderne, de la conservation de la force (*cursus naturae in conservandis actibus virtutis*). M. Govi critique la détermination donnée par Ptolémée du lieu des images vues par réfraction, comme il avait critiqué celle du lieu des images vues par réflexion. Enfin, M. Govi termine l'analyse de l'ouvrage, en confirmant la thèse soutenue par Th. Henri Martin dans le mémoire *Sur les instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes* inséré dans le Bullettino di bibliogr. e di storia d. sc. mat. e fis. **4**, 1871, p. 165—238, c'est à dire que les anciens n'ont jamais possédé de vrais et propres instruments d'optique agissant par réfraction.

Si nous nous sommes arrêtés aux principaux résultats scientifiques et historiques de l'introduction de M. Govi, ce n'est pas qu'elle n'en contienne une foule d'autres, que nous avons dû laisser de côté dans cette courte analyse. M. Govi regrette (p. X) que ses devoirs professionnels ne lui aient pas permis de faire sur l'Optique de Ptolémée un travail analytique plus étendu. Certes, en accomplissant un tel ouvrage, l'illustre éditeur aurait rendu un nouveau service à la science, mais, tel qu'elle est, son introduction ne laisse rien à désirer, à ceux qui veulent se faire une idée des connaissances optiques des anciens et de l'ouvrage trop longtemps attendu du plus grand astronome de l'antiquité.

Rome, 7 juillet 1888. Henri Narducci.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1888: 2.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.
20 (1887): 11.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
33 (1888): 3.

°**Brunel, G.,** Notice sur l'influence scientifique de G. I. Hoüel. Bordeaux 1888.
8°, 80 p. + portrait.

°**Cock, A. de,** Simon Stevin. Gand 1888.
12°, 63 p.

Curtze, M., Gedächtnissrede auf Professor Dr. Leopold Prowe.
Zeitschr. für Mathem. 33, 1888; Hist. Abth. 89—96. — Reproduction de l'article indiqué ci-dessus p. 58.

°**Demme, C.,** Die Hypothesis in Platon's Menon. Osterprogramm der Annenschule (Realgymnasium) zu Dresden Altstadt. Dresden 1888.
4°, 22 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. 33, 1888; Hist. Abth. 115—116. (CANTOR.)

Eneström, G., Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres.
Biblioth. Mathem. 1888, 38.

Gelcich, E., Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses.
Zeitschr. für Mathem. 33, 1888; Hist. Abth. 41—58, 81—89.

°**Gray, G. J.,** Bibliography of the works of Sir Isaac Newton, together with a list of books illustrating his life and works. Cambridge 1888.
8°, 40 p. — [5 M.]

Günther, S., Geschichte der antiken Naturwissenschaft [Mathematik, Naturwissenschaft incl. Medizin und wissenschaftliche Erdkunde].
Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft in systematischer Darstellung, herausgegeben von I. MÜLLER, Band 5: 1 (1888), p. 1—114.

Hultsch, F., Eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des Theodosios.

Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Philol. Cl.) 1886, 119—128.

La Cour, P., Historisk Mathematik. Et indledende Kursus. Kjöbenhavn, Philipsen 1888.

8°, VIII + 374 + (2) p. + 1 pl. — [5,25 kr.]

°**Klimpert, R.,** Geschichte der Geometrie. Stuttgart 1888.

8°. — [3 M.]

Laisant, C. A., Notice historique sur les travaux des première et deuxième sections [de l'Association Française pour l'avancement des sciences]. De 1879 à 1886 inclusivement. Paris 1887.

8°, 82 + (2) p. — Les pages 80—82 contiennent des analyses de quelques notices d'histoire des mathématiques communiquées à l'Association Française.

Loria, G., Notizie storiche sulla Geometria numerativa.

Biblioth. Mathem. 1888, 39—48.

Mansion, P., Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'Université de Gand.

Biblioth. Mathem. 1888, 33—35.

Mansion, P., Note historique sur la règle de médiation.

Biblioth. Mathem. 1888, 36.

Paulson, J., De fragmento Lundensi Boëtii De institutione arithmeticae librorum.

Lund, Universitet, Årsskrift **21**, 1885. 30 p.

Riccardi, P., Ancora del trattato »De quadratura circuli« di Giovanni Battista Della Porta.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 605—606.

Steinschneider, M., Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf.

Biblioth. Mathem. 1888, 49—52.

Steinschneider, M., Etudes sur Zarkali. Appendice.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 575—604.

Weissenborn, H., Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates.

Biblioth. Mathem. 1888, 37.

Vinci, Léonard de, Manuscrits C, E et K de la bibliothèque de l'Institut publiés en facsimilés phototypiques avec transcriptions littérales, traductions françaises, avant-propos et tables méthodiques par CH. RAVAISSON-MOLLIEN. Paris, Quantin 1888.

In-folio, 446 p. — Ce volume contient: 1° le plus grand ms. de la collection de l'Institut, marqué C, dont TRICHET DUFRESNE fit des extraits; 2° le manuscrit in-8° E, remarquable par ses croquis; 3° le petit livret K, sorte de carnet de poche de LÉONARD DE VINCI; en tout 460 facsimilés.

L'impression qui ressort de ce volume encore plus fortement motivée que des précedents est que LÉONARD DE VINCI doit être considéré comme le véritable initiateur de la méthode scientifique moderne: expérience et

calcul. Les textes sont décisifs à cet égard. Les sujets traités se rapportent plus spécialement à l'optique, l'hydraulique, l'art militaire, la théorie des couleurs, l'arithmétique, l'algèbre, l'anatomie, la pneumatique; ils embrassent presque en entier le vaste champ des sciences appliquées.

Le savant éditeur s'est acquitté de sa tâche difficile avec la même scrupuleuse exactitude que la critique s'est plû à distinguer dans les premiers volumes: dans ce volume il a eu de plus le bonheur de réduire au minimum le nombre des passages incertains ou douteux. Le succès scientifique et pratique de cette belle publication est assuré.

Wittstein, A., Historische Miscellen.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 96—97.

Zangemeister, Entstehung der römischen Zahlzeichen.

Berlin, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1887, 1011—1028. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 98—99. (CANTOR.)

Question 20 [sur l'histoire de l'algèbre chez les Arabes]. (ACADÉMIE DANOISE DES SCIENCES.) — Question 21 [sur l'usage de lettres pour désigner des quantités]. (P. MANSION.)

Biblioth. Mathem. 1888, 63—64.

CARR, G. S., A synopsis of elementary results in pure mathematics: containing propositions, formulæ, and methods of analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an index to the papers on pure mathematics. London, Hodgson 1886. 8°.

Arch. der Mathem. **5**$_2$, 1887; Litter. Ber. 29. (H.)

GÜNTHER, S., Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin, Hofman 1887. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 109—111. (CANTOR.)

HOUZEAU, J. C., et LANCASTER, A., Bibliographie générale de l'astronomie. Tome premier. Première partie. Bruxelles 1887. 8°.

Bruxelles, Soc. scient., Revue **22**, 618—631. (J. T.)

HULTSCH, F., Scholien zur Sphärik des Theodosios. (Abhandl. d. philol. Cl. der Sächsischen Gesellsch. der Wissensch. **10**, 1887.)

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 100. (CANTOR.)

MANSION, P., Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Gand, Hoste 1887. 8°.

Biblioth. Mathem. 1888, 53. (G. ENESTRÖM.)

MARIE, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome XI. Quinzième période: De Fourier à Arago. Paris, Gauthier-Villars 1887. 8°.

Beiblätter zu den Ann. d. Phys. **11**, 1887, 673—674. (E. W.)

SUTER, H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. (Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Cantonsschule in Zürich.) Zürich 1887. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 108—109. (CANTOR.) — Biblioth. Mathem. 1888, 54. (G. ENESTRÖM.)

TANNERY, P., La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie. Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars 1887. 8°.
Biblioth. Mathem. 1888, 55—56. (G. ENESTRÖM.)

TANNERY, P., Pour l'histoire de la science hellène. De Thalès à Empèdocle. Paris, Alcan 1887. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 112—115. (CANTOR.)

WEISSENBORN, H., Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Berlin, Mayer & Müller 1888. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 101—107. (CANTOR.) — Biblioth. Mathem. 1888, 56—57. (G. ENESTRÖM.)

WOHLWILL, E., Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17. Jahrhundert. Hamburg 1887. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 111—112. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 117—120. — Biblioth. Mathem. 1888, 58—62.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

22. On sait que la formule donnant l'aire d'un triangle sphérique:

$$\frac{\pi r^2}{180^\circ}(A + B + C - 180^\circ)$$

(où A, B, C sont les angles et r le rayon de la sphère) a été signalée pour la première fois par GIRARD et CAVALIERI. On demande si quelque géomètre antérieur a essayé de déterminer l'aire dont il vient d'être parlé, et en cas affirmatif, quel a été le résultat de ces tentatives. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET 1888.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1888. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 2. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 2.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur l'optique de Claude Ptolémée.

Par HENRI NARDUCCI à Rome.

MM. DELAMBRE[1], CAUSSIN DE PERCEVAL[2], GOVI[3], TH. HENRI MARTIN[4], et le prince BONCOMPAGNI[5] ont fait de l'optique de CLAUDE PTOLÉMÉE l'objet d'importants travaux. M. MARTIN en répondant aux doutes soulevés par M. CAUSSIN, démontre que »L'Optique de PTOLÉMÉE, dont nous avons une traduction latine incomplète, faite sur deux manuscrits incomplets d'une traduction arabe, est bien celle de l'astronome grec».[6] Le prince BONCOMPAGNI, dont il serait superflu de rappeler ici les profondes connaissances bibliographiques, a donné des renseignements très exacts et précieux sur treize manuscrits de la traduction latine de l'Optique de PTOLÉMÉE par EUGENIUS Amiral de Sicile.[7] M. GOVI, qui avait déjà signalé le premier des deux manuscrits mentionnés dans le mémoire de M. BONCOMPAGNI, dans l'introduction à son édition de l'Optique de PTOLÉMÉE[8], qui lui assure un nouveau titre à la reconnaissance des savants, a fait connaître un 14[e] manuscrit, de la fin du XVI[e] ou du commencement du XVII[e] siècle, ayant appartenu à la bibliothèque du Collége Romain et possédé actuellement par la bibliothèque nationale Victor Emanuel de Rome, coté H. C. 93. Le plus ancien de ces manuscrits est celui appartenant à la bibliothèque Ambroisienne de Milan, coté T. 100, *par. sup.*; les autres sont du XV[e]—XIX[e] siècle.

La traduction latine publiée par M. GOVI commence avec le titre suivant: *Sermo secundus Opticorum* THOLOMAEI, *olim de graeca lingua in arabicam, nunc autem de arabica in latinam translatorum ab* AMMIRATO EUGENIO *siculo, ex duobus exemplari-*

bus, quorum novissimus unde praesens translatio facta fuit, veracius est; primus tamen Sermo non est inventus. Nous partageons l'opinion de CAUSSIN DE PERCEVAL que cet »Ammiratus EUGENIUS siculus» est bien le même »EUGENIUS regni Siciliæ Amiratus», traducteur d'un extrait de la *Basilographia*[9], copié, parmi plusieurs autres écrits, dans le manuscrit Fonds Latin n° 7329, du XV^{e} siècle, de la bibliothèque nationale de Paris[10], et que M. AMARI[11] croit contemporain du roi Roger II, dit le Jeune, mort en 1154.

Après les renseignements bibliographiques donnés par M. GOVI dans l'introduction citée, après les analyses de cette publication insérées dans les principales revues scientifiques, et notamment celle de M. FAVARO[12], il reste bien peu à y ajouter. Cependant, les notices suivantes ne seront pas, nous osons l'espérer, tout à fait dépourvues d'intérêt.

D'abord, au manuscrit unique du XIV^{e} siècle jusqu'à présent connu, nous pouvons, grâce à l'obligeance de M. L. A. BIRKENMAYER, professeur agrégé à l'université de Cracovie, en ajouter un second, également du XIV^{e} siècle, conservé dans la bibliothèque Jagellonne à Cracovie, et dont la collation avec le manuscrit ambroisien, fidèlement reproduit par M. GOVI, n'a fait connaître que de très légères variantes.

En second lieu, nous nous permettons de reproduire textuellement un passage inédit de la vie de PTOLÉMÉE, écrite par BERNARDINO BALDI en 1595, et qui fait partie de son grand ouvrage intitulé *Vite dei Matematici:*[13]

> Haueua EUCLIDE ne' tempi suoi scritto un libro di Prospettiua che i Greci dicono optica; il quale ancora s' hà alle mani; ma il trattato non è più pieno di quello, che si richieda a un' institutione d'elementi di quel genere; onde TOLOMEO, trouandosi aperto il campo, ne scrisse un nobilissimo trattato; il che non solo affermano il VALLA nella sua Filologia, ALBERTO de lib., et molti altri, ma ne fa intiera fede GIORGIO HARTMANNO nella dedicatoria della sua perspettiua: GIOVANNI DI MONTEREGIO, dice egli, era per mandar fuori compitissimi i libri di perspettiua di TOLOMEO, illustrati e spiegati da lui, i quali, preuenuto dalla morte, non potè mandar fuori. Così dice egli affermando, dopo la morte del MONTEREGIO hauer diligentemento cercato fra le scritture sue, e non hauergli trouati. Dice però il detto GIORGIO d'hauer hauuto appresso di se un fragmento di detto libro, ma così mal concio, che non poteua publicarsi. Haueua anco egli l'argomento di tutta

l'opra a libro per libro, della quale discorrendo così dice: TOLOMEO abbracciò tutto il trattato della Perspettiua in cinque libri, nel primo trattò della proprietà della uista e della luce, nel secondo quali siano le cose uisibili, nel terzo di quelle cose che si ueggono ne' specchi piani e concaui, nel quarto di quelle cose che si veggono mediante due o più specchi concaui posti insieme, nel quinto di quelle cose che si ueggono per rifrattione. Fù poi questo libro tradotto in Arabico, e giunse alle mani degl' accademici dell' Accademia Venetiana, i quali promisero pubblicarlo tradotto in latino, il che se sia dopo auenuto non saprei, per non l'hauer ueduto. Da gl' argomenti de' libri publicati dal HARTMANNO appare che TOLOMEO non scriuesse trattato appartato de gli specchi, ma l'inserisse nel corpo della Perspettiua; laonde s'ingannò forse FRANCESCO MAUROLICO nella dedicatoria della sua Cosmografia, scriuendo che TOLOMEO facesse un trattato degli specchi, nel quale mostrasse che le rifrattioni si facessero ad angoli pari. Hassi nondimeno un trattatello de' specchi diuiso in due parti, il quale lo tradusse dall' Arabico fino del 1269, fù ascritto à TOLOMEO. Questo fù stampato de gl' heredi d'Ottauiano Scoto in Venetia, o trattati di molti autori sopra la Sfera del SACROBOSCO; ma s'egli sia di TOLOMEO non ardirei giudicare: può essere che questa sia una particella di tutta l'opra.

Le passage de MAUROLYCUS auquel BALDI fait allusion, se trouve dans la dédicace de sa *Cosmographia* au cardinal PIERRE BEMBO, datée de Messine »Nono Calend. Febr. [= 24 janvier] M.D.XL.» Dans la longue liste d'ouvrages qu'il se proposait de publier on lit:[14] »PTOLEMAEI specula: vbi optimis ipse argumentis refractiones ad angulos æquales omnino fieri demonstrat».

L'académie Vénetienne citée par BALDI est celle plus connue sous le nom d'Académie *della Fama*, et qui a été l'objet d'un travail spécial de la part de J. G. LUNZE.[15] Le catalogue des travaux que cette académie avait l'intention de publier, parut d'abord en italien dans un opuscule très rare intitulé: SOMMA DELLE OPERE | CHE IN TVTTE LE SCIENZE | ET ARTI PIV NOBILI, ET IN VARIE LINGVE | HA DA MANDARE IN LVCE | l'Academia Venetiana, | PARTE NVOVE ET NON PIV STAMPATE, | parte con fedelissime tradottioni, giudiciose correttioni, | & utilissime annotationi riformate. | NELL' ACADEMIA VENETIANA, | M.D.LVIII. In folio[16]. Dans les lignes 3—4 du recto

du feuillet numéroté 13 de cette édition, sous le titre de »PERSPECTIVA» on lit: »La perspettiva di TOLOMEO, dall' Arabico tradotta in Latino, non piu stampata.» Dans l'édition latine qui a pour titre: SVMMA LIBRORVM, | QVOS IN OMNIBVS SCIENTIIS, | AC NOBILIORIBVS ARTIBVS, | VARIIS LINGVIS CONSCRIPTOS, | VEL ANTEA NVMQVAM DIVVLGATOS, | VEL VTILISSIMIS, ET PVLCHERRIMIS SCHOLIIS, | CORRECTIONIBVSQUE ILLVSTRATOS, | IN LVCEM EMITTET | ACADEMIA VENETA | IN ACADEMIA VENETA, | M.D.LIX. In-4°, mêmes pages et lignes, sous »PERSPECTIVA», on lit: »PTOLEMAEI perspectiva ex Arabico in Latinum versa nondum edita».

Le traité *de Speculis* que BALDI dit avoir été imprimé par les héritiers d'Octavianus Scotus à Venise, sous le nom de PTOLÉMÉE, est celui qui porte le titre: »Incipit liber Ptolomei de speculis: qui diuidit*ur* in duos libros», et à la fin duquel on lit: »Explicit secu*n*dus & ultim*us* liber Ptolomei de Speculis . Co*m*pleta fuit ei*us* tra*n*slatio vltimo Decembris anno Christi .1269.». Il occupe les ff. 250^v col. 2^e à 252^v col. 2^e d'une édition in-folio, à 2 colonnes, intitulée dans les lig. 1—3 du recto du 1er feuillet: »Sphera | cum commentis in hoc volumine | contentis videlicet»; suit en 13 lignes l'indication de 13 traités dont le dernier est: »Ptolomeus de Speculis.» Dans les lig. 54—58 de la col. 1 du f. 253 verso on lit: »Venetiis impensa heredum quondam Domini Octauiani Scoti Modoetiensis: ac sociorum. 19. Januarij. 1518.». Il existe du même recueil une autre édition de la même année, aussi in-folio à 2 col., composée du même nombre de feuillets.[17] Dans les lig. 1—3 du recto du 1er feuillet se trouve le titre: »Sphera mundi nouit*er* recogni-|ta cu*m* com*men*tarijs & authorib*us* | in hoc volumine co*n*te*n*tis . videlicet»; suit en 18 lignes l'indication de 16 traités, dont le dernier est »Theorica Planetarum Ioannis Cremonensis». Dans les lig. 54—58 de la col. 1 du f. 253 verso on lit: »Venetijs impensis nobilis viri d*omi*ni Luce antonij de giu*n*ta Florentini. Die vltimo Iunij. 1518.» Au f. 250 verso, col. 2, lig. 1—2 se trouve le titre: »Incipit liber Ptolomei de Speculis: q*ui* diuidit*ur* in duos libros», et au f. 252 verso, col. 2, lig. 26—28: »Explicit secundus & vltimus liber Ptolomei de Speculis. Completa fuit eius tra*n*slatio vltimo Dece*m*bris anno Christi. 1269.»

La conjecture de BALDI que ce petit traité puisse être une partie de l'Optique de PTOLÉMÉE a été détruite par VENTURI, en le comparant avec le texte latin de l'Optique. Cet écrivain cite aussi l'opinion de BERNHARD que l'auteur du traité *de Spe-*

culis est non pas PTOLÉMÉE mais HÉRON le mécanicien.[17] Nous ajouterons en tout cas que, si l'opinion de M. AMARI, qui fait vivre EUGENIUS *Amiratus Siculus* en 1154, est exacte, la traduction du petit traité *de Speculis* achevée en 1269, n'aurait certainement pas pu être de lui, quand même c'eût été une partie de l'Optique de PTOLÉMÉE.

[1] DELAMBRE, *De l'Optique de Ptolémée, comparée à celle qui porte le nom d'Euclide, et à celles d'Alhazen et de Vitellion.* Connaissance des temps pour l'an 1816 (Paris 1813), 239—256.

[2] CAUSSIN DE PERCEVAL, *Mémoire sur l'Optique de Ptolémée et sur le projet de faire imprimer cet ouvrage d'après les deux manuscrits qui existent à la Bibliothèque du Roi* Mémoires de l'institut de France; académie des inscriptions et belles-lettres **6**, 1822, 1—43.

[3] GOVI, *Sulla opportunità di pubblicare una traduzione inedita dell' Ottica di Tolomeo.* Atti dell' accad. delle scienze di Torino **6**, 1871, 401—405. Voir aussi les journaux Il Conte di Cavour de Turin du 14 mai 1871, et La Nazione de Florence du 18 mai 1871.

[4] MARTIN, *Ptolémée, auteur de l'Optique traduite en latin par Ammiratus Eugenius Siculus sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolémée, auteur de l'Almageste?* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. e fis. **4**, 1871, 466—469.

[5] BONCOMPAGNI, *Intorno ad una traduzione latina dell' Ottica di Tolomeo.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. e fis. **4**, 1871, 470—492; **6**, 1873, 159—170.

[6] MARTIN, l. c. p. 469.

[7] Voir le mémoire de M. BONCOMPAGNI cité ci-dessus.

[8] GOVI, *L'Ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia — Scrittore del secolo XII ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo greco imperfetto ora per la prima volta conforme a un codice della Biblioteca Ambrosiana per deliberazione della r. accademia delle scienze di Torino pubblicata* (Torino 1885, in-8°), p. I—XLIX.

[9] CAUSSIN DE PERCEVAL, l. c. p. 25.

[10] *Catalogus codicum manuscriptorum bibliothecae regiae.* Pars tertia, tomus IV (Paris 1744), p. 341.

[11] AMARI, *Storia dei Musulmani di Sicilia.* Vol. **3**, par. 2 (Firenze 1872), p. 657—660.

[12] Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. e fis. **19**, 1886, 115—120.

[13] Manuscrit Boncompagni n° 156, ff. 330r—331r.

[14] COSMO-|GRAPHIA FRANCISCI | MAVROLYCI MESSA-|NENSIS SICULI, | *In tres dialogos distincta*, etc. Ad reuerendiss. Cardinalem Bembum. | PARISIIS, | Apud Gulielmum Cauellat, etc. [S.a.], in-8°, f. 6r non num. lig. 22—24.

[15] LUNZE, *Academia Veneta seu della Fama in disquisitionem vocata*. Lipsiae 1801, in-12°. — Comparez VEESENMEYER, *Specimen litterarium de academia Veneta*. Vlmae 1794, in-4°.

[16] L'exemplaire de cette édition possédé par B. BALDI se trouve dans la bibliothèque Angelica de Rome, comme il résulte par son nom écrit de sa main sur le frontispice.

[17] Une longue et très exacte description de chacune de ces deux éditions, ornée de plusieurs facsimilés, a été donnée par le prince BONCOMPAGNI, dans son mémoire *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo* (Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **4**, 1851, p. 253—266); comparez dans le même tome **4**, p. 267—268 une lettre de M. FRANÇOIS ORIOLI, où il exprime l'opinion que l'édition de Giunta soit une contrefaçon de celle de Scotus, qui est en effet antérieure d'environ 6 mois. Dans l'édition des *Spherae tractatus* imprimée à Venise en 1531 par le même L. A. de Giunta, le traité *de Speculis* a été omis.

[18] VENTURI, *Commentarij sopra la storia e la teoria dell' Ottica*. Tomo primo. Bologna 1814, p. 52.

De l'étude sur l'Histoire des mathématiques en Russie.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Le désir de connaître la nature même et l'histoire du progrès scientifique s'est manifesté en Russie dans le domaine mathématique d'aussi bonne heure que partout ailleurs. L'origine de la géométrie — conçue alors comme art d'arpenter — et celle de l'astronomie sont d'abord vainement cherchées dans l'Ecriture sainte, source générale de l'omniscience d'autrefois. Au XIV^e siècle, le clergé russe se croit forcé de mettre ces deux sciences au nombre des sciences prohibées et d'en défendre l'étude à tout chrétien. Les plus anciens des manuscrits mathématiques arrivés jusqu'à nous, nommément ceux du XVII^e siècle, nous donnent bien quelques notices historiques, mais tout fragmentaires et inexactes en grande partie. L'arithmétique y est considérée par exemple comme une invention, tantôt de Pythagore, tantôt d'un certain phénicien Syre, le fils d'Assinore, tantôt enfin des philosophes de l'antiquité en général.

Le caractère exclusivement utilitaire et pratique de la littérature mathématique développée en Russie sous Pierre I, ne souffrit jamais une exposition quelque peu considérable des connaissances relatives à l'Histoire des mathématiques. Le grand tsar portait à la science pure un mépris tournant parfois à la dérision. Quelques notes disséminées au hasard, le plus souvent insérées dans les préfaces d'ouvrages de mathématiques, font tout ce que nous en retirons sur l'Histoire des mathématiques.

La propagation de ces faibles débuts est mieux secondée depuis la fondation de l'Académie des Sciences à St.-Pétersbourg, en 1725. A la seconde séance déjà, publique et solennelle, qui en suivit l'ouverture, celle du 1er Août 1726, Jacques Hermann, académicien distingué, prononce un discours intitulé *De ortu et progressu geometriae.* Rédigé en latin ce discours n'est à la portée que d'un petit nombre de Russes; c'est pourquoi son rôle dans la propagation des connaissances physiques et mathématiques doit être bien limité. Nous le citons néanmoins, puisque c'est le premier traité spécial qui parut en Russie sur l'Histoire des mathématiques.

Au XVIII^e siècle les éditions périodiques que l'Académie entreprend en russe, à diverses époques, tiennent le premier

rang dans la propagation des connaissances encore faibles sur l'Histoire des mathématiques en Russie. Le but de ces éditions populaires est d'en tenir les lecteurs au courant des travaux de l'Académie, en même temps que de différentes questions scientifiques et des faits relatifs à l'Histoire des sciences. Les »Notes» scientifiques ajoutées mensuellement à la Gazette de Saint-Pétersbourg et publiées par l'Académie 1728—1741 font la première de ces éditions. Dans le programme de ces »Notes» l'Histoire des sciences en est indiquée comme l'objet principal. Des articles tels qu'un »Aperçu historique des solutions du problème sur la trisection de l'angle», le même sur la duplication du cube et »Des académies en général», peuvent être cités comme exemples de traités sur l'Histoire des mathématiques. Il est à remarquer cependant que des articles de ce genre ne sont point nombreux de tout le temps que l'édition existe. Les trois qui viennent d'être cités et ceux qui les suivent plus tard, ne présentent en grande partie que des compilations sur des questions séparées. Une tentative d'enrichir la littérature russe par un ouvrage sur l'Histoire des mathématiques et qui aurait embrassé l'objet dans toute son étendue eut lieu à la fin du XVIII^e siècle, et appartient encore à l'Académie des Sciences.

Les éditions populaires dont nous venons de parler sont tour à tour interrompues et renouvelées sous d'autres noms. De 1779 à 1781 l'Académie publie les »Nouvelles académiques»; la durée de cet organe n'excède point celle de ses antécédents. Tout le temps qu'il paraît, le traducteur de l'Académie, PIERRE BOGDANOVITCH, y traduit la première édition du fameux ouvrage de MONTUCLA: *Histoire des mathématiques*, dont les deux volumes in-4° parurent en 1758. L'interruption du journal met fin à la traduction qui s'en arrête au cinquième livre de la troisième partie. C'est ainsi qu'échoue le premier essai d'une histoire complète des sciences physiques et mathématiques en langue russe.

Résumant tout ce que le XVIII^e siècle a fait en Russie pour l'étude de l'Histoire des mathématiques, nous pouvons dire qu'il s'est borné à en populariser les faits principaux à l'aide de compilations et de traductions. L'état des choses n'en permit pas davantage.

Au début du XIX^e siècle, FRÉDÉRIC HOLDBACH, professeur d'Astronomie à l'Université de Moscou, est le premier à tenter un exposé du progrès des sciences physiques et mathématiques en Russie. Le 30 Juin 1805, alors que cette Université fête le demi-siècle écoulé depuis sa fondation, c'est lui qui prononce

en latin un discours intitulé: *Oratio in qua enarratur Historia disciplinarum mathematicarum in Rossia.* Se bornant à un leger aperçu des faits généralement connus, ce discours ne signifie rien au point de vue scientifique. Son mérite est d'avoir la primauté dans le domaine nouveau de la littérature historico-mathématique et qui a pour but l'Histoire du progrès des sciences physiques et mathématiques en Russie.

Si nous comparons avec le XVIII^e^ siècle le long espace de temps qui suit, environ jusqu'à 1860, non seulement nous n'y voyons point de progrès dans la littérature russe traitant des questions sur l'Histoire des mathématiques, mais nous y constatons même une décadence visible quant au nombre d'ouvrages qui l'ont pour objet. La cause principale en est que l'Académie exclut totalement de son programme la popularisation des connaissances scientifiques en Russie. Cette exclusion suspend tout d'abord les éditions périodiques citées plus haut. La propagation des connaissances scientifiques, qui faisait partie du but de ces éditions, se trouve désormais abandonnée soit au hasard, soit au loisir ou à l'intérêt passager de tel ou tel savant, de tel ou tel autre journal. Quant à un intérêt solidement établi pour les recherches sur l'Histoire des mathématiques, il n'en peut encore être question, vu le faible niveau de l'esprit philosophique chez les mathématiciens russes. Ces derniers, s'ils ont parfois recours à une littérature étrangère, afin d'acquérir des connaissances qu'ils ne sauraient trouver dans leur propre langue, ils n'y sont poussés que par une érudition étroite sans qu'un intérêt philosophique, scientifique ou pédagogique y soit pour quelque chose. La science russe de cette époque établit une manière d'envisager l'Histoire des mathématiques (malheureusement cette manière n'est point disparue de nos jours) comme un luxe du savoir, au lieu d'en faire un besoin réel et impérieux.

Privée ainsi de soutien au dedans et au dehors, l'étude sur l'Histoire des mathématiques ne put fleurir en Russie. Un demi-siècle s'écoule et nous n'avons à indiquer qu'un seul livre de mérite, c'est l'Histoire de l'Astronomie par Platon Hamaley parue en 1809.

En même temps, dans le domaine général de la science russe nous voyons un progrès successif, uni a un développement remarquable de la pensée philosophique. Ce progrès là amène entre 1860—1870 à dès faits desquels on peut attendre un mouvement vers l'étude si négligée de l'Histoire des mathématiques en Russie. L'essentiel de ces faits revient à l'importance

qu'aurait un cours sur l'Histoire des sciences physiques et mathématiques, et à l'essai d'en réaliser l'idée. L'un et l'autre sont tentés à Saint-Pétersbourg, en 1865, par Pierre Lavrof, professeur à l'école supérieure d'artillerie (l'Académie des Artilleurs), dans son cours destiné aux officiers d'artillerie et du génie. Paru d'abord dans le »Journal d'artillerie», ce cours est publié à part dans la suite. Le même auteur profite du témoignage d'I. Sreznevsky, connaisseur célèbre de l'ancienne littérature russe, pour indiquer aux mathématiciens russes des manuscrits mathématiques ignorés jusqu'alors et appartenant à une époque antérieure à Pierre le Grand. Cette indication dit assez où en était la Russie, il y a 20 ans, dans l'étude sur l'Histoire des mathématiques. En effet les philologues russes, Vostokof entre autres, ont été les premiers à donner dans leurs travaux des descriptions plus ou moins détaillées d'anciens manuscrits mathématiques.

Ces débuts dans l'Histoire des sciences physiques et mathématiques en Russie en développent la littérature. A côté de quelques articles plus ou moins intéressants et insérés dans les journaux, paraissent des ouvrages sérieux, publiés à part. Le plus souvent ce sont des livres traduits, tels que les Biographies des astronomes, physiciens et géomètres célèbres par François Arago, l'Histoire des sciences mathématiques par Suter (le premier volume) et celle de la géométrie par Chasles. Le progrès est donc considérable si nous songeons au passé. Malgré cela la littérature russe est encore très pauvre quant à l'Histoire des mathématiques, et pour peu que les savants russes désirent en approfondir l'étude, ils sont forcés d'avoir recours aux littératures étrangères, celles de France et d'Allemagne avant tout.

En somme voici le résumé des études sur l'Historie des mathématiques en Russie vers 1880. Une grande exiguïté littéraire au point de vue de la quantité et de la qualité, ajoutée à une absence presque complète d'originalité. L'importance de ces études pour le progrès de la science elle-même mal comprise par la plupart des mathématiciens, et à leur suite par les sphères du gouvernement commandant à la science russe. La majorité des savants traitant les questions relatives à l'Histoire des mathématiques en dilettantes. Enfin un manque d'investigations non seulement sur l'Histoire générale des sciences mathématiques et physiques mais aussi sur le développement des connaissances physiques et mathématiques en Russie, malgré l'intérêt puissant que doit en présenter l'Histoire aux savants

1.

Heureusement les recherches qui ont dévoilé un si triste état des choses indiquèrent en même temps les moyens de l'améliorer. En premier lieu il s'agissait d'introduire l'Histoire des mathématiques dans le cours des universités russes et de fonder un journal qui en serait l'organe spécial.

L'importance du premier de ces deux moyens — moins nécessaire peut être en Europe occidentale — tient à un fait tout particulier, et bien triste en même temps, dans les rapports de notre jeunesse universitaire à la science. La plupart des étudiants russes ne s'y intéressent et ne s'en occupent que tant qu'ils sont à l'université. Sitôt qu'ils la quittent le progrès de la science semble ne plus exister pour eux. C'est à peine s'ils cherchent à en entendre parler. De là, pour établir solidement une science en Russie le besoin impérieux qu'elle fasse partie du cours universitaire.

Déterminé par les circonstances qui viennent d'être exposées, l'auteur de cette Note a fait le premier pas pour introduire l'Histoire des mathématiques dans le cours des universités russes. La sympathie de la faculté physique et mathématique de Moscou le garantissant d'un côté, et l'indifférence complète du ministère de l'instruction publique de l'autre, il ouvrit en Octobre 1882, comme professeur privé, un cours sur l'Histoire des mathématiques à l'université de Moscou. Forcé de s'adapter au goût aussi bien qu'au loisir de ses auditeurs, tour à tour augmentant et diminuant le nombre de ses leçons hebdomadaires, il dut presque toujours alterner le cours systématique avec le cours épisodique de l'objet. En somme, dans les six ans qui suivent, il lut un cours complet sur l'Histoire générale des mathématiques et renouvela cinq fois celui des mathématiques modernes, à partir du XVI^e^ siècle. Il eut à surmonter des difficultés parfois graves. La vérité historique oblige cependant à observer, par rapport au règlement aujourd'hui révoqué des universités russes, que ces difficultés s'accrurent sensiblement avec le règlement nouveau, mis en usage en 1884. Dorénavant, un système d'examens nombreux et variés, que les étudiants doivent subir de tout le temps qu'ils se trouvent à l'université, et sous peine d'en être exclus avant l'examen final de l'Etat, empêche la plupart d'entre eux de suivre des cours qui ne sont pas rendus obligatoires par le règlement.

L'importance d'un organe spécial pour l'étude et le progrès de chaque science étant universellement réconnue, il n'est pas besoin de nous arrêter à la démontrer. Mais il faut bien ajouter quelques mots sur les conditions toutes locales qui ren-

dent ce moyen particulièrement nécessaire en Russie. A la suite du manque d'intérêt pour la science se manifestant chez la jeunesse universitaire, les journaux scientifiques s'y trouvent à peu près dépourvus de lecteurs. C'est donc les subsides du gouvernement, des sociétés scientifiques et des mécènes qui les entretiennent médiocrement. Obligés de se limiter au possible, ils sont même forcés quelquefois de manquer à leurs programmes vaguement conçus ou bornés à une étroite spécialité. Des articles sur les questions qui ne font pas l'intérêt essentiel de ces journaux n'en sont acceptés qu'à de rares occasions, et à défaut de matériaux sur les questions principales. Considérant un tel état des choses, on se figure quelle doit être la position des objets traités avec une profonde indifférence et comme un luxe de savoir. Hélas, c'est au nombre de ceux-là, et pour des raisons exposées plus haut, qu'est comptée l'Histoire des mathématiques en Russie.

Convaincu de la nécessité absolue d'un organe spécial pour l'Histoire des mathématiques en Russie, l'auteur de cette Note a entrepris, en 1885, l'édition du journal »les Sciences physiques et mathématiques dans leur présent et leur passé.» Le programme et le titre en indiquent le côté historique en premier lieu. A l'heure actuelle ce journal finit sa 4ᵐᵉ année. Il est essentiellement composé d'articles consacrés aux recherches sur l'Histoire générale des mathématiques, et en partie sur celle du progrès des connaissances physiques et mathématiques en Russie. Voici ce qui y a été traité quant à la première:

1) *Des questions inévitables une fois que l'Histoire des mathématiques est reconnue comme une branche indépendante et importante de la science* (»L'importance philosophique, scientifique et pédagogique de l'Histoire des mathématiques», »Son origine, son progrès et son état présent»);

2) *Des questions générales sur l'Histoire des mathématiques* (»Diverses périodes, tendances et écoles dans le progrès des sciences mathématiques»);

3) *L'époque préhistorique des sciences mathématiques* (»L'origine de la numération et son état primitif»; Le développement primitif de divers systèmes de numération» etc.);

4) *L'Histoire du progrès des sciences mathematiques dans l'Europe Occidentale* (»Epoque de l'appropriation des connaissances romaines»; »Epoque de l'appropriation de la science arabe»).

Quant à l'Histoire des connaissances physiques et mathématiques en Russie, un tableau détaillé a été donné sur leur

état et leur progrès au XVII[e] siècle, sans parler d'une bibliographie complète d'ouvrages physiques et mathématiques publiés en Russie jusqu'à la fin du XVIII[e] siècle. Le tout en somme ne réalise qu'une partie des plans de l'auteur. Lui sera-t-il d'en arriver au bout, il l'ignore. Les difficultés à surmonter pour une édition scientifique en Russie l'emportent encore sur celles d'un cours introduit à l'université sans que le réglement en rende l'étude obligatoire. Dans ce dernier cas, au moins il n'est pas question des moyens matériels dont le manque peut facilement devenir funeste à un journal scientifique, ou tout au moins de le faire paraître très inexactement.

Outre les écrits parus dans le journal qui vient d'être mentionné, il y a aussi d'autres ouvrages sur l'histoire des mathématiques publiés en Russie pendant les dernières années. Tels sont: »L'origine et le premier développement de la numération écrite» (Matematitscheski Listok, tome I). — »Sur le rassemblement des productions de Mathématiques du peuple» (Matem. Listok, tome II. Extrait dans les comptes-rendus de la septième Assemblée des naturalistes et des médecins russes à Odessa; 30 Août—9 Septembre 1883). — »Les Mathématiques des anciens Egyptiens (d'après le papyrus de Rhind)» (Moscou 1882). — »L'état des sciences mathématiques en Russie jusqu'au XVI[e] siècle» (Journal du ministère de l'Instruction publique, 1884). Ces quatres écrits ont été publiés par l'auteur de cette Note. Le programme du rassemblement des productions de Mathématiques du peuple, exposé dans le second des ouvrages cités et communiqué aux Sociétés savantes russes selon la décision de la septième Assemblée des naturalistes et des médecins russes pour guider les investigateurs, a été le point de départ de l'ouvrage de M. Isnoskoff »Sur les productions de Mathématiques du peuple.» Cet ouvrage a été communiqué par l'auteur à la section physico-mathématique de la société des naturalistes de Kasan et publié plus tard dans les comptes-rendus de cette section (Octobre 1884). M. Vachtchenko-Zakhartchenko, auteur d'un grand nombre de traités mathématiques, a publié pendant les dernières années les ouvrages suivants sur l'histoire des mathématiques: 1) »Le caractère du développement des sciences mathématiques chez les divers peuples anciens et modernes jusqu'au XV[e] siècle. Discours, prononcé dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Saint-Vladimir le 9 (21) Janvier 1882». Kiew 1882).* — 2) »Histoire des

* Ce discours a été traduit en français avec le titre: *Considérations sur le développement des mathématiques depuis les temps les plus reculés jusqu'au*

Mathématiques. Précis historique du développement de la géométrie. Tome premier» (contenant l'histoire de la géométrie jusqu'à la fin du XV[e] siècle et le précis succinct du développement de l'algèbre) (Kiew 1883).* — 3) »Précis historique du développement de la géométrie analytique» (23 p.; Kiew 1884). Enfin on peut mentionner l'ouvrage de M. STARKOFF »Sur l'histoire de la notation algébrique dans ses rapports avec le développement de l'alphabet et des signes musicaux.» Le commencement de cet ouvrage avec la préface très étendue a été publié dans le tome VII des »Mémoires de la section mathématique de la société des naturalistes de la Nouvelle Russie» (Odessa 1886).

Les indications que nous venons de donner sur les ouvrages relatifs à l'histoire des mathématiques mettent à jour, que l'étude de cette science en Russie est entrée à présent dans une nouvelle phase de son développement, distinguée de la précédente par des investigations indépendantes et originales.

XV[e] siècle et publié dans les Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 5_2, 1883, 256—291.

* Une analyse de cet ouvrage a été insérée dans la Bibliotheca Mathematica 1887, 114—116.

Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

2.

ABU DJA'AFAR AHMED BEN (Sohn des) IUSUF BEN IBRAHIM, auf welchen ich in verschiedenen meiner Schriften, unter Angabe der Quellen, zurückgekommen bin,[1] wird schon im X. sec.[2] »der Ägypter, der Geometer» genannt; AL-KIFTI (bei CASIRI I, 372) bezeichnet ihn als »Astronomen»; in der Überschrift des Commentars zum *Centiloquium* (unten n° **2**) erscheint er als Secretair (*Katib*, lateinisch *scriptor*)[3], griechisch γραμματικός der Tuluniden, einer bekannten Dynastie in Ägypten.

Dass er der Sohn des IUSUF BEN IBRAHIM IBN AL-DAJE sei,[4] kann nicht bezweifelt werden, nach der Stelle bei OSEIBIA S. 119 (oben S. 52, Anm. 9) und anderen Beweisen, die sich unten zu n° **2**, **8**, **9** ergeben werden. Daher erklärt sich die Unsicherheit in den Angaben über die Schriften des Einen und des Anderen.[5]

Zu diesem Verhältniss stimmen die Zeitangaben 292 und 300 H. (905—13 in n° **2**)[6]. Wenn das Todesjahr 945/6, welches HAGI KHALFA zu n° **8**, **9** angiebt, aus guter Quelle stammt, die allerdings unbekannt ist, so muss Vater oder Sohn ein hohes Alter erreicht haben, da wir unter ersterem das Jahr 839 mit älteren Daten wahrscheinlich aus seiner Lebenszeit nachweisen konnten.

AHMED lebte in *Ägypten*, wohin sein Vater gereist war, jedenfalls schon in seiner Jugend.[7]

Ich habe mich auf die Feststellung der wichtigsten Lebensmomente beschränkt, welche mehr sind als man von manchem bekannteren Autor anzugeben weiss.

Was die *Schriften* AHMED's betrifft, so habe ich in Zeitschrift für Mathematik **10**, 1865, 492 ihm deren 6 vindicirt, eine 7. dahingestellt, 2 historische ausser Acht gelassen, die ich hier nachtrage, nachdem ich zuerst einige Bemerkungen über früher erwähnte Schriften gemacht habe, worin auch die Fragen des H. Prof. CANTOR zur Sprache kommen werden, und zwar gleich zu Anfang.

1. *De proport.* etc. schreibt *nur* das Pariser ms. Mazarin 1256 dem AHMED *fil. Moysis* zu. Diese falsche Überschrift

habe ich l. c. in einer Weise erklärt, die ich noch jetzt für wahrscheinlich halte. LECLERC[8] hat in ungenügender Kenntniss des ihm fremden Stoffes über seine Zweifel nicht hinwegkommen können. WÜSTENFELD[9] kennt von unserer Schrift nur ms. Ashmol. 357 (auch erwähnt in HEILBRONNER's *Historia matheseos* p. 627), Paris 7377 B und 9335 (bei LECLERC). Zu den mss., die ich in Zeitschrift für Mathematik **16**, 1871, 391 erwähnt habe, kommen noch folgende: Wien 5277[18], (*Tabulae* IV, 84) und 5292 (ib. p. 88: »ad Euclidis elementa geometr.« s. weiter unten), in Wolfenbüttel, ms. Aug. 24 Qu. f. 12 v.[10] Die Autorschaft AHMED's BEN IUSUF ist unzweifelhaft. Ms. Mazarin steht mit seinem »fil. Moysis« isolirt; fast alle anderen mss. geben ausdrücklich *fil. Josephi*. »Ben Josef« nennt auch der hebräische Mathematiker JOSEF DEL MEDIGO[11] ohne Zweifel nach einer europäischen Quelle, vielleicht direct nach einem ms. der latein. Übersetzung. Am schwersten fällt das Zeugnis AL-KIFTI's ins Gewicht.[12] LEONARDO PISANO citirt den *lib. proport.* von »Amet filius«, wie Hr. CANTOR nachgewiesen. Hat LEONARDO etwa die Lesart *fil. Moysis* neben *fil. Josephi* gekannt und daher eine *Lücke* für den Namen des Vaters gelassen, welche die Abschreiber verwischten?

Die von mir conjicirte Notiz, dass AHMED über eine Figur des MENELAUS geschrieben habe, hat LEONARDO wohl gar nicht gekannt, und sie kann für ihn nicht in Betracht kommen.

Eine Bemerkung des *lib. de proport.* über die Erfordernisse eines Übersetzers citirt die, dem bekannten Verzeichnisse der Übersetzungen GERARD's von Cremona vorangehende »Vita«[13] mit dem blossen Namen »Amet«.

Der *lib. de proport.* setzt sich im Prolog und am Schlusse ausdrücklich in Beziehung zu EUKLID's lib. V. (Zeitschrift für Mathematik **10**, 1865, 492).

Da ich die Verbindung dieses Buches mit der *Figura sector* bei LEONARDO nicht kannte, so hatte ich keine Veranlassung das Wolfenbüttler ms. danach zu prüfen. Die dortige Bibliotheksverwaltung ist so liberal, dass ein Anderer sehr bequem das Versäumte nachholen und den Dank der Historiker sich erwerben könnte.

Gelegentlich darf ich den Wunsch aussprechen, dass auch die, dem berühmten AL-KINDI beigelegte Schrift *de proportione* von einem Mathematiker untersucht werde.[14] — Ms. Amplon. qu. 349[15] (SCHUM, S. 585) enthält: *Figura Sectorum seu alkatha*, anfangend: »Intellexi«; offenbar die Schrift THABIT's; s. Zeitschrift für Mathematik **18**, 1873, 337; **19**, 1874,

96; LECLERC, l. c. II, 410, 459; WÜSTENFELD, *Die Übersetzungen* etc. S. 60.

2. Dass der Commentar zum *Centiloquium* des PTOLOMAEUS, dessen lateinische Übersetzung unter dem Namen des »Haly heben Rodan« (ALI IBN RIDHWAN, Commentator des *Quadripartitum*) gedruckt ist, unserem AHMED angehöre, hatte ich zuerst aus der hebräischen Übersetzung, dann aus dem Inhalte der lateinischen gelernt. Das Datum 530 H. der letzteren führt auf PLATO aus Tivoli,[15] dessen Namen jedoch nirgends erscheint. Zeugnisse für die Autorschaft AHMED's, dessen Commentar schon der *Fihrist* kannte, fand ich auch in lateinischen Manuscripten und in der griechischen Übersetzung (Zeitschrift für Mathematik **16**, 1871, 383). Seitdem sind mir auch mss. des arabischen Originals bekannt geworden. Ein, zu Ende defectes, ms. des »Institut des langues orientales« in Petersburg beschreibt Baron V. ROSEN in seinem Verzeichniss (1877 p. 123 n. 191[4]) ohne die Identität mit der lateinischen Ausgabe zu kennen; der Verfasser heisst da »Schreiber der Familie Tulun dem (so) Emir al-Mumenin al-Muatadhàd und Al-Muktafi«, was ROSEN als eine Dedication des Werkes an diese Khalifen, allerdings mit Fragezeichen, wiedergiebt; man kann aber nicht zweien einander folgenden Herrschern dasselbe Buch widmen, und Emir ist im Singular. Ich vermuthe, dass es heissen soll: *Zur Zeit* jener Khalifen (892—908).

Ich hätte längst wissen sollen, dass die hiesige Bibliothek ein vollständiges (sogar in 101 Sprüche eingetheiltes) ms. von Text und Commentar enthalte, nämlich Sprenger 1938, wo allerdings »der tulunidische Astronom« angegeben ist. Am 15 April 1872 schrieb AHLWARDT auf das Titelblatt: »wird in Suppl. Paris 672, S. 67 ausdrücklich erwähnt«; ich weiss nicht, ob damit gemeint ist, dass letzteres ms. dasselbe Werk enthalte. Dieses findet sich vielleicht auch in der Mulla Firuz Library.[16] Weiteres über die hebräische Übersetzung wird man in meiner im Druck befindlichen Preisschrift § 327 ff. finden. Das, früher SCHÖNBLUM gehörende ms. 2 besitze ich jetzt. Die Stellen, welche ich aus der lateinischen, theils gekürzten, theils corrupt gedruckten Übersetzung in Zeitschrift für Mathematik **12**, 1867, 37—40 mitgetheilt habe, werde ich mit Hilfe des Originals beleuchten, wenn mir die nochmalige Benutzung des Originals in der K. Bibliothek in einer freieren Zeit möglich sein wird. Hier beschränke ich mich auf die, für die Persönlichkeit entscheidende Bemerkung, dass der Verfasser in n. 59[17] im Namen seines Vaters IUSUF BEN IBRAHIM eine Anecdote aus

der Flucht des IBRAHIM BEN AL-MAHDI erzählt, die man auf andere Personen, unter Anderen auf ABU MAASCHAR übertragen hat; s. auch unten n° 8.

3. *De arcubus similibus* (Zeitschrift für Mathematik 10, 1865, 490, 493; 16, 1871, 391). Über mss. des arabischen Originals siehe meine *Études sur Zarkali* p. 66 (Bulletino di bibliogr. d. sc. matem. 18, 1885, 354). Aus der lateinischen Übersetzung GERARD's von Cremona stammen wohl die Excerpte in ms. Digby 168[22] (MACRAY, *Catal.* p. 175). Cod. Digby 174[4] enthält (nach MACRAY p. 185) einen anonymen »*Libellus de similibus arcubus, quem* JORDANUS [NEMORARIUS?] *citat in libris suis de triangulis; cum figuris.*» Anfang: [Dicunt?]»Geometrae eos esse arcus similes qui angulos recipiunt aequales.» MACRAY bemerkt, dass ein anderes Exemplar in Cod. auct. F V, 28 f. 144[b] aus dem XIII. sec. sich finde.[18] Da ich über die früher bekannten mss. (worunter Par. 11247 den Namen ABU JAFAR in *Abnasar* corrumpirt)[19] nichts Näheres weiss, so kann ich die Identität der anonymen mss. nur als Wahrscheinlichkeit bezeichnen. Die Citate in JORDANUS sind meines Wissens für die Untersuchung jener mss. bis jetzt noch nicht in Betracht gezogen.

4. Über die *allgemeine Scheibe* des Astrolabs, vielleicht auch in dem arabischen ms. 1158 zu Leyden.[20]

5. *Electiones.* Im Commentar zum *Centiloquium* n. 83 verweist AHMED auf andere Schriften über »Judicia» (Zeitschrift für Mathematik 12, 1867, 37).

6. *'Husn al Ukba* (bei OSEIBIA I, 207), wohl identisch mit der »Risale» (Abhandlung) über *Mukafat* (so bei OSEIBIA I, 190),[21] enthielt Erzählungen von verfolgten Männern, die wieder zu Ehren kamen, wahrscheinlich auch nur solche. Die Verweisung im Commentar zum *Centiloquium* n. 30 ist daher nicht auf diese Schrift zu beziehen (Zeitschrift für Mathematik 12, 1867, 40, Anm. 68), sondern auf n° 9.

8. *Siret* (Biographie) des AHMED BEN TULUN von »AHMED BEN IUSUF BEN *al Dâye*», gestorben 334 H. (945/6), und

9. *Siret* des KHUMARAWEIH von demselben Autor, erwähnt HAGI KHALFA.[22]

KHUMARAWEIH (gest. 899) war der Sohn des AHMED IBN TULUN. Sein Namen ist verkürzt und verstümmelt im Comm. zum *Centil.* n. 9 in *Lamorche*[23] und n. 30 in *humarogeus.* Die Verweisung an letzterer Stelle auf eine andere Schrift ist also wohl auf n° 9 zu beziehen.

Catal. Bodl. p. 1973 (unter Sabik); *Catal. Codd. hebr. Lugd. Bat.* p. 368; *Zur pseudepigr. Lit.* p. 29 n. 4; Zeitschrift für Mathematik **10**, 1865, 492; **12**, 1867, 37; **16**, 1871, 384; Noten zu Baldi, *Vite* ecc. p. 18; Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellschaft, **18**, 1864, 124; **24**, 1870, 347 c; **25**, 1871, 393; Magazin für die Wissenschaft des Judenth. **3**, 1876, 197; *Abraham ibn Esra* (in Abhandlungen zur Gesch. der Mathemat. **3**, 1880, S. 111); *Hebr. Bibliogr.* XX S. 90 (über ms. Neapel 96), XXI S. 9.

[2] *Fihrist* von Nadim p. 268; die Quellen (II, 123) beschränken sich auf Casiri und Wenrich p. 236.

[3] Das ist also nicht als Variante von »ʿHâsib« auf Iusuf zu beziehen, wie ich oben S. 52 Anm. 7 gemeint habe.

[4] Diese Vermuthung bei Van der Linde, *Geschichte und Literatur des Schachspiels* I, 102 (cf. II, 256, 259), gehört mir, wie das Meiste über arabische Autoren (s. mein *Polem. u. apologet. Lit.* S. IX); cf. *Hebr. Bibliogr.* XX, 90; XXI, 9 über Ahmed B. Josef »*ben Tavit*« in den Zusätzen des Campanus, in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **3**, 1880, 165; Tavit ist aus Ibrahim oder Dâye corrumpirt.

[5] Wüstenfeld, *die Geschichtschreiber der Araber*, Abhandl. der Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen **28**, 1882, S. 36, hält Ahmed ben Iusuf (s. unten, n° **8**, **9**) auch für den Verfasser der Geschichte der Aerzte und Astronomen, ohne Beweis.

[6] Zeitschrift für Mathematik **12**, 1867, 38, 39; in **10**, 1865, 392 ist das Jahr 392 H. (1003) Schreibfehler, aber so, ohne Quelle, bei Wüstenfeld, *Die Übersetzungen arab. Werke ins Latein.* S. 60 n. VII; auch Hrn. Cantor (Biblioth. Mathem. 1888, S. 9, Anm. 4) entging die Berichtigung.

[7] Comm. zu *Centiloquium* n. 30; Zeitschrift für Mathematik **12**, 1867, 39, wo aber Anm. 66 für »Khalid« zu lesen ist: Salîh ben al-Walid al-Tamimi (Zeitschrift der deutschen morgenländ. Gesellsch. **24**, 1870, 347), vielleicht identisch mit abu'l-Fadhl etc. im *Fihrist*, S. 7, Z. 21.

[8] Leclerc, *Histoire de la médecine arabe* II, 510, cf. p. 410 n. VII und XI.

[9] Wüstenfeld, *Die Übersetzungen* etc., S. 61 nur unter dem Namen Amet.

[10] S. meine *Études sur Zarkali* p. 131 (Bullettino d bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 597). Auszüg enthält Cod. Digby 168 [36], bei MACRAY p. 176; ii Index, p. 272, sind unter »Iaphar» drei arabische Au toren confundirt. Der Verf. der *Isagoge minor* ist AB MAASCHAR, der des *lib. de mutatione temporum* is zweifelhaft (Zeitschrift der deutschen morgen länd. Gesellsch. **18**, 1864, 126; **25**, 1871, 386).

[11] *Maajan Chatum* [70 mathemat. Paradoxa] (Basel 162 n. 9: »Chamad» für AMET.

[12] Bei CASIRI (I, 372), der IBN AL-KAMMAD confundirt; *Études sur Zarkali* p. 89, 90, 92 (Bullettino d bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 17, 18, 20).

[13] Zuletzt, nach mehreren mss., bei WÜSTENFELD, *Die Über setzungen* etc. S. 58; cf. Zeitschrift für Mathemati **10**, 1865, 490; auch in ms. Amplon. Fol. 266[a] un 287.

[14] Zeitschrift für Mathematik **10**, 1865, 492; 1 1871, 391 sind verschiedene theils anonyme mss. ang geben; vergl. auch ms. 1935[8] der Universität Cambrid (*Catal.* III, 548) mit Commentar; Anfang: »Proport est rei ad rem determinatam secundum quantitatem h bitudo.» Eben so beginnt der *Tractatus demonstra rius de proportione* von JORDANUS in ms. Amplon. 376[6] (SCHUM S. 639), endend: »fiant 30 sex mod — Unter den mss. ist eines in der Ambrosiana Mailand, wo, nach CARDANUS, eine Schrift AL-KINDI's *sex Quantitatibus* sich finden soll (s. CHASLES, *Geschic der Geometrie*, deutsch von SOHNCKE p. 296 Note und 568; MONTUCLA, *Histoire des mathématiques* I, 37 DELAMBRE, *Hist. de l'astron. du moyen âge* p. XL u XLII; vergl. *Hebr. Bibliogr.* IX, 168 n. 4). Ist h ein Zusammenhang?

[15] JOHANNES aus Toledo (das ist IO. HISPALENSIS, jünge Zeitgenosse PLATO's) ist als Übersetzer in ms. Ampl 361 qu. genannt (ROSE im Hermes **8**, 1872, 332, 340); allein aus dem Catalog von SCHUM (Berlin 18 S. 602 n. 6) ersieht man, dass hier nicht eine and Übersetzung vorliege als die gedruckte, mit dem schen Namen »Ali Abenrudianus». LECLERC (*Hist.* 374) kennt meine Nachweisungen nicht, und WÜST FELD (*Die Übersetzungen* etc. S. 27) vernachlässigt in auffälliger Weise, so dass er in »Abumasar fil. Jose

[fil.] Abrahae» (neben dem beanstandeten Datum 520) im *Catal. des Bibl. des Départ.* IV, 625, unseren ABU DJAFAR nicht erkennt. LECLERC weiss für das Datum 530 H. Niemand als JOH. HISPALENSIS! In Paris 7307 fand er vor dem *Centiloquium* »Dixit magister *Abraamus* ben Deut» und hält diesen Namen für den jüdischen des JOHANNES vor der Taufe. WÜSTENFELD weist noch auf ein von JOHANNES HISPALENSIS übersetztes *Centiloquium Bereni* in Paris 7316 A hin. Dies ist aber nicht aus PTOLOMAEUS, sondern aus *Beteni* (ALBATEGNIUS) corrumpirt (s. meine Noten zu BALDI, *Vite* ecc. p. 30, 94) und konnte gerade veranlasst haben, dass man auch das andere *Centiloquium* mit Commentar dem JOHANNES beilegte, wie man ja auch den arabischen Verfasser verwechselt hat. In keiner mir bekannten Übersetzung des Io. HISPALENSIS glaube ich ein Datum der Hedjra gefunden zu haben.

[16] In REHATSEK's *Catal.* (Bombay 1873) p. 15 n. 22; vergl. Magazin für die Wissens. des Judenth. 3, 1876, 197.

[17] Nicht n. 59, wie in Zeitschr. f. Mathematik **12**, 1867, 41 angegeben ist, s. Noten zu BALDI, *Vite* ecc. p. 18.

[18] Dieses ms. ist also nicht identisch mit dem, ebenfalls *anonymen* im *Catal. MSS. Angliae* I, 173 n. 3623 [18], welches WÜSTENFELD (*Die Übers.* S. 60) ohne Weiteres mit AHMED's Schrift identificirt.

[19] Zeitschrift für Mathematik **16**, 1871, 391.

[20] *Études sur Zarkali* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18**, 1885, 354).

[21] Zeitschrift für Mathematik **10**, 1865, 498. HAMMER, *Literaturgesch.* **4**, 341 fügt hinzu: »der arabische Azais (was bedeutet das?) des Compensations».

[22] HAGI KHALFA, *Lex.* **3**, 639 n. 7321 (dazu **7**, 763), schon angeführt in Noten zu BALDI, *Vite* ecc. p. 18.

[23] Zeitschrift für Mathematik **12**, 1867, 39 n. 64 war mir eine solche Namensentstellung noch nicht wahrscheinlich.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

A. Favaro. BONAVENTURA CAVALIERI NELLO STUDIO DI BOLOGNA. Estratto dagli Atti e Memorie della r. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna. 6₃. Bologna 1888. In-8°, 60 p.

A la biographie sur CAVALIERI donnée par PIOLA dans l'écrit: *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (1844), M. FAVARO ajoute dans le mémoire présent quelques notices intéressantes tirées pour la plus grande part des documents inédits publiés ici en appendice et de la correspondance de GALILEI. Les notices se rapportent en premier lieu aux efforts de CAVALIERI, couronnés enfin de succès, pour être nommé professeur de mathématiques à l'université de Bologna, et à ses travaux scientifiques, qui étaient considérés en quelque sorte comme faisant partie des fonctions de cette charge. A ce sujet, M. FAVARO rend compte d'une petite querelle entre GALILEI et CAVALIERI; cette querelle se rapportait à un passage de l'ouvrage *Lo specchio ustorio* (1632), où CAVALIERI avait indiqué que la courbe décrite par une projectile est une parabole ordinaire, bien que GALILEI n'eût pas encore publié cette découverte lui-même. Heureusement, CAVALIERI réussit bientôt à désarmer la colère de son illustre maître. — A la fin, M. FAVARO prouve que le jour de la mort de CAVALIERI a été le 27 nov. et non pas le 1 déc. 1647, comme l'indique PIOLA.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

F. Hultsch. SCHOLIEN ZUR SPHAERIK DES THEODOSIOS. (Abhandl. der philol. Classe der Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. 10.) Leipzig 1887. In-4°, 66 p.

Dans la note: *Eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des Theodosios* insérée aux Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, M. HULTSCH a donné des renseignements sur une suite de scolies se trouvant dans le manuscrit grec 2342 de la bibliothèque nationale de Paris et dans le manuscrit grec 204 de la bibliothèque Vaticane; le premier manuscrit est du 14ᵉ, le second du 10ᵉ siècle. Dans le mémoire présent, il a publié ces scolies, avec une introduction et des notes explicatives et critiques; il a ajouté aussi une vingtaine de figures, en vue de faciliter la lecture du texte grec. Le nombre total des scolies est non

moins de 359, mais plusieurs en sont très courts. Quelques uns appartiennent, comme l'a démontré M. HULTSCH, à un recueil de lemmes utilisé par PAPPOS et cité par lui dans le traité sur les figures isopérimétriques. M. HULTSCH fait remarquer aussi que certains des scolies sont d'un intérêt particulier pour l'examen du texte des *Elementa*, qui y sont plusieurs fois cités.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1888: 3.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
33 (1888): 4—5. — [Analyse de l'année 1887:] Biblioth. Mathem. 1888, 88—90. (G. ENESTRÖM.)

Curtze, M., Über einen De la Hire zugeschriebenen Lehrsatz.
Biblioth. Mathem. 1888, 65—66.

Günther, S., Über eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler.
Biblioth. Mathem. 1888, 81—87.

Heiberg, J. L., Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 161—170.

Künssberg, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Theil: Lebensbeschreibung des Eudoxos, Überblick über seine astronomische Lehre und geometrische Betrachtung der Hippopede. (Programm zum Jahresbericht der vierkursigen königl. Realschule Dinkelsbühl pro 1888.) Dinkelsbühl 1888.
8°, 59 p. + 1 pl.

Loria, G., Notizie storiche sulla Geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1888, 67—80.

Noether, M., Carl Gustav Axel Harnack.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 121—124.

Unger, F., Das älteste deutsche Rechenbuch. Herausgegeben und übersetzt.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 125—145. — Le traité dont il s'agit se trouve dans un manuscrit composé vers l'an 1445.

°**Unger, F.,** Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis

auf die Gegenwart. Nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig, Teubner 1888.
8°, XII + 240 p. — [6 M.]

Voss, A., Zur Erinnerung an Axel Harnack.
Mathem. Ann. **32**, 1888, 161—174.

Zeuthen, H. G., Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1888, 127—144.

Question 22 [sur la formule de l'aire d'un triangle sphérique.]
Biblioth. Mathem. 1888, 96. (G. ENESTRÖM.)

FAVARO, A., Per la edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Esposizione e disegno. Firenze 1888. 4°.
Biblioth. Mathem. 1888, 90. (G. ENESTRÖM.) — Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 192—193. (CANTOR.)

GOVI, G., L'ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia, scrittore del secolo XII ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo imperfetto ora per la prima volta conforme a un codice della Biblioteca Ambrosiana per deliberazione della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicata. Torino 1885. 8°.
Biblioth. Mathem. 1888, 91—92. (E. NARDUCCI.)

MARRE, A., Théorème du carré de l'hypothénuse. (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**.) Roma 1888. 4°.
Jorn. de sc. mathem. **8**, 1888, 135. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1887. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 150—160.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1888, 93—96. — Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 148—149, 199—200. — Fiziko-matem. naouki **4**, 1888, 169—176.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

23. Is there any earlier use of *e* for 2,71828... than in EULER, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae 1748) I, p. 90: »Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,718281828459 etc. constanter litteram *e*«?

(W. W. Beman.)

Index.

auf die Gegenwart. Nach den Originalquell…
Leipzig, Teubner 1888.
8°, XII + 240 p. — [6 M.]

Voss, A., Zur Erinnerung an Axel Harnack…
Mathem. Ann. **32**, 1888, 161—174.

Zeuthen, H. G., Note sur l'usage des c…
quité et sur l'invention de cet instru…
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1…

Question 22 [sur la formule de l'…
Biblioth. Mathem. 1888, 96. (G.…

FAVARO, A., Per la edizione…
Galilei sotto gli auspicii d…
e disegno. Firenze 188…
Biblioth. Mathem. 1888, …
33, 1888; Hist. Abth. 1…

GOVI, G., L'ottica di …
di Sicilia, scrittore…
traduzione arab…
volta conforme…
deliberazione…
pubblicata.
Biblioth. …

MARRE, A. …
bibliog…
Jorn. …

Mathem…
Jan…

[Li…

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889.

NEUE FOLGE 3. — NOUVELLE SÉRIE 3.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan [illegible]

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
[illegible] STRASSE [illegible]

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE [illegible]

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1889.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT	JOURNAL
FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK	D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
HERAUSGEGEBEN VON	PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889.

NEUE FOLGE 3. NOUVELLE SÉRIE 3.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
FRANZÖSISCHE STRASSE 38/39.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM [illegible]

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 3. | NOUVELLE SÉRIE. 3.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques 1667—1888.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Les premiers écrits suédois relatifs à l'histoire des mathématiques ont été publiés vers le milieu du 17ᵉ siècle. Cependant ces quelques écrits étaient peu importants et on peut dire que l'étude de l'histoire des mathématiques en Suède ne date que du 18ᵉ siècle. L'éminent mathématicien S. KLINGENSTIERNA (1698—1765) s'intéressa vivement aux recherches historiques; il avait entrepris lui-même une réstitution, qui resta malheureusement inachevée, des *Porismes* d'EUCLIDE, et il encouragea ses élèves à publier des thèses se rapportant à l'histoire des mathématiques. Vers le même temps (en 1747), l'académie des sciences de Suède commença de faire paraître dans ses Mémoires une série de notes sur l'histoire des sciences en général; parmi ces notes, écrites pour la plus grande partie par P. ELVIUS (1710—1749) et P. WARGENTIN (1717—1783), il y en a deux relatives aux mathématiques pures. Cette série fut interrompue en 1758, mais d'autre part le nombre des thèses historico-mathématiques publiées aux universités suédoises s'accrut jusqu'à la fin du siècle. Cependant les dates principales du développement de la science mathématique étaient alors peu connues en Suède; ainsi, dans un traité d'arithmétique publié à Stockholm en 1755,* l'auteur donne la notice suivante sur l'histoire de

* J. BERGMARK, *Svensk räknebok* (Stockholm 1755, in-4°), préface: *En arabisk mathematicus benämd* GEBERUS *eller* GEBER, *skal på syriska språket*

l'algèbre: »Le mathématicien arabe GEBER a écrit, en langue »syrique, le premier ouvrage sur le calcul algébrique et pré»senté cet ouvrage au roi Alexandre le Grand; puis, en 1494, »ce calcul a été transporté à Venise par LUCAS DE BURGO.»

Le commencement du 19^e^ siècle a été peu favorable pour la litérature suédoise historico-mathématique, mais dès le milieu de cette siècle nous rencontrons plusieurs auteurs d'écrits s'y rapportant. Parmi ces auteurs il convient de signaler particulièrement C. A. AGARDH (1785—1859), le célèbre naturaliste, et C. J. D. HILL (1793—1875), professeur à Lund, qui avait fait aussi de profondes études sur DIOPHANTE. Je peux ajouter que C. J. MALMSTEN (1814—1886) s'intéressa beaucoup pour des études historiques, bien qu'il ne publiât presque rien sur ce sujet.

De nos jours, le nombre d'auteurs suédois qui se sont dédiés principalement à l'histoire des mathématiques n'est pas grand, mais, d'un autre côté, on trouve souvent, au commencement de mémoires traitant différentes parties des mathématiques, des introductions historiques plus ou moins étendues.*

Dans la liste suivante, j'ai régistré, en ordre chronologique, les écrits historico-mathématiques publiés par des Suédois ou en langue suédoise, et j'y ai ajouté les indications bibliographiques nécessaires ainsi que des tables méthodique et alphabétique.

1667.

Schult, S., Cyclometria veterum. Upsaliæ 1667.

8°, 24 p. + 3 pl. — Thèse défendue sous la présidence de P. O. FONTELIUS. — Notices historiques sur les méthodes des anciens pour carrer le cercle.

---

aldra först hafva författat algebraiska räknesättet uti en bok, then han skal öfwerlämnat til konung Alexander Magnus, hwarefter, eller år 1494, merberörde räknekånst skal igenom LUCAS DE BUGO (!) *blifwit förd til Venedig.*

* Je citerai, comme exemples, les mémoires suivants:

JONSSON, W. O., *Den Cauchyanska kontaktsteorien jemte en kort framställning af den generela kontaktsteoriens uppkomst och utveckling.* Upsala 1872, in-8°. (Pag. 1—28: Histoire de la théorie du contact des courbes.)

MELLBERG, E. J., *Teorin för determinantkalkylen.* Helsingfors 1876, in-8°. (Pag. 1—50: Histoire de la théorie des déterminants.)

MITTAG-LEFFLER, G., *En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna.* Helsingfors 1876, in-8°. (Pag. 1—27: Histoire de la théorie des fonctions elliptiques.)

MELANDER, K., *En studie öfver de elliptiska funktionerna.* Stockholm 1883, in-8°. (Pag. 1—37: Histoire de la théorie des fonctions elliptiques.)

1669.

Hullder, L., Scholæ mathematicæ de geometriæ origine, progressu et præstantia. Upsaliæ 1669.

8°, 28 p. + 1 pl. — Thèse défendue sous la présidence de J. L. FORNELIUS.

1694.

Vallerius, H., De matheseos incrementis. Upsaliæ 1694.

8°, (2) + 20 p. — Thèse défendue par J. J. DRYANDER. — L'auteur cherche à démontrer par des exemples historiques que *Mathesis hodierna perfectior, compendiosior et clarior est mathesi veterum.*

1716.

Vallerius, J., Problema Deliacum de duplicatione cubi. Upsaliæ 1716.

8°, (4) + 71 + (1) p. — Thèse essentiellement historique, défendue par J. A. REENMARCK.

1731.

Strömer, M., Specimen historiæ literariæ de arte conjectandi. Upsaliæ 1731.

4°, (4) + 16 p. — Thèse défendue sous la présidence de S. KLINGENSTIERNA.

1737.

Helsingius, G., Exercitium academicum historiam literariam algebræ sistens. I. Upsaliæ 1737.

4°, (4) + 36 p. — Thèse défendue sous la présidence de S. KLINGENSTIERNA. — La 2e partie, qui aurait traité l'histoire de l'algèbre après NEWTON, n'a pas paru.

1746.

Duræus, S., De analysi veterum geometrica. Upsaliæ 1746.

4°, 29 p. — Thèse défendue par N. LINDBLOM.

Elvius, P., Historien om mathematiska vetenskaper, förestäld uti ett tal . . . d. 10 sept. 1746. Stockholm 1746.

8°, 36 p. — Discours sur l'histoire des sciences mathématiques.

1748.

Elvius, P., Vetenskapernas historia. Om krokuga linier i gemen och om trajectorier i synnerhet.

Stockholm, Vetenskapsakad., Handlingar **9**, 1748, 81—95. — Sur l'histoire des lignes courbes et en particulier des trajectoires.

Traductions:

Geschichte der Wissenschaften; von krummen Linien überhaupt, und den durchstreichenden insbesondere.

Abhandlungen d. schwed. Akad. d. Wissensch. **10** (1748), 81—96.

Historia scientiarum. De lineis curvis in genere & præsertim de trajectoriis.

Analecta transalpina (Venetiis) **2** (1747—1752), 144—151.

1752.

Melander[hjelm], D., Disputatio de natura et veritate methodi fluxionum. Upsaliæ 1752.

4°, (2) + 63 p. + 1 pl. — Thèse défendue sous la présidence de S. KLINGENSTIERNA. — Ouvrage historique et critique.

Wargentin, P., Af vetenskapernas historia; om logarithmerna.

Stockholm, Vetenskapsakad., Handlingar **13** (1752), 1—11. — Sur l'histoire des logarithmes.

Traductions:

Geschichte der Wissenschaften. Von den Logarithmen.

Abhandlungen d. schwed. Akad. d. Wissensch. **14** (1752), 3—15.

Historia scientiarum. De logarithmis.

Analecta transalpina **2** (1747—1752), 378—387.

1755.

Meldercreutz, J., De summatione seriei reciprocæ e quadratis numerorum naturalium. Holmiæ 1755.

4°, 40 p. + 1 pl. — Thèse défendue à l'université d'Upsala par C. G. BERGSTRÖM. — Notice historique.

1762.

Nymansson, P., Historia mathematicæ romanorum. I. Upsaliæ 1762.

4°, 8 p. — Thèse défendue sous la présidence de P. EKERMAN. — La 1e partie se rapporte à l'histoire de l'astrologie chez les Romains; la 2e partie, qui aurait contenu l'histoire des mathématiques pures, n'a pas paru.

1769.

Melander[hjelm], D., Observationes nonnullæ in scientiarum mathematicarum statum præsentem. Upsaliæ 1769.

4°, 19 p. — Thèse défendue par N. COLLIN.

1776.

Nordmark, Z., De scriptis veterum analyticis. Upsaliæ 1776.

4°, 35 p. + 1 pl. — Thèse défendue par N. J. BERGSTEN.

1782.

Bergsten, N. J., Dissertatio sistens controversiam de logarithmis numerorum negativorum. I, II. Upsaliæ 1782, 1788.

4°, (2) + 44 p. + 2 pl. — Deux thèses, dont la première fut défendue sous la présidence de F. MALLET.

1784.

Plantin, Z., Om geometriens uprinnelse, visshet och gränsor. *Stockholm*, Vetenskapsakademien, Inträdestal 1784. 16 p. — Sur l'origine, la certitude et les limites de la géométrie.

1786.

Hultén, A., Dissertatio de methodis tangentium ante Newtonum usitatis. I, II. Upsaliæ 1786, 1787.
4°, (4) + 38 p. + 1 pl. — Deux thèses.

1789.

Brandelius, C. M., Dissertatio historico-mathematica sistens Archimedis vitam, ejusque in mathesin merita. Gryphiswaldiæ 1789.
4°, 14 + (2) p. — Thèse défendue sous la présidence de C. Brisman.

1792.

Hultén, A., De vestigiis methodi fluxionum atque calculi differentialis ante Newtonum et Leibnitium obviis. Gryphiswaldiæ 1792.
4°, 15 + (1) p. + 1 pl. — Thèse défendue par C. P. Ekholtz.

1793.

Östérholm, P., Specimen academicum incrementa artis analyticæ leviter tangens. Lundæ 1793.
4°, 16 p. — Thèse défendue par P. A. Varenius.

1797.

Hultén, A., Methodus Huddenii de maximis et minimis cum calculo fluxionum comparata. Gryphiæ 1797.
4°, 12 p. + 1 pl. — Thèse défendue par P. Nordin.

1799.

Droysen, J. F., Rede von den Verdiensten der schwedischen Gelehrten um die Mathematik und Physik, zur Feyer des Hohen Geburtsfestes unsers allerdurchlauchtigsten grossmächtigsten Königs und Herrn Gustav IV. Adolphs, im grossen Hörsaale gehalten . . . den 1 Nov. 1799. Greifswald 1800.
8°, (2) + 48 p. — [Reproduit:] Arch. der Mathem. **40**, 1863, 399—425.

Landerbeck, N., Om de mathematiska vetenskapernas tilstånd vid Upsala academie under det sjutonde seclet.

Stockholm, Vetenskapsakad., Presidietal 1799. (2) + 34 p. — Sur l'état des sciences mathématiques à l'université d'Upsala au 17e siècle.

1835.

Hill, C. J. D., Conatuum theoriam linearum parallelarum stabiliendi præcipuorum brevis recensio. Lundæ 1835—1850.
4°, 74 p. — Les différentes sections de ce memoire ont été publiées sous forme de thèses.

1846.

A[gardh], C. A., Inledning till algebra. För elementarundervisningen. Förra häftet. Carlstad 1846.
8°, (24) + XVII + 157 + (4) p. — Traité d'algèbre; avec plusieurs notices historiques. — La seconde partie de ce traité, qui aurait contenu un chapitre sur l'histoire de l'algèbre, n'a pas été publiée.

1847.

Hill, C. J. D., Några historisk-matematiska anmärkningar.
Forhandlinger ved de skandinaviske naturforskeres Möder 5 (1847), 360—373. — Sur les précurseurs du calcul infinitésimal.

1848.

Agardh, C. A., Essai sur la métaphysique du calcul différentiel. Stockholm 1848.
8°, (2) + 46 p. + 1 pl. — Ecrit essentiellement historique.

1850.

Hill, C. J. D., Bidrag till binomial-theoremets historia. Lund 1850.
Folio, 14 p. — Promotionsprogramm. — Sur l'histoire du théorème binomial avant Newton.

1860.

Lindman, C. F., Om uppfinningen af logarithmerna samt om noggrannheten hos beräkningar, verkställda medelst logarithmer.
Strengnäs, Elementarläroverk, Årsberättelse 1860, 3—21. — Sur l'invention des logarithmes.

1861.

Ahlander, J. A., Några antydningar om de gamles geometriska constructionssätt.
Jönköping, Elementarläroverk, Årsberättelse 1861, 15—23. — Notices sur les méthodes géométriques des Grecs.

Hill, C. J. D., Några ord om Erland Sam. Brings reduktion af 5:te gradens eqvation.

Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **18**, 1861, 317—355. — Sur la méthode de transformation de l'équation du 5e degré indiquée par E. S. BRING.

1863.

Lindman, C. F., Wichtige historische Mittheilung [über die von E. S. BRING ausgeführte Reduction der allgemeinen Gleichung 5ten Grades].

Arch. der Mathem. **40**, 1863, 515—516. — D'après la communication de HILL (voir ci-dessus).

1868.

Selander, K. E. I., Historik öfver Ludolphska talet. Upsala 1868.

8°, (2) + 66 p. + 1 pl. — Histoire des méthodes proposées pour déterminer la valeur du nombre π.

Hultman, F. W., Svenska aritmetikens historia.

Tidskr. för matem. **1**, 1868, 1—11, 53—67, 149—164, 245—256; **2**, 1869, 57—63, 105—113; **3**, 1870, 7—11, 49—95, 243—249; **4**, 1871, 5—12, 97—101, 209—224, 270; **5**, 1874, 1—10, 145—162, 225—241. — Histoire de l'arithmétique en Suède (inachevée). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **2** (1869—1870), 15; **3** (1871), 9 (HN.); **7** (1875), 17 (BG.) — Bullet. d. sc. mathém. **1**, 1870, 295.

1870.

Wackerbarth, A. F. D., Om den stora pyramiden i Gizeh.

Tidskr. för matem. **3**, 1870, 205—224. — Critique de la tentative de PIAZZI SMYTH de reconstruire les connaissances mathématiques et astronomiques des Egyptiens à l'aide des dimensions de la grande pyramide de Gizeh. — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. **1**, 1870, 296.

1871.

D[au]g, H. T., Anmärkningar beträffande benämningen: Naturlig, Hyperbolisk och Nepersk logaritm.

Tidskr. för matem. **4**, 1871, 28—31. — Remarques historiques sur les noms: logarithme naturel, hyperbolique et népérien. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **3** (1871), 9. (HN.)

1872.

Björling, O. E., Summarisk framställning af metoderna för algebraisk lösning af den allmänna 4:de grads eqvationen. Förra afdelningen. Vesterås 1872.

8°. (2) + VI + 26 p. — Thèse (université d'Upsala). — Sur les méthodes de résolution algébrique des équations du 4e degré. — [Analyse:] Jahrb. üb. die Fortschr. d. Mathem. **4** (1872), 45—46. (BG.)

1875.

Dahlin, E. M., Bidrag till de matematiska vetenskapernas historia i Sverige före 1679.
Upsala, Universitet, Årsskrift 1875. (2) + IV + 146 + (2) p. + 1 pl. — Sur l'histoire des sciences mathématiques en Suède jusqu'en 1679. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **7** (1875), 17. (BG.)

Lindeberg, K. M., Historisk öfversigt af teorierna för singulära solutioner till differentialeqvationer.
Stockholm, Nya elementarskolan, Årsberättelse 1875. (2) + 44 p.; publié aussi comme thèse (université d'Upsala). — Aperçu historique de la théorie des solutions singulières des équations différentielles. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **7** (1875), 19—20. (BG.) — Pedagogiska blad (Stockholm) **1**, 1875, 183—185. (G—öm.)

1876.

Eneström, G., Framställning af striden om det isoperimetriska problemet. En monografi.
Upsala, Universitet, Årsskrift 1876. (2) + 77 p. — Histoire de la querelle au sujet du problème des isopérimètres. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **9** (1877), 6—7, 282. (O., M.-L.) — Bullet. d. sc. mathém. **3**₂, 1879, 379—380.

1877.

Friesen, S. G. von, Studier öfver de negativa kvantiteterna. Stockholm 1877.
8°, (4) + 56 + (1) p. + 1 pl. — Etudes historiques sur les quantités négatives. — Thèse (université d'Upsala). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **9** (1877), 20. (M.-L.)

1879.

Eneström, G., Differenskalkylens historia. I.
Upsala, Universitet, Årsskrift 1879. (4) + 71 p. — Histoire du calcul aux différences finies. — *Originalbericht:* Repertorium d. liter. Arb. aus d. Gebiete d. Mathem. **2**, 1879, 340—342. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **10** (1878), 27. (M. L.) — Bullet. d. sc. mathém. **3**₂, 1879, 380—381.

Eneström, G., Ett konvergenskriterium från början af 1700-talet.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **36**, 1879, n° 9: 71—84. — Une règle de convergence proposée au commencement du 18e siècle. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **11** (1879), 38. (M. L.) — Bullet. d. sc. mathém. **5**₂, 1881; Revue 210.

Eneström, G., Om upptäckten af den Eulerska summationsformeln.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **36**, 1879, n° 10: 3—17. — Sur la découverte de la formule sommatoire d'Euler. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **11** (1879), 38—39. (M. L.) — Bullet. d. sc. mathém. **5**₂, 1881; Revue 210.

Eneström, G., Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler, publiées par B. Boncompagni. Anmälta.

Tidsskr. for Mathem. 3_4, 1879, 33—45. — Compte rendu des lettres inédites de LAGRANGE à EULER publiées par B. BONCOMPAGNI. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **11** (1879), 21. (GM.)

Traduction:

Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler publiées par B. Boncompagni. Traduit du danois par MM. L. LÉOUZON LE DUC et ARISTIDE MARRE.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879), 828—838. — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. 6_2, 1882; Revue 202. (A. MARRE.)

Eneström, G., Spridda bidrag till matematikens historia. I. Differentialekvationers singuliera solutioner. II. Vanliga bokstäfver såsom tecken för obekanta storheter.

Tidsskr. for Mathem. 3_4, 1879, 113—118, 161—165. — Notice historique sur les solutions singulières des équations différentielles et sur l'usage de lettres pour désigner des quantités inconnues.. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **11** (1879), 30—31, 39—40. (GM.)

Eneström, G., Notice sur la correspondance de Jean I^er^ Bernoulli.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879), 313—314. — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. 6_2, 1882; Revue 196. (A. MARRE.)

Söderblom, A., Om tal och siffertecken.

Nordisk tidskrift för vetenskap, konst och industri (Stockholm) 1879, 661—674. — Sur les signes numéraux et les systèmes de numération.

1880.

Eneström, G., Trois lettres inédites de Jean I^er^ Bernoulli à Léonard Euler tirées de la correspondance de Jean I^er^ Bernoulli gardée dans la bibliothèque de l'académie royale des sciences de Stockholm.

Stockholm, Vetenskapsakad., Bihang **5**, 1880. 24 p. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **10** (1879), 18—19. (M. L.) — Zeitschr. für Mathem. **26**, 1881; Hist. Abth. 75—76. (S. GÜNTHER.) — Arch. d. Mathem. **65**, 1880; Litter. Ber. 25—26. (H.)

Traduction:

Cartas inéditas de Bernoulli a Euler.

Cronica cientifica (Barcelona) **3**, 1880, 329—335, 353—357, 377—382.

Eneström, G., Om matematikens historia såsom studieämne vid Nordens högskolor.

Tidsskr. for Mathem. 4_4, 1880, 62—73. — Sur des études d'histoire des mathématiques aux universités scandinaves. — [Remarques sur cette note:] Tidskr. for Mathem. 4_4, 1880, 74—76. (H. Z.) — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **12** (1880), 28. (GM.)

1881.

Gustrin, E. F., Euclides' Elementa.
Pedagogisk tidskrift (Halmstad), **17**, 1881, 141—153.

1883.

Malmsten, C. J., Om uppkomsten af x såsom beteckning för den obekanta.
Nordisk tidskrift för vetenskap, konst och industri 1883, 136—1[illegible]o. — Sur le premier emploi de la lettre x pour désigner une quantité inconnue. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. [illegible]5 (1883), 21. (G. E.)

1884.

Bibliotheca Mathematica. Herausgegeben von | rédigée par G. Eneström. 1884—1886. Stockholm 1884—1886.
4°. Année 1884: (2) p. + 124 col. Année 1885: (2) p. + [illegible]00 col. Année 1886: (4) p. + 244 col. — Ce recueil contient: 1:o Listes de publications récentes de mathématiques pures; 2:o Petites notes sur l'histoire des mathématiques. — [Notices ou analyses:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **2**$_6$, 1884, 923—925; **5**$_6$, 1887, 1[illegible]57—1161. (A. Favaro.) — Crónica científica **7**, 1884, 157. — Casopis pro pest. matem. (Prag) **13**, 1884, 30. (C. Le Paige.) — Tidsskr. for Mathem. **2**$_5$, 1884, 191—192. (J. P. Gram.) — *Napoli*, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto **24**, 1885, 29—30; **25**, 1886, 27—28; **26**, 1887, 43—44. (G. Govi.) — Deutsche Litteraturz. **6**, 1885, 800—801 (M. Curtze); **7**, 1886, 608—609 (G. Valentin). — *Roma*, Accad. d. N. Lincei, Atti **38**, 18[illegible]85, 75—77. (B. Boncompagni.) — *Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti **18**$_2$, 1885, 128. (R. Ferrini.) — Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885; Hist. Abth. 280. (Cantor.) — Arch. der Mathem. **3**$_2$, 1886; Litter. Ber. 34—35. (H.) — Centralbl. für Bibliothekswesen (Halle) **3**, 1886, 150. (A. Graesel.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **21**, 1886, 257—258. (F. Siacci.) — Il bibliofilo (Bologna) **7**, 1886, 106. (P. Riccardi.) — Vjestnik elem. matem. (Kiew) **2**, 1887, 39—40. — Fiziko-matemat. naouki (Moskwa) **2** (1886), B: 179—186. (V. Bobynin.)

Eneström, G, Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718.
Biblioth. Mathem. 1884, 15—16. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 12. (E.)

Eneström, G., Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul Tannery.
Biblioth. Mathem. 1884, 47—48. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 3. (E.)

Eneström, G., Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide publiées en Suède.
Biblioth. Mathem. 1884, 79—80. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 2. (E.)

eström, G., Notice sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède.
Biblioth. Mathem. 1884, 121—124. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 40. (E.)

eström, G., Om några af Bierens de Haan nyligen utgifna matematiska skrifter från sextonhundratalet.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **41**, 1884, n° 9: 191—197. — Sur quelques écrits mathématiques du 17ᵉ siècle publiés par BIERENS DE HAAN. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 16—17. (E.)

ovius, E., Undersökningarna om cirkelns kvadratur.
Finsk tidskrift (Helsingfors) **16**, 1884, 325—339. — Notices historiques sur la quadrature du cercle. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 39. (E.)

1885.

bliotheca Mathematica, *voir* 1884.

eström, G., Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue.
Biblioth. Mathem. 1885, 41—42. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 29. (E.)

eström, G., Notice bibliographique sur un traité de perspective publié par Desargues en 1636.
Biblioth. Mathem. 1885, 89—90. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 11. (E.)

eström, G., Notice sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en Suédois.
Biblioth. Mathem. 1885, 46—48, 92—94; 1886, 45—48, 92—95, 140—141. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 14; **18** (1886), 2. (E.)

eström, G., Notice bibliographique sur un écrit de Condorcet intitulé: »Essais d'analyse».
Biblioth. Mathem. 1885, 191—192. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 12. (E.)

eström, G., Anteckningar om matematikern Petrus de Dacia och hans skrifter. [1], 2, 3.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **42**, 1885, n° 3: 15—27: n° 8: 65—70. **43**, 1886, n° 3: 57—60. — Sur la vie et les écrits du mathématicien danois PETRUS DE DACIA. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 4—5; **18** (1886), 7. (E.) — Comparez: S. GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter* (Berlin 1887), 167.

eström, G., Ett räkneexempel på landsmål från medlet af 1600-talet.
De svenska landsmålen (Stockholm) **6**, 1885, XXI. — Sur une question d'arithmétique proposée en patois dans un traité suédois d'arithmétique imprimé en 1655.

eström, G., Notice bibliographique sur les traductions en suédois des éléments d'Euclide.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18** (1885), 332—342. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 2. (Hch.) — Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 45. (H.) — Centralbl. für Bibliothekswesen **3**, 1886, 150. (A. Graesel.)

Eneström, G., Sur un théorème de Goldbach.

Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18** (1885), 468. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **18** (1886), 27. (Tn.) — Mathesis **6**, 1886, 133. — Arch. der Mathem. 4_2, 1886; Litter. Ber. 44—45. (H.)

Paulson, J., De fragmento Lundensi Boëtii De institutione arithmeticae librorum.

Lund, Universitet, Årsskrift **21**, 1885. 30 p.

1886.

Bibliotheca Mathematica, *voir* 1884.

Eneström, G., Note historique sur la formule générale d'interpolation de Newton.

Biblioth. Mathem. 1886, 142—144. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **18** (1886), 28. (E.)

Eneström, G., Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi.

Biblioth. Mathem. 1886, 236—239.

Eneström, G., En gengångare från frihetstiden inom vår läroboks-literatur.

Pedagogisk tidskrift **22**, 1886, 203—206. — Sur l'introduction historique à la traduction suédoise des Elementa par M. Strömer.

Eneström, G., Note historique sur une série dont le terme général est de la forme $A_n(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **103**, 1886, 523—525. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **18** (1886), 208. (Lp.) — Fiziko-matem. naouki **3**, 1887, B: 89.

1887.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von | Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série **1—2**. Stockholm 1887—1888.

8°. **1** (1887): IV + 124 p. — **2** (1888): IV + 124 p. — [Notices ou analyses:] *Roma,* Accad. d. Lincei, Rendiconti 3_4, 1887, 1: 151—152. (E. Narducci.) — Centralbl. für Bibliothekswesen **4**, 1887, 231. (A. Graesel.) — Das Archiv (Berlin) **1**, 1887, 39. — *Venezia,* Istituto Veneto, Atti 6_6, 1888, 351—356. (A. Favaro.)

Eneström, G., Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques.

Biblioth. Mathem. 1887, 3—7.

Eneström, G., Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718.
Biblioth. Mathem. 1887, 23—24.

Eneström, G., Acta Mathematica. Inhaltsverzeichniss der Bände | table des matières des tomes 1—10.
Acta Mathem. 10, 1887, 349—397. — Contient aussi des notices biographiques sur les auteurs et des notices bibliographiques sur les mémoires respectifs.

1888.

Bibliotheca Mathematica, *voir* 1887.

Eneström, G., Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson.
Biblioth. Mathem. 1888, 17—18.

Eneström, G., Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres.
Biblioth. Mathem. 1888, 38.

Jonsson, W. O., Om cirkelns kvadratur. Stockholm 1888.
8°, (2) + 132 p. + 1 pl. — Notice historique sur les méthodes pour déterminer l'aire d'un cercle.

I. TABLE MÉTHODIQUE.

1. *Généralités sur l'histoire des mathématiques.*

Bibliotheca Mathematica, 1884, 1887. — Eneström, 1880, 1887. — Elvius, 1746. — Plantin, 1784. — Hullder, 1669. — Vallerius, 1694. — Eneström, 1879. — Agardh, 1846. — Hill, 1835. — Selander, 1868. — Neovius, 1884. — Jonsson, 1888. — Söderblom, 1879. — Helsingius, 1737. — Friesen, 1877.

2. *Histoire des mathématiques dans l'antiquité.*

Wackerbarth, 1870. — Schult, 1667. — Vallerius, 1716. — Duræus, 1746. — Nordmark, 1776. — Ahlander, 1861. — Brandelius, 1789. — Gustrin, 1881. — Eneström, 1884. — Paulson, 1885. — Nymansson, 1762.

3. *Histoire des mathématiques au moyen-âge.*

Eneström, 1886, 1885. — Malmsten, 1883.

4. *Histoire des mathématiques récentes avant l'invention du calcul infinitésimal.*

Österholm, 1793. — Hill, 1850. — Wargentin, 1752. — Lindman, 1860. — Daug, 1871. — Björling, 1872. —

ENESTRÖM, 1884, 1885 (2). — HULTÉN, 1786, 1792, 1797. — HILL, 1847.

5. *Histoire des mathématiques depuis l'invention du calcul infinitésimal.*

AGARDH, 1848. — ENESTRÖM, 1876, 1879 (5), 1880, 1884, 1885 (2), 1886 (2), 1887, 1888. — LINDEBERG, 1875. — STRÖMER, 1731. — MELDERCREUTZ, 1755. — ELVIUS, 1748. — BERGSTEN, 1782. — MELANDERHJELM, 1752, 1769. ——— ENESTRÖM, 1887.

6. *Histoire des mathématiques en Suède.*

DAHLIN, 1875. — DROYSEN, 1799. — HULTMAN, 1868. ——— ENESTRÖM, 1884, 1885 (2), 1888. — LANDERBECK, 1799. ——— ENESTRÖM, 1885, 1884, 1886. — HILL, 1861. — LINDMAN, 1863.

II. TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

AGARDH, C. A., 1846, 1848.
AHLANDER, J. A., 1861.
BERGSTEN, N. J., 1782.
BJÖRLING, O. E., 1872.
BRANDELIUS, C. M., 1789.
DAHLIN, E. M., 1875.
DAUG, H. T., 1871.
DROYSEN, J. F., 1799.
DURÆUS, S., 1746.
ELVIUS, P., 1746, 1748.
ENESTRÖM, G., 1876, 1879 (6), 1880 (2), 1884 (5), 1885 (8), 1886 (4), 1887 (3), 1888 (2).
FRIESEN, S. v., 1877.
GUSTRIN, E. F., 1881.
HELSINGIUS, G., 1737.
HILL, C. J. D., 1835, 1847, 1850, 1861.
HULLDER, L., 1669.
HULTÉN, A., 1786, 1792, 1797.
HULTMAN, F. W., 1868.
JONSSON, W. O., 1888.
LANDERBECK, N., 1799.
LINDEBERG, K. M., 1875.
LINDMAN, C. F., 1860, 1863.
MALMSTEN, C. J., 1883.
MELANDERHJELM, D., 1752, 1769.
MELDERCREUTZ, J., 1755.
NEOVIUS, E., 1884.
NORDMARK, Z., 1776.
NYMANSSON, P., 1762.
PAULSON, J., 1885.
PLANTIN, Z., 1784.
SCHULT, S., 1667.
SELANDER, K. E. I., 1868.
SÖDERBLOM, A., 1879.
STRÖMER, M., 1731.
WACKERBARTH, A. F. D., 1870.
VALLERIUS, H., 1694.
VALLERIUS, J., 1716.
WARGENTIN, P. W., 1752.
ÖSTERHOLM, P., 1793.

Über den »liber de similibus arcubus« des Ahmed ben Iusuf.

Von M. Curtze in Thorn.

In seiner Note über die Werke des Ahmed ben Iusuf ben Ibrahim[1] erwähnt Steinschneider (unter n° 3, Seite 114) eine Arbeit *de similibus arcubus*. Von dieser soll in dem Cod. Digby 174[1] gesagt sein: »Libellus de similibus arcubus, quem Jordanus [Nemorarius?] citat in libris suis de triangulis; cum figuris.« Zunächst muss das Fragezeichen hinter Nemorarius getilgt werden; die Erwähnung dieses kleinen Büchleins findet sich wirklich in dem *liber de triangulis* dieses Schriftstellers. Dieses Werk des Jordanus ist zusammen mit dem (anonymen) *liber de similibus arcubus* im Drucke schon vollendet; es fehlen nur noch die dazu gehörigen Figurentafeln. Sobald dieselben gleichfalls fertig sind, wird dasselbe der wissenschaftlichen Welt vorgelegt werden.

Die Notizen über den *liber de similibus arcubus* finden sich im dritten Buche der *Geometria* Jordani, welche auch *liber de triangulis* genannt wird. Es heisst da im Beweise des 4^{ten} Lehrsatzes: »Si linee inequales in eodem circulo arcus resecent, erit arcuum proportio maior quam cordarum, porcionum uero circulorum maior quam cordarum duplicata« und es folgt: »Et quia diametri ad diametrum est proporcio ut circumferencie ad circumferenciam, ut ostensum est in *libro de curuis superficiebus*« (ein Buch, das dem Archimedes zugeschrieben wird; siehe die Einleitung zum 3. Bande der Archimedes-Ausgabe Heiberg's[2] wo der Wortlaut der Lehrsätze dieses Buches abgedruckt ist), »et que circumferencie ad circumferenciam, ea est arcuum similium et eciam suarum cordarum, ut habetur in *libro de similibus arcubus*« etc. Das Citat bezieht sich auf den 3^{ten} Lehrsatz des fraglichen Werkes: »Omnium duorum arcuum similium proporcio corde unius ad cordam alterius est sicut proporcio diametri ad diametrum.«

Das zweite Citat findet sich im Beweise des 9. Lehrsatzes: »Si circulus alium infra contingat et a contactu linea per centra eorum transeat, quecumque linea ei perpendiculariter insistens hincinde per utrumque circulorum transiens si infra centrum maioris ducatur, siue alium secet, siue contingat, de minore uersus contactum minus concludet; que autem supra centrum maioris et contingit, hec sola tantumdem, que uero extra et

contingit, hec de minori concludet maius.» Es heisst da: »quia ergo arcus *eag* sit minor arcu *paq* argue ex hac regula, quod eadem est proporcio similium arcuum et suarum cordarum, que quidem habetur ex *libro de similibus arcubus*» etc. Dieser Satz findet sich nicht direkt in dem *liber de similibus arcubus* ausgesprochen, sondern kann nur aus den Beweisen zu den Lehrsätzen entnommen werden.

Der ganze *liber de similibus arcubus* umfasst nur 2½ Seite in der Dresder Handschrift »Db 86». Er enthält nur 5 Lehrsätze, beziehungsweise Aufgaben. Er beginnt mit der Erklärung, »Geometre eos arcus similes esse dicunt, qui angulos recipiunt equales.» Die fünf Sätze sind bezüglich:

1. Si fuerint circuli duo super idem centrum, et protrahatur a centro linea secans ambas circumferencias, itemque a centro protrahatur alia linea cum priori linea angulum faciens per utramque circumferenciam: erunt arcus circulorum similes.
2. In omnibus circulis circa idem centrum constitutis si protrahatur linea a centro in ulteriorem circumferenciam, et separentur duo arcus similes, necesse est, lineam a centro ad terminum exterioris arcus ductam transire per terminum interioris.
3. Omnium duorum arcuum similium proporcio corde unius ad cordam alterius est sicut proporcio diametri ad diametrum.
4. Arcum arcui proposito similem facere, cuius corda linee date sit equalis.
5. Si fuerint duo circuli super idem centrum, sitque diameter exterioris duplus diametro interioris, et separentur per aliquam lineam arcus similes in circulis, erit quadratum corde exterioris duplum ad duplum quadrati corde interioris arcus.

Aus der Erwähnung des Buches bei JORDANUS lässt sich, wie wir sahen, über die Autorschaft des AHMED BEN IUSUF nichts schliessen. Die von STEINSCHNEIDER gewünschte Untersuchung hat also den erhofften Erfolg nicht gehabt.

[1] STEINSCHNEIDER, *Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf*. Bibliotheca Mathematica 1888, 111—117.

[2] ARCHIMEDIS *opera omnia cum commentariis* EUTOCII. *Rec.* I. L. HEIBERG. Vol. III (Lipsiae 1881), p. LXXXVI — LXXXVIII.

Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Leipzig ist so viel mir bekannt die einzige der vor der Reformation gegründeten deutschen Universitäten, von welcher noch *Quaestionen*-bücher vorhanden sind, d. h. ununterbrochen fortgeführte Verzeichnisse der in den Disputationen behandelten Fragen (*Quaestiones et Sophismata*).[1]

Diese *Libri quaestionum*[2] sind in 5 grossen Foliobänden handschriftlich im Archiv der philosophischen Facultät der genannten Universität vorhanden; die Aufzeichnungen gehen von 1512—1566, der erste Band von 1512—1527.[3] Unter jedem Decanate wurden die ordentlichen Disputationen der Magister, die ausserordentlichen derselben sowohl *pro completione biennii* als *pro acturegentia*, und die ordentlichen der Baccalarien aufgezeichnet, zuerst der Name des disputirenden Magisters oder Baccalarius mit der Zeitangabe der Disputation, und hierauf die Titel der behandelten *Quaestiones et Sophismata* (letztere fehlten auch bisweilen).[4] Auf diejenigen *Quaestiones*, die aus den Gebieten der Grammatik, Logik und Ethik entnommen sind, trete ich selbstverständlich nicht ein, es interessiren uns hier nur die mathematischen und naturphilosophischen (astronomischen und physikalischen), deren Stoff zum grössten Teil die Physik, die Meteorologie und die *parva naturalia* des ARISTOTELES geliefert haben. Die Letzteren sind in sehr grosser Zahl vorhanden und verschaffen uns einen historischen Einblick in die Naturanschauungen des Mittelalters, ich will nur bemerken, dass die Begriffe *tempus, motus, mundus*, dann *sol, luna, terra*, ferner *tonitruus, iris, terrae motus*, etc. in den behandelten Fragen eine grosse Rolle spielen. Wie leicht einzusehen, mussten sich bei der grossen Zahl der abgehaltenen Disputationen dieselben Fragen öfters wiederholen, ich fand bisweilen schon nach 3 Tagen dasselbe Thema wieder behandelt. Die rein mathematischen Fragen dagegen sind sehr selten, was auch leicht zu begreifen ist, denn über feststehende, bewiesene Thatsachen lässt sich nicht wohl streiten. Wir erkennen übrigens an den gegebenen Beispielen auf den ersten Blick die dem Mittelalter eigene, vorwiegend philosophische Auffassung dieser so realistischen Wissenszweige, sie sind auch

aus diesem Grunde ohne Kenntniss der scholastischen Denk- und Ausdrucksweise oft nur schwer zu verstehen. Dazu kommt noch, dass der Codex die verschiedensten, zum grössten Teil sehr unleserlichen Schriften aufweist (denn jeder fungirende Decan trug die unter ihm abgehaltenen Disputationen eigenhändig in das Quaestionenbuch ein), so dass wohl hie und da ein Wort nicht ganz richtig gelesen wurde: ich bitte den Leser hiefür um Entschuldigung.

1512.

Mag. NICOLAUS KLEYNSCHMIDT.

(2 *Quaestiones,* die für uns kein Interesse haben, dann 4 *Sophismata,* von denen das zweite lautet:)

Quadraturam circuli non esse scitam, falso asseritur.

Nach der Form des *Sophisma* scheint sich KLEYNSCHMIDT zu der im Mittelalter herrschenden Ansicht zu bekennen, dass die Quadratur des Kreises gefunden sei; seine Gegner werden also diese Ansicht bestritten haben (s. weiter unten), leider kennen wir ihre Argumente nicht. Übrigens ist die Form der aufgestellten Behauptung aus ARISTOTELES entnommen, welcher in den *Kategorien* sagt: *Quadratura circuli, si est scibilis, nondum scita est.*

Mag. SIMON DILINGENSIS.

(*Quaestiones* ohne Interesse, das dritte *Sophisma* heisst:)

Stadia in latitudine terrae aequalia non respondent uni gradui in zodiaco.

Mag. ERASMUS HOLZHUTER.

U[trum] Numerus species quantitatis discretae, cujus principium formale unitatum aggregatio, affirmatur.

U[trum] Radius lucis vel coloris per medium subtile ad grossum veniens frangatur ad perpendicularem, qui in omnibus mediis eundem transitum (?) est retinens.

U[trum] Luna in aspectu oppositionis ad solem inventa solum eclypsetur sub eclyptica, vel prope in capite draconis vel cauda.

U[trum] Longitudines civitatum quae potius ab occidente quam ab oriente a physicis computantur, diversos habeant meridianos, ad quos duorum luminarium eclypsis simul venire non opinatur.

U[trum] Radii solares per urinale aqua repletum transeuntes, qui fracti ad punctum unum concurrunt, omni hora diei sole splendente tam in hyeme quam aestate combustibile incensioni aptum incendere possint.

Sophisma: Syllogismum committit falsigraphum, qui intendit quadrare circulum.

Der Sinn der 4. *Quaestio* (*Longitudines civitatum* etc.) ist mir nicht verständlich; im *Sophisma* scheint HOLZHUTER im Gegensatz zu KLEYNSCHMIDT in Bezug auf die Quadratur des Kreises den richtigen Standpunkt zu vertreten.

1513.

Baccal. CHRISTIANUS MARTINI *de Quelenborch.*

U[trum] Mare existens salsum et procellarum murmure et rapidis vorticibus decurrens nutabilem fluctivagum fluoris et refluxus motum luna producens naturali in die bis tum fluens tum refluens virtute lunae quae aequum dominium super humida ac sol super sicca habet.

Diese Worte waren sehr unleserlich geschrieben und desshalb mögen auch einzelne unrichtig wiedergegeben sein; immerhin erkennt man, dass es sich hier um Ebbe und Flut und den Einfluss des Mondes auf dieselben handelt.

1516.

Mag. STEPHANUS RODT *Cygnavius.*

U[trum] Vacuum quod natura abhorret sit locus non repletus corpore aptus tamen repleri.

U[trum] Tempus quod est numerus motus secundum prius et posterius sit a philosopho in physicis bene dictum.

Baccal. GEORGIUS KONZER *Pesnicius.*

U[trum] Iris ex radiis solaribus in rorida nube refractis generata circa sive post ortum effulgens serenitatem promittat.

1519.

Mag. SEBALDUS MÜNSTERER *Noricus.*

U[trum] Mathematica in primo gradu certitudinis atque pro quatuor ejusdem speciebus inter partes philosophiae collocata sit de rebus abstractis tum (?) secundum rationem philosophorum scientia.

Baccal. MARTINUS WIFFTENBERGER *Lipsicus.*

U[trum] Vacuum, locus in quo nihil existit, ratione motus et velocitatis et tarditatis motus in natura existere non possit.

Baccal. BALTHASAR ZOCH *Hallensis.*

U[trum] In toto terrarum orbe quem geometrae astronomos sequuti in quinque zonas distribuunt interque has duas

temperatas tres vere excessivas reperiantur animantia quatuor elementis degentia antipodesque necessario co dantur.

Baccal. EGNATIUS SALVELT *de Brunsperg.*

Sophisma: Pisces in aquis non respirare manifeste est.

1520.

Baccal. JOANNES GORITIUS *de Gorlitz.*

Sophisma logicum: Figura syllogistica mathematicæ figur triangulari finitima.

Mag. N. STEUDO *Misnavius.*

U[trum] Mathematica in astronomiae praeceptis ad sa vandos motus diversos qui in astris et orbibus coelestib apparent epicyclos et excentricos sine tamen vacui interven ponens, arcualem (sic!) lineam ex geometriae princip rectae et per quadrationem circuli possit aequari (sic!) magnitudinibus physicis, an solummodo abstractis et math maticis.

Mit Weglassung des Nebensächlichen ist die Quaestio wo so zu verstehen: Ob die Mathematik auch in physikalisch Grössen nach geometrischen Principien eine krumme Linie rec ficiren könne, oder bloss in abstracten, d. h. rein mathematisch Grössen. Als man in der Erkenntniss des Irrationalen weit schritt, musste sich diese Frage naturgemäss in die umgekehr verwandeln, d. h. kann man es auch abstract, oder bloss pl sikalisch?

1521.

Mag. WOLFGANGUS SCHINDLER *Cubitensis.*

Civitates sub eodem parallelo sitae aequalem habent di et noctem, non autem simul habent diei principium, medi nec finem; civitates vero sub eodem meridiano sitae c principium, medium et finem simul quidem habent, in qualem tamen valde diem habere possunt. (Vor dies ganz klaren Worten steht weder *U[trum]* noch *Sophism*

Mag. FRANCISCUS RICHTER *ex Henichen.*

U[trum] Primi motus sphaera quam nisi Zodiacus retrog dendo suo gradu moraretur velocitate sua instanter om corrumperet et perderet.

Mag. VIRGILIUS WELLENDORFFER *Saltzburgensis.*

Sophisma: Physicus quicquid considerat sub ratione mo considerat.

Mag. WOLFGANGUS SCHINDLER *Cubitensis.*

U[trum] Terra: quod partes ejus aquis exertae ceteris leviores sunt; aliud ponderis sui aliud magnitudinis centrum habens, et pro horum alterutro (?) sit universi centrum, an pro tertio quid est (esset? oder sit?) centrum gravitatis corporis ex terra et aqua aggregati.

Die Frage ist die im Mittelalter oft ventilirte über die Veränderung der Lage des Erdschwerpunktes in Folge der Vertheilung von Wasser und Land. SCHINDLER nimmt hier als feststehend an, dass der geometrische Mittelpunkt ein anderer sei als der mechanische und frägt dann, ob einer von diesen beiden auch zugleich der Schwerpunkt des Universums sei, und was man überhaupt unter dem Schwerpunkt eines aus Wasser und Land zusammengesetzten Körpers zu verstehen habe.[5]

1524.

Mag. MATTAEUS MATTZE *Aquanus.*

Sophisma: Non falsum dixit qui in mathematicis nec bonum nec finem posuit.

Mag. BALTHASAR FURSTER.

Sophisma: Quod sol in ortu et occasu major appareat quam uti ad nos proprius accesserit, cum eadem sit distantia, non visum sed medii dispositionem causam esse asserimus.

1526.

Baccal. CHRISTOPHORUS GANTZI (?).

U[trum] Sicut in integris multiplicatio augmentator et divisio minuator ita in minutiis contrarium vulgo perhibeatur.

CHRISTOPHORUS (ein anderer Name fehlt).

U[trum] Plures tribus dimensionibus omne solidum requirat.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Wichtigkeit dieser Quaestionenbücher für die Geschichte der Wissenschaften und des geistigen Lebens im Mittelalter darzulegen; wenn uns auch gerade dieser Band keine grosse Ausbeute an neuen Kenntnissen über das Wissen und die Anschauungen der scholastischen Zeit geliefert hat, so lässt er doch das Bedauern in uns wachwerden, dass diese Aufzeichnungen der Disputationen für das erste Jahrhundert der Leipziger Universität und auch diejenigen älterer Universitäten fehlen, besonders aber, dass nur die Titel der Quaestionen und nicht auch die Argumente der Disputanten und Oppo-

nenten aufgezeichnet worden sind. Vergeblich habe ich in diesem 1. Bande nach Quaestionen über die Drehung und Bewegung der Erde gesucht, es wäre interessant zu wissen, ob diese Fragen bald nach 1543, dem Erscheinungsjahre des Kopernikanischen Werkes, an den Universitäten discutirt worden sind. Vielleicht nimmt sich Jemand, dem die Quellen näher liegen als mir, die Mühe, auch die übrigen Bände dieser Quaestionenbücher zu durchgehen, oder anderswo nach solchen zu forschen: es soll der Zweck dieser kurzen Mitteilungen sein, zum Studium des Lebens und geistigen Schaffens an den mittelalterlichen Universitäten angeregt zu haben.

[1] Vgl. SUTER, *Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters*, p. 54. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Kantonsschule in Zürich 1887; zugleich als Festschrift zur 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Zürich erschienen.

[2] Vergl. F. ZARNCKE, *Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig* (in den Abhandl. der k. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, phil.-hist. Classe 2, 1857) pag. 860.

[3] Dieser 1. Bd. wurde mir durch gütige Vermittlung des Hrn. FR. ZARNCKE von der h. philosophischen Facultät der Universität Leipzig bereitwillig zur Verfügung gestellt, wofür ich hier öffentlich, sowohl Hrn. ZARNCKE als der h. Facultät, meinen besten Dank ausspreche.

[4] Vergl. über Disputationen, etc. meine citirte Abhandlung pag. 11—17.

[5] Vergl. S. GÜNTHER, *Ältere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen.* Halle 1878.

Addizioni alle Notizie storiche sulla Geometria numerativa,

di GINO LORIA a Genova.

Nuovi studii avendomi fatto accorto di certe lacune che si trovano nella mia memoria storica sulla Geometria numerativa[1], mi affretto a riempirle, riserbandomi, ove se ne manifesti il bisogno, di continuare in avvenire queste Addizioni.

Ho distribuite le aggiunte in discorso corrispondentemente ai §§ di cui si compone il mio precitato scritto.

[II.] Ai lavori citati a p. 41 sulle normali alle curve algebriche si possono unire quelli di S. ROBERTS[2] e A. VOSS[3] sul luogo dei centri di curvatura di una data superficie; e quelli dello stesso ROBERTS sulle singolarità della superficie parallela a una data.[4]

Il metodo usato da STEINER nella memoria *Ueber algebraische Curven und Flächen* per determinare la classe della evoluta di una curva algebrica piana è suscettibile di generalizzazione e guida a risolvere altri problemi di Geometria numerativa, come osservò il BECK nella sua nota *Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen.*[5]

Il GUNDELFINGER completò alcune delle ricerche consegnate dal BISCHOFF nella memoria citata a p. 40.[6]

[III.] I teoremi enunciati da CHASLES nei T. **58** e **59** dei Comptes rendus de l'Académie des sciences [de Paris] si trovano dimostrati nella memoria del TOGNOLI che porta il titolo *Teoremi di Chasles sopra le proprietà dei sistemi di coniche* (μ, ν) *che servono di base alla determinazione del numero di queste curve che soddisfano a cinque condizioni qualunque* (Pisa, 1869).

Alla memoria del DINO citata a p. 43 si può unire l'altra dello stesso autore: *Alcune applicazioni analitiche del metodo delle caratteristiche.*[7]

Gli scritti dello SPOTTISWOODE nominati a p. 44 non sono gli unici di questo autore che appartengano alla Geometria numerativa, chè fanno parte di essa anche le memorie *On the contact of conics with surfaces*[8] e *On the contact of surfaces*[9] e le note *Sur les surfaces osculatrices,*[10] *On the contact of quadrics with other surfaces*[11] e *On multiple contact of surfaces.*[12] — Alla

seconda delle memorie precitate serve di complemento e di continuazione il bel lavoro del CLIFFORD: *On Mr. Spottiswoode's contact problems.*[13]

Notiamo qui anche i lavori in cui HALPHEN determinò il numero dei punti di una curva piana dotata di singolarità qualunque in cui essa ha con una conica un contatto di quinto ordine o con une cubica un contatto di ordine superiore all' ottavo,[14] e il numero delle curve di una rete che osculano una data curva;[15] aggiungiamo pure la *Nota sul numero delle superficie di una rete che hanno un contatto tripunto colla curva d'intersezione di due superficie algebriche,* publicata dal TOGNOLI nel Giornale di matematiche.[16]

A proposito della *Note sur les quadriques polaires* dello ZEUTHEN, fisseremo l'attenzione del lettore sui punti di contatto che essa presenta col lavoro di SCHUBERT (che di poco la precede): *Geometrische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernflächen,*[17] in cui è esposta per la prima volta, se non erriamo, l'idea di applicare la Teoria delle caratteristiche dei sistemi di quadriche alle quadriche polari dei punti dello spazio rispetto a una superficie algebrica.

[V.] Le ricerche del VISALLI citate a p. 69 furono proseguite dello stesso autore nella nota *Sulle correlazioni (in due spazii a tre dimensioni) che soddisfano a dodici condizioni.*[18]

[VI.] Ai principii di corrispondenza citati, due altri vennero aggiunti dal CLIFFORD nelle nota *On some extensions of the fundamental proposition in M. Chasles Theory of characteristics;*[19] essi possono enunciarsi nei seguenti termini:

1. Nello spazio si abbia un sistema di ∞^{3n-1} gruppi composti ciascuno di n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$, aventi fra loro una relazione tale che presi ad arbitrio $n-1$ di essi $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$ il rimanente sia costretto a stare su una superficie d'ordine n_i. Vi è allora una superficie d'ordine $\sum_i n_i$ luogo dei punti in ognuno dei quali coincidono gli n punti di un gruppo del sistema.

2. Nello spazio si abbia un sistema di ∞^{3n-2} gruppi composti ciascuno di n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ aventi fra loro una relazione tale che: *a*) presi ad arbitrio $n-1$ di essi $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$ l' i^{mo} sia costretto a giacere su una curva d'ordine n_i, e *β*) presi invece ad arbitrio $n-2$ di essi $P_1, \ldots, P_{h-1}, P_{h+1}, \ldots, P_{k-1}, P_{k+1}, \ldots, P_n$, su ogni retta dello spazio siano $n_{h,k}$ $(= n_{k,h})$ coppie di punti P_h, P_k. Vi è allora una

curva d'ordine $\sum_i n_i + \sum_{h,k} n_{h,k}$ luogo dei punti in ognuno dei quali coincidono gli n punti di un gruppo del sistema.

Nello scritto di ZEUTHEN citato a p. 72 il teorema di RIEMANN sulla coservazione del genere ricevette una notevole estensione; la formola che la esprime fu dimostrata di nuovo da W. WEISS.[20]

Fra i principii di corrispondenza porremo anche il teorema di HALPHEN sul numero delle rette comuni a due congruenze[21] il cui uso è continuo in ogni ramo della Geometria dello spazio. Citeremo le applicazioni che HALPHEN ne fece alla determinazione delle normali comuni a curve e superficie[22] e al numero degli angoli retti, dei triedri trirettangoli e dei tetraedri soddisfacenti certe condizioni[23] e quelle che furon fatte dallo STURM.[24]

Inoltre, alle applicazioni già indicate dei principii di corrispondenza uniamo tutte quelle fatte da ZEUTHEN nella memoria *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche ou d'une surface développable*,[25] e l'altra fatta dal PIERI alla ricerca del numero delle normali doppie di una curva gobba algebrica[26] o di una superficie algebrica.[27] Infine fra le applicazioni del principio di corrispondenza per forme di specie superiore, la recente dimostrazione che il PIERI diede del teorema che indica l'ordine dello intersezione di due varietà contenute in uno spazio lineare qualunque.[28]

[VIII.] Oltre a quelle citate a p. 79, tratta questioni di Geometria numerativa di spazii a più dimensioni la memoria di SCHUBERT: *Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension*.[29]

[1] LORIA, *Notizie storiche sulla Geometria numerativa*. Biblioth. Mathem. 1888, 39—48, 67—80.

[2] S. ROBERTS, *Note on normals and the surfaces of centres of an algebraical surface*. Proceedings of the London mathem. soc. **4**, 1873, 302—307.

[3] VOSS, *Zur Untersuchung der Fläche der Centra*. Mathem. Ann. **16**, 1880, 560—570. — *Ueber die projective Centralfläche einer algebraischen Fläche n. Ordnung*. Abhandlungen der k. bayer. Akademie d. Wiss. (Mathem. Cl.) **16**: 2, 1887.

[4] S. ROBERTS, *On parallel surfaces*. Proc. of the London mathem. soc. **4**, 1873, 218—235. — *On the parallel surfaces of developpables and curves of double curvature*. Ib. **5**, 1874, 90—94.

[5] Mathem. Ann. **14**, 1878, 206—211.

[6] GUNDELFINGER, *Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Bischoff über die Tangenten algebraischer Curven im 56. Bande d. J.* Journal für Mathematik, **73**, 1871, 171—174.

[7] Rendiconti della R. Accademia di Napoli **14**, 1875.

[8] Philosophical Transactions of the Royal Society of London **159**, 1869, 289—308.

[9] Ib. **162**, 1872, 259—282.

[10] Comptes rendus etc. **79**, 1874, 24—28, 105—106.

[11] Proc. of the London mathem. soc. **5**, 1874, 70—74.

[12] Quarterly journal of mathematics **4**, 1876, 227—255.

[13] Philosophical Transactions **164**, 1874, 705—717 oppure *Mathematical Papers by* W. K. CLIFFORD (London 1882), 287—304.

[14] HALPHEN, *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré.* Bulletin de la société mathématique de France **4**, 1876, 59—85.

[15] HALPHEN, *Sur les correspondances entre les points de deux courbes.* Ib. **5**, 1877, 7—18.

[16] Giornale di matematiche **9**, 1871, 188—192.

[17] Zeitschrift für Mathematik und Physik **15**, 1870, 126—129.

[18] Rendiconti della R. accademia dei Lincei 3_4:1, 1887, 118—124.

[19] Mathematics from the Educational Times' **5**, 49—50 oppure *Mathematical Papers by* W. K. CLIFFORD, 415—418.

[20] *Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts.* Mathem. Ann. **29**, 1887, 382—385.

[21] Comptes rendus etc. **68**, 1869, 141—145.

[22] HALPHEN, *Théorèmes sur les normales communes à des surfaces et à des courbes.* L'Institut (Première Section) **38**, 1870, 254.

[23] HALPHEN, *Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites.* Bull. de la soc. mathématique de France **1**, 1875, 253—256.

[redacted]

24 STURM, *Das Problem der räumlichen Projectivität.* Mathem. Ann. **6**, 1873, 512—550.

25 Annali di matematica **3_2**, 1869—70, 174—217.

26 PIERI, *Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica.* Rendiconti della R. accademia dei Lincei **2_4**:1, 1886, 327—329. — Per il caso di una curva razionale questa ricerca era già stata fatta da EM. WEYR (*Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve.* Journal für Mathem. **74**, 1872, 279—281).

27 PIERI, *Sulle normali doppie di una superficie algebrica.* Rend. d. R. Acc. d. Lincei, **2_4**: 2, 1886, 40—42.

28 PIERI, *Sopra un teorema di Geometria ad n dimensioni.* Giornale di matematiche **26**, 1888, 251—254.

29 Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg N° **6**, März 1886, 134—155.

Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159...

Par G. Eneström à Stockholm.

Plusieurs auteurs[1] indiquent que le symbole π a été employé pour la première fois en 1748 dans l'*Introductio in analysin infinitorum* (T. I, p. 93) d'Euler. Cette indication n'est pas parfaitement exacte, car dans une lettre adressée à Euler par Chr. Goldbach le 24 décembre 1742,[2] celui-ci se sert de la lettre π en ajoutant qu'elle »gewöhnlichermaassen für die peripheriam circuli cujus diameter = 1 genommen wird.» Euler avait employé π déjà dans le mémoire *Variæ observationes circa series infinitas* (imprimé en 1744 dans les Commentarii academiæ Petropolitanæ tome IX, lequel tome se rapporte à l'année 1737), p. 165: »posito π pro peripheria circuli cujus diameter est 1.» Mais il convient de faire remarquer que, vers ce temps, l'usage de la lettre π n'était point généralement adopté, car à la page 21 du mémoire: *Inquisitio in summam* etc. (Comment. acad. Petrop. tome X, 1738; imprimé en 1747), Nic. Bernoulli emploie la lettre p, lettre qui avait été proposée par Euler lui-même à la page 129 du mémoire *De summis serierum reciprocarum* (Ibid. tome VII, 1734—1735; imprimé en 1740). D'autre part, Jean Bernoulli, désigna ordinairement[3] le nombre 3,14159... par c, et ce n'est qu'après la publication de l'*introductio in analysin infinitorum* que π a déplacé les autres symboles.

[1] Voir p. ex. Lieblein, *Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis; 2e Aufl. herausg. von* Laska (Prag 1889) p. 88. — Ball, *A short account of the history of mathematics* (Cambridge 1888) p. 367.

[2] Voir Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle publiée par Fuss (St. Pétersbourg 1843), tome I, p. 177.

[3] Voir p. ex. Joh. Bernoulli, *Opera* (Lausannæ 1742), t. IV, p. 21. — Eneström, *Trois lettres inédites de Jean I Bernoulli à Léonard Euler* (Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, 1880) p. 19.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. Künssberg. Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Teil. Programm der k. bayer. Realschule zu Dinkelsbühl. 1888. 8°, 59 p. + 1 pl.

Diese grössere Erstlingsarbeit eines jüngeren Mathematikers darf als ein erfreulicher Beitrag zur Klärung unseres Wissens über einen hervorragenden und doch noch viel zu wenig gewürdigten Denker des Altertums bezeichnet werden. Der Verf. hat sehr umfassende Untersuchungen über Eudoxos angestellt, bietet uns aber hier, mit Rücksicht auf das Ausmass des ihm zur Verfügung gestellten Raumes, nur einen Teil seiner Ergebnisse dar, und zwar werden, wie die Titelworte weiter aussagen, die folgenden Gegenstände behandelt: »Lebensbeschreibung des Eudoxos, Überblick über seine astronomische Lehre und geometrische Betrachtung der Hippopede.» Herr Künssberg hat die vorhandene Litteratur, soweit wir urteilen können, vollständig ausgenützt, ja es ist ihm gelungen, auch ältere und für selten gehaltene Schriften für seinen Zweck zu verwerten, so z. B. eine Helmstädter Dissertation von J. A. Schmidt, die so gut wie ganz verschollen war und sich trotzdem als eine ganz brauchbare Quelle herausstellte.

Der biographische Abschnitt stellt sich insbesondere die Aufgabe, die drei unter dem Namen Eudoxos bekannt gewordenen griechischen Gelehrten und die denselben beigelegten wissenschaftlichen Leistungen gehörig auseinanderzuhalten; zumal die geographischen Errungenschaften der Kyzikeners sind durch Gaffarel näher bestimmt worden. Allerdings war auch unser Eudoxos als geographischer Schriftsteller — durch seinen γῆς περίοδος — nicht ohne Verdienst, doch lag seine Bedeutung wesentlich in den astronomischen und geometrischen Arbeiten, von denen wir freilich viel zu wenig wissen. In Bezug auf mathematische Erdkunde stand Eudoxos, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, mindestens auf der Höhe seiner Zeit; er war mit der sphaerischen Gestalt der Erde und mit deren Zoneneinteilung genau bekannt und wusste, wie der Verf. darthut, auch mit dem Horizont als einem der merkwürdigen Kreise der Himmelskugel gut Bescheid. Weiterhin werden die Bestrebungen des Eudoxos betreffs der Verfertigung von Sonnenuhren der Betrachtung unterstellt; daran schliest sich ungezwungen eine Erörterung der Jahreseinteilung und der sogenannten Oktaëteris,

deren Wesen zuerst von BOECKH richtig aufgefasst worden is[t]. Wichtiger jedoch ist das eudoxische Weltsystem, welches se[it] IDELER zu den manigfaltigsten Rekonstruktionsversuchen herausgefordert hat und dem Verf. zufolge zuerst in dem Buche περὶ τῶν ταχυτήτων auseinandergesetzt worden sein dürfte. Der Verf. schliesst sich in der Hauptsache an SCHIAPARELLI und PAUL TANNERY an, entwickelt aber, als der erste, die Haupteigenschaften der als ἵππου πέδη bekannten sphaerischen Schleifenlinie auf analytisch-geometrischem Wege, was ja freilich nicht gerade unsere geschichtliche Einsicht vermehrt aber gewiss einen bequemeren Einblick in die Natur dieser interessanten Raumkurve ermöglicht, als es für die Mehrzahl der Leser bei SCHIAPARELLI's — an sich natürlich eleganterer — Synthese der Fall sein wird. Dass diese Linie sich auch als LISSAJOUS-Kurve auffassen lässt, scheint früher noch nicht bemerkt worden zu sein; der Verf. gebraucht übrigens selbst nicht diese nach unserem Ermessen treffendste Bezeichnung. Die mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung durchgeführte Diskussion der Projektionsgleichungen der Hippopede beweist, dass letztere auch an und für sich ein ganz dankbares geometrisches Objekt repraesentiert. Bemerkt sei auch noch, dass Herr KÜNSSBERG ein Modell zur Versinnlichung der mehrfachen sphaerischen Bewegungen erdacht und abgebildet hat, welche in dem ersten der uns bekannten auf exakter Grundlage ruhenden Planetensysteme jedem Wandelsterne zugeschrieben waren; der Berichterstatter hat diese Vorrichtung selbst gesehen und sich von der Zweckmässigkeit derselben überzeugt.

München. S. GÜNTHER.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1888: 4.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Roma. 4°.
20 (1887): 12. — [Analyse du tome **20** (1887):] Fiziko-matem. naouki **4**, 1888, 243—249.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
33 (1888): 6. **34** (1889): 1.

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. London, Macmillan 1888.
8°, XXIII + 464 p.

Bobynin, V., De l'étude sur l'Histoire des mathématiques en Russie.
Biblioth. Mathem. 1888, 103—110.

°Catalogue of the Porsmouth collection of books and papers written to or belonging to Sir Isaac Newton. Cambridge 1888. 8°.

Favaro, A., Serie quarta di scampoli Galileiani.
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e Memorie **5**, 1889. 30 p.

Govi, G., Della invenzione del micrometro per gli strumenti astronomici.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 607—622.

°**Huygens, Chr.**, Oeuvres complètes publiées par la société Hollandaise des Sciences. Tome I. Correspondance 1638—1656. Haag, Nijhoff 1888.
4°, XIV + 621 p. — [15 fr.] — [Analyse:] Deutsche Litteraturz. **9**, 1888, 1228—1229. (E. Gerland.)

°**Loria, G.**, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins deutsche übertragen von *F. Schütte*. Mit einem Vorworte von *R. Sturm*. Leipzig, Teubner 1888.
8°, V + 132 p. — [3 M.]

°**Manitius, K.**, Des Hypsikles Schrift Anaphorikos, nach Überlieferung und Inhalt kritisch behandelt. Osterprogramm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden. Dresden 1888.
4°, 21 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 188—189. (Cantor.)

°**Nagel**, Gerbert und die Rechenkunst des 10. Jahrhunderts. Wien 1888.
8°, 65 p. + 2 pl. — [2 M.]

Narducci, H., Sur l'optique de Claude Ptolémée.
Biblioth. Mathem. 1888, 97—102.

Riccardi, P., Saggio di bibliografia Euclidea. Terza parte.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie **9**$_4$, 1888, 319—343. — [Analyse:] *Bologna*, Accad. d. sc. dell' Istituto, Rendiconto 1888. 2 p.

Steinschneider, M., Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf. **2**.
Biblioth. Mathem. 1888, 111—117.

Question 23 [on the use of *e*].
Biblioth. Mathem. 1888, 120. (W. W. Beman.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von M. HENOCH und E. LAMPE. Band 18 (1886). Berlin, Reimer 1888.

8°. — Les pages 1—34 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1886.

FAVARO, A., Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna. Estratto dagli Atti e Memorie della r. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna. 6_8. Bologna 1888. 8°.

Biblioth. Mathem. 1888, 118. (G. ENESTRÖM.)

HULTSCH, F., Scholien zur Sphaerik des Theodosios. (Abhandl. der philol. Classe der Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. **10.**) Leipzig 1887. 4°.

Biblioth. Mathem. 1888, 118—119. (G. ENESTRÖM.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1887. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist, Abth. 224—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 222—223. **4**, 1889; Hist. Abth. 39—40. — Biblioth. Mathem. 1888, 119—120. — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20** (1887), 1888, 623—666. — Fiziko-matem. naouki **4**, 1888, 250—256.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

24. M. EG. HANEGRAEFF a publié chez Bachelier en 1856 une *Méthode générale d'intégration;* il annonce dans l'»Avertissement» un »ouvrage sur la philosophie des mathématiques» dans lequel il exposera les principes de sa méthode. Cet ouvrage a-t-il paru sous ce titre ou sous tout autre forme?

(Ch. Henry.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1889.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889. STOCKHOLM. Nº 2.

NEUE FOLGE. 3. — NOUVELLE SÉRIE. 3.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts.

Von R. WOLF in Zürich.

I. Bislang wurden für den Namen des mit Recht als Mathematiker und Mechaniker hoch gefeierten JOOST BÜRGI (Lichtensteig im Toggenburg 1552 — Kassel 1632) nebeneinander die drei Schreibweisen BURGI, BÜRGI, BYRGI, benutzt. Für *Erstere* schien zu sprechen, dass sie auf einem unter BÜRGI's Augen angefertigten Portrait, ferner auf einem ihm 1602 ertheilten Kais. Privilegium erscheint, auch von BÜRGI's Schwager BENJAMIN BRAMER beständig gebraucht wurde, — für die *Zweite*, dass ein Zürcher-Zeitgenosse von BÜRGI, und ebenso sein Freund KEPLER in einer seiner deutschen Schriften dieselbe benutzte, — für die *Dritte*, dass Landgraf WILHELM sich derselben 1592 in einem deutschen Briefe an TYCHO BRAHE bediente, dass BÜRGI in lateinischen Briefen und Schriften immer als BYRGIUS bezeichnet wurde, ja er selbst (aber allerdings als Bestandtheil eines lateinischen Satzes) seinen Namen in dieser Weise auf einen noch vorhandenen Kaliberstab eingravirte. Es würden also alle drei Schreibweisen nahe gleiche Berechtigung besitzen, wenn nicht aus den St. Galler Archiven mit aller Bestimmtheit hervorgegangen wäre, dass sich die Glieder der Familie BÜRGI in Lichtensteig schon im 16. Jahrh. wie seither, nie anders als BÜRGI geschrieben haben. Es darf und muss also die Forderung gestellt werden, dass auch für den Mathematiker dieses

Namens ausschliesslich die Schreibweise Bürgi benutzt werde, und die beiden andern Schreibweisen aus Abschied und Tractanden fallen.

II. Über die Beziehungen des Vaters RUDOLF SNELLIUS (Oudewater 1546 — Leyden 1613) und des Sohnes WILLEBRORD SNELLIUS (Leyden 1580 — ebenda 1626) zu dem Hofe in Cassel wird in JUSTI's »*Hessischen Merkwürdigkeiten*» (B. III, 1802) erzählt: »Landgraf MORITZ liess den berühmten Lehrer der Mathematik zu Leyden WILLEBRORD SNELLIUS im Jahre 1600 an seinen Hof kommen, verehrte ihm sein Portrait nebst einer goldenen Kette, und liess ihn mit vier Pferden nach Frankfurt zurückbringen.» Nach kritischer Untersuchung dieser Erzählung, mit Benutzung einer Schrift [1] des Professor VAN GEER über SNELLIUS und eines in den Kassler-Archiven noch vorhandenen Briefs (vom 1. Sept. 1618) des WILLEBRORD SNELLIUS an Landgraf MORITZ, habe ich gefunden, dass JUSTI's Erzählung als authentisch betrachtet werden darf sofern der Name *Willebrord* durch *Rudolf* ersetzt wird. [2]

[1] VAN GEER, *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius*. Arch. néerland. d. sc. exactes **18**, 1884, 453—468.

[2] Die Belegstellen finden sich in meinen Astronomischen Mittheilungen n° 72 (1888), p. 42—55, wo auch p. 38—42 über die Rechtschreibung des Namens von JOOST BÜRGI gehandelt ist.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

1. Zur Zahlentheorie.

Zu dem sogenannten »Buch der Schöpfung» (*Sefer Iezira*), das die Buchstaben und Zahlen als Elemente der Schöpfung behandelt und jedenfalls älter als das IX. Jahrhundert ist, wurde im X. Jahrhundert ein arabischer Commentar verfasst, über dessen Autor, ohne Zweifel in Kairuan (Afrika), die Gelehrten sich nicht einigen konnten. Wir kennen nämlich diesen Commentar nicht aus dem Original, sondern aus verschiedenen hebräischen Übersetzungen und Umarbeitungen, welche verschiedene Namen darbieten. Das hebräische Manuscript in München, n° 92, nennt als Verfasser JACOB BEN NISSIM, eine auch sonst bekannte Persönlichkeit.[1] In diesem ms. fand ich (fol. 108ᵇ) ein Zahlendreieck, welches ich wiedergebe, indem ich für die hebräischen Buchstaben (als Zahlzeichen) unsere Ziffern setze, mit der, vielleicht überflüssigen Bemerkung, dass die beiden Ziffern nicht Einheiten und Zehner vorstellen, da das Hebräische für letztere besondere Buchstaben hat:

19	29	39	49	59	69	79	89
	18	28	38	48	58	68	78
		17	27	37	47	57	67
			16	26	36	46	56
				15	25	35	45
					14	24	34
						13	23
							12

Der Verfasser begleitet diese Figur mit folgenden Worten: »Betrachte mit dem Auge deines Herzens (Verstandes), o Leser meines Buches! wie aus dieser angemessenen und wunderbaren Anordnung dir hervorgeht die Form der zwei conformen (? hebr. *Makbilot*) rechtwinkligen Dreiecke, welche Vierecke sind [bilden?], denn das Dreieck ist der Anfang der Figuren [hebr. *Dimjonot*, auch Vorstellungen, Bilder] in der Natur; daher beginnt das

Buch EUKLIDES, des Philosophen, mit der Figur (hebr. *Dimjon*) des Dreiecks etc.» Ich weiss nicht, welcher Quelle diese arithmetisch-geometrische Figur geflossen ist, welche der Verfasser nicht als eine originelle bezeichnet. Er ist jedenfalls einer der ersten jüdischen Autoren, welche EUKLID ausdrücklich nennen, wenn auch nicht der erste, der die Elemente kannte; da die ihm vorangehenden jüdischen Astronomen und Astrologen unter den Arabern ohne Zweifel, nach dem damaligen Studiengang ihre mathematischen Studien mit EUKLID begannen. Ich werde die Belehrung von Sachkennern mit Dank verwerthen.

2. Euklid hebräisch.

Das nachfolgende Buch, welches die K. Bibliothek in Berlin im vorigen Jahre erworben hat, dürfte in keiner Bibliographie erwähnt sein; den etwaigen wissenschaftlichen Werth kann ich nicht beurtheilen. Der *Titel* ist hebräisch und russisch, ich gebe von ersterem nur das Schlagwort mit hebräischen Lettern, das Übrige in kurzer deutscher Inhaltsangabe.

ספר אוקלידוס (Buch des EUKLIDUS [!]) Theil (Buch) XI. und XII. mit Zusätzen der Weisen (Gelehrten), die nach ihm kamen, übersetzt [aus welcher Sprache?] von NACHMAN ZEBI BEN JESAIA aus Dubno; mit kurzen Noten des Übersetzers. Szytomir in der Druckerei des Isak Moses Bakst 635 (1875); 8°, 4 Blätter und. 100 Seiten, nebst einer grossen Figurentafel.

3. Baculus Jacobi.

Die Anfrage **19** in der Bibliotheca Mathematica 1888 S. 32 hätte ich sofort mit einer Negation beantworten können, dass nämlich kein jüdischer Astronom, namens Jakob, als Erfinder eines *Baculus* bekannt sei; allein die dort citirten Schriften von GÜNTHER und WEISSENBORN waren mir nicht zugänglich bis ganz kürzlich, und ich wollte zunächst aus ihnen Näheres über den *Baculus* erfahren. Nachdem dies geschehen, glaube ich eine plausible Erklärung der Bezeichnung vorschlagen zu dürfen, um das Urtheil der Gelehrten hervorzurufen.

Nach dem, was GÜNTHER [2] und WEISSENBORN [3] über den *Baculus* berichten, war der eigentliche Stab mit Einschnitten versehen; er glich also den Stäben, welche der Erzvater Jacob den brünstigen Thieren vorsetzte, um gesprenkelte Junge zu bewirken (Genesis, cap. 30). Eine solche Beziehung zur Bibel lag dem Mittelalter näher als uns; so zum Beispiel ist der Beiname »*Bezeleel*», welchen man dem Baumeister EINHARD

gab, zur Zeit Karl's des Grossen (der selber als König David figurirte), [4] kein anderer, als der des alten Baukünstlers BEZALEL (Exod. cap. 31, und 35). Letzterer ist auch höchst wahrscheinlich in einem vielverbreiteten Schriftchen über Edelsteine — als *veterum Judaeorum physiologorum de lapidibus sententiae* in III. Bande von J. B. PITRA's *Spicilegium* (Paris 1855) abgedruckt — zu *Cethel* geworden; letzterer Name ist in den Manuscripten bis zur Unkenntlichkeit [5] entstellt. — So lange keine bessere Erklärung des Namens *Baculus Jacobi* gegeben wird, ist die obige wenigstens nicht als zu fern liegende abzuweisen. *

Gelegentlich sei ein anderer von dem Astronomen LEVI BEN GERSON (gestorben 1344) erfundener »*Baculus*» erwähnt, welchem der Erfinder einige (gedruckte) Distichen widmete. [6] Die mathematischen Schriften dieses bedeutenden Denkers harren noch der Würdigung.

4. Johannes de Ligneriis.

In GÜNTHER's *Geschichte des mathematischen Unterrichts im Deutschen Mittelalter* (S. 170) wird angegeben, dass nach meiner Ansicht JOHANN DE LIVERIIS viel früher gelebt habe als JO. DE LIGNERIIS. Ich möchte nicht, dass dieser Irrthum durch eine Autorität, wie die GÜNTHER's, Verbreitung finde. GÜNTHER citirt meine (auch besonders abgedruckte) Notiz im Bullettino di bibliogr. d. sc. matem. **11**, 1878, 345 f., die schon in der Überschrift de Liveriis neben Lineriis setzt, um die Identität anzudeuten. Ich beginne dort mit der Bemerkung, dass *n* und *v* in Manuscripten nicht zu unterscheiden seien. Nachträge zu jener Notiz gab ich in der *Notice sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon* (Bullettino di bibliogr. d.

* Nachträglich erlaube ich mir zu bemerken, dass ich die oben von Herrn STEINSCHNEIDER vorgeschlagene Erklärung des Namens *Baculus Jacobi* auch in JACOBI BARTSCHII *Planisphaerium stellatum seu vice-globus coelestis in plano delineatus* (Norimbergæ 1662, 4°) gefunden habe, wo man S. 96 liest: »Tres stellæ in medio quasi Orione . . . referunt baltheum seu Cingulum . . . quod vulgo Baculus Jacobi, *der Jacobs-Stab,* dicitur, fortè à variegatis Patriarchæ virgis Gen. 30 v. 37. Unde et instrumentum geodæticum ita dictum videtur.» — Wahrscheinlich stammt diese Erklärung aus SCHICKARD's *Astroscopium* her, denn in der Auflage vom Jahre 1698: WILHELMI SCHICKARDI *Astroscopium nunc denuò in usum reipublicæ literariæ locupletius recusum. Accurante* WILHELMO SCHICKARDO *Juniore* (Stutgardiæ & Lipsiæ MDCXCIIX, 12°), S. 55—56, findet man den folgenden Passus: »*Der Jacobsstab,* cingulum Orionis, fortè à variegatis virgis Patriarchæ sic dictum, quas ipse miro astu sic decorticasse legitur, *Gen. 30 vers. 37.* Unde et Instrumentum quoddam Geometricum Baculus Jacobi denominatum esse videtur.» (G. E.)

sc. matem. 18, 1880 und Sonderabdruck); vgl. auch meine *Etudes sur Zarkali,* Sonderabdruck S. 37, 41, 43, 45, 84, 114, 133.

[1] Über die hier berührte literaturhistoriche Frage, welche auch die Geschichte der Mathematik im X. Jahrhundert berührt, handle ich ausführlich in § 227 meines Werkes über die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters, und da diese Partie bald zum Abdruck kommt, so möchte ich weitere Belehrung über den hier besprochenen Punkt dort benutzen können.

[2] GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter* (Monumenta Germaniae paedagogica Bd. III, Berlin 1887) S. 247.

[3] WEISSENBORN, *Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters* (Berlin 1888) S. 166.

[4] GÜNTHER, l. c. S. 24.

[5] S. meine *Hebräische Bibliographie* XVI (1876) S. 104, wonach der Artikel von DELISLE in *Notices et Extraits,* t. 32, p. 48 zu ergänzen und berichtigen ist.. S. auch V. ROSE, *Damigeron de lapidibus,* im Journal Hermes 9, 1872, 471; meine Notiz im Serapeum 1870, S. 207; I. BAECHTOLD, *Deutsche Handschriften aus dem British Museum* (Schaffhausen 1873), S. 165.

[6] Siehe meinen Artikel LEVI BEN GERSON, in der *Realencyklopaedie* von ERSCH und GRUBER, Zweite Abtheilung, Bd. 43, S. 299 (dieser Band wird bald erscheinen). Ich habe daselbst aus Rücksicht auf den Raum Einiges streichen müssen.

Di alcune opere di Prospettiva di autori Italiani ommesse nella »Histoire de la Perspective» di M. Poudra.

Per PIETRO RICCARDI in Modena.

Gli scritti concernenti la storia delle scienze pubblicati da taluni dei nostri buoni vicini d'oltralpe, somigliano troppo di sovente a certe carte disegnate dai Chinesi, nelle quali è rappresentato un gran continente che raffigura la China, e all'intorno alcuni isolotti che indicano le altre parti del mondo.

Il POUDRA [1] è certamente da noverarsi fra gli scrittori di storia delle scienze più accurati, e che meglio ancora ebbero conoscenza delle opere di Prospettiva pubblicate da matematici stranieri alla sua patria. Tuttavia il numero e la importanza degli scritti d'autori italiani concernenti la Prospettiva da lui ommessi, sono maggiori di quanto sarebbe stato desiderabile in un' opera, per molti titoli pregievolissima, del genere di quella da lui compilata.

Tralasciando di segnalare quelle che vennero già indicate in una estesa recensione della sua opera [2], e quelle pure che occupandosi principalmente di argomenti ottici, hanno solo qualche relazione con le teorie geometriche della Prospettiva, mi limito a notare le principali fra codeste ommissioni.

Il POUDRA, ed anche il CREMONA, fanno cenno delle poche nozioni di Prospettiva contenute nei libri della Pittura di LEON BATTISTA ALBERTI. Ma dimostrano ignorare che l'ALBERTI compose un trattato speciale di Prospettiva di ben maggiore importanza; quale per molto tempo inedito, venne pubblicato dal BONUCCI nel tomo V delle *Opere volgari* (Firenze 1843—1849) di quel valentissimo architetto.

Nella prima parte del suo libro di Prospettiva, intesa nel senso che anticamente veniva attribuito a questa parola, egli si occupa della visione diretta, e più estesamente nella seconda e nella terza parte, della riflessa e della rifratta.

Meritavano eziandio di essere ricordate le brevi nozioni intorno alle ombre ed alla Prospettiva contenute nel *Trattato dell' arte della pittura, scoltura ed architettura di* GIO. PAOLO LOMAZZO (Milano 1585).

LODOVICO CARDI CIGOLI da Firenze compose un tratt tello *di Prospettiva pratica* diviso in due libri, con le figure i tagliate sul rame da BASTIANO CARDI di lui fratello, sotto data del 1612. Il NEGRI (*Istoria degli scrittori Fiorentii* opina che codesto lavoro sia rimasto inedito, ma se esatta la citata indicazione che ne dà il MURHARD [3], parmi che e sendo le figure incise sul rame, abbiasi a ritenere presumibi che ancora il testo sia stato pubblicato con le stampe.

Il POUDRA ed il CREMONA non fanno cenno degli *Avve timenti e regole circa l'Architettura civile, Scultura, Pittura, Pr spettiva* ec. di PIETRO BARCA (Milano 1620), i quali comec elementari, sono citati dal COMOLLI e dal BRUNET; nè Trattato di Prospettiva che con lo strano titolo di *Occhio erra dalla ragione emendato* venne pubblicato in Venezia nella pri metà del secolo XVI, da FERDINANDO DI DIANO.

DI FERDINANDO BIBIENA GALLI (latinizzato non so co dal POUDRA col nome di »F. Gallus»), citano le *Direzi della prospettiva teorica,* ma non l'*Architettura civile prepar su la Geometria e ridotta alle Prospettive* (Parma 1711); de quale la terza parte contiene la *Prospettiva comune, orizzont e di sotto in sù.*

Pure prescindendo dalle meno complete nozioni di pr spettiva contenute nel classico scritto di MARTINO BASSI inton ai *Dispareri in materia d'Architettura e Perspettiva* (Brescia 157 e nei trattati di Architettura di GIOSEFFE ZANINI-VIOLA (Pado 1629), di GIOVANNI AMICO (Palermo 1750), di ANTON BERNARI VITTONE (Lugano 1760), di GUARINO GUARINI (Torino 1737) non si doveva ommettere un qualche cenno di quanto trova concernente la Prospettiva nelle *Ricreazioni matematiche* di MAR BETTINI (Bononiæ 1660), e delle tavole di prospettiva pubblica da GIUSEPPE BIBIENA (Augustæ 1740), e da GIO. LODOVI QUADRI (Bologna 1744).

Nè voglionsi dimenticate fra le memorie e gli scritti sp ciali attinenti alla Prospettiva, la soluzione del problema pubb cata da CAMILLO RAVERTA (Mediolani 1602); i problemi teoremi esposti da BIAGIO SPUCCES (Panormi 1701), i proble in acconcio alle regole del BAROZZI risoluti da AGOSTINO AIDC (Palermo 1706); e le annotazioni di JACOPO STELLINI ai pr cipii di prospettiva lineare di BROOK TAYLOR (Padova 1780 1784).

Fra le meno antiche monografie sulla Prospettiva ricor le memorie del ROSSI MELOCCHI (Firenze 1805), del MAGISTR (Bononiæ 1816) e del BORDONI (Pavia 1815) sulla determi

zione geometrica delle ombre, dimenticate dal POUDRA e dal CREMONA.

Ben più grave ommissione è il non avere dato ragguaglio del classico trattato delle projezioni grafiche di GIUSEPPE TRAMONTINI (Modena 1811). La seconda parte di questa opera, che ottenne già il favorevole giudizio degli scienziati [5], è dedicata alla Prospettiva; ed in otto capitoli nei quali è scompartita si occupa della Prospettiva in generale, della Prospettiva parallela e della concorrente, dei principali problemi che la concernono, della collocazione del punto di vista; delle ombre, delle penombre e della gradazione dei colori: ed è meritamente riputato il più completo trattato fino allora conosciuto intorno a questo ramo delle matematiche pure ed applicate.

Nè occupandosi della storia della Prospettiva, potevasi dal POUDRA ommettere di segnalare gli eruditi *Commentarj sopra la storia e le teorie dell'ottica* del dotto fisico GIAMBATTISTA VENTURI (Bologna 1814), cui oltre le interessanti notizie storiche concernenti la Prospettiva, devesi l'avere rinvenuta la versione dall' Arabo in Latino eseguita nel secolo XII da EUGENIO Ammiraglio Siciliano, della Ottica di TOLOMEO, che ritenevasi smarrita o perduta, ed ora pubblicata dal GOVI (Torino 1885).

Anche prescindendo dalle più elementari nozioni di Prospettiva pubblicate dall' ASTOLFI (Milano 1825) e dal FEA (Torino 1862), i meno antichi trattati di applicazioni della Geometria descrittiva del TABACCHI (Padova 1844), del SERENI (Roma 1836 e 1843), e di *Elementi di Prospettiva lineare* dell' architetto PIETRO LANCIANI (Roma 1849) non sono, come meritavano, ricordati nè dal POUDRA, nè dal CREMONA.

Il SERENI nelle prime due parti in cui è diviso il suo trattato delle *Applicazioni di Geometria descrittiva*, con quella chiarezza e corretta forma didattica che gli è propria, si occupa della Prospettiva e della Sciografia; e ne correda le teorie con parecchie note scientifiche originali ed interessantissime.

Di minore importanza scientifica, ma di molta utilità pratica nelle applicazioni della Prospettiva all' Architettura, sono gli *Elementi di Prospettiva lineare* del LANCIANI; ed oserei affermare che essi potrebbero anche oggigiorno servire di guida ai giovani artisti che si applicano allo studio dell' Architettura.

Nel segnalare queste non poche nè lievi ommissioni, fu mio intendimento di fornire a chi volesse applicarsi a rifondere con maggione esattezza e con criteri più sintetici di quelli seguiti dal POUDRA, la storia della Prospettiva, una meno incompleta collezione dei titoli costituenti il contributo che agli

avanzamenti di questa scienza ha dato la mia patria. Anche perchè nel dare ragguaglio delle pubblicazioni straniere non si manifesti vieppiù grave la sconvenienza di non conoscere le nostrali. [6]

[1] POUDRA, *Histoire de la Perspective ancienne et moderne* (Paris, Corréard, 1864).

[2] CREMONA, *Sulla storia della prospettiva antica e moderna* (Art. inserito nel periodico: La Rivista italiana, an. 1865, n^i 237—238).

[3] MURHARD, *Bibliotheca mathematica*, t. V (Leipzig 1805), p. 206.

[4] Il GUARINI si può riguardare forse come il primo che siasi occupato di geometria descrittiva. Veggasi il cenno che del suo *Euclides adauctus* (Taurini 1671) dà lo CHASLES, *Aperçu historique*, p. 345.

[5] Questa classica opera venne premiata dal Ministero della Guerra del primo Regno d'Italia. V. BERNARDI, *Elogio del Prof^re. Giuseppe Tramontini* (Modena 1856, 4°).

[6] Seguirà in uno dei prossimi fascicoli un completo Elenco delle opere a stampa di autori Italiani intorno alla Prospettiva, fino ad oggi pubblicate.

Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne.

Par S. Dickstein à Varsovie.

En parlant de l'étude sur l'histoire des mathématiques en Pologne il faut distinguer entre l'étude sur l'histoire de ces sciences dans le pays même et celle du progrès général des mathématiques.

La première catégorie des études ayant une relation d'une part avec l'histoire de la littérature et d'autre avec celle de l'instruction publique, a attiré depuis longtemps l'attention des savants. Mais c'étaient d'abord les bibliographes et les historiens de la littérature qui nous ont donné des titres ou des descriptions d'anciens livres ou manuscrits mathématiques et des notices historiques sur leurs auteurs. J. Soltykowicz, auteur d'un ouvrage important sur l'état de l'université de Cracovie (1810), a poussé les savants vers ces recherches. N'étant pas mathématicien de profession, il nous a donné néanmoins plusieurs détails fort intéressants sur les anciens mathématiciens polonais et leurs écrits. Après Soltykowicz ce sont l'histoire de la littérature polonaise de Bentkowski (1814), et de Wiszniewski (1840—1857) qui contiennent beaucoup de données importantes sur le progrès des mathématiques en Pologne.

De grands services à l'étude sur l'histoire des sciences mathématiques en Pologne a rendu Zebrawski (1800—1887) qui pendant toute sa vie rassemblait les matériaux pour un ouvrage historique. Le fruit de ses travaux est une bibliographie presque complète de la littérature mathématique polonaise depuis le 13:e siècle jusqu'à 1830. On peut dire que Zebrawski a donné par sa bibliographie une base solide pour les futures recherches historico-mathématiques. Après lui M. Franke, professeur à Lwów (Léopol), a publié des recherches originales et fondées sur les sources manuscrites, nommément une monographie sur le mathématicien Gloskowski et l'autre sur Brozek (Broscius 1585—1652), dont la dernière a complétement résolu toutes les questions concernant l'éminent professeur du 17:e siècle.

De nos jours, il y a quelques auteurs qui publient des travaux relatifs à l'histoire des mathématiques en Pologne, et on peut espérer que cette science, une fois entrée dans la voie

des recherches d'un caractère scientifique, continuera de se développer.

Quant à l'histoire des mathématiques en général, on s'intéressa chez nous à des connaissances relatives à cet objet. Les mathématiques étaient en haut respect dans notre pays. Dans les programmes des écoles de la commission de l'éducation nationale créée en 1773, les mathématiques étaient la base de toute l'instruction. Plus tard, la réorganisation de l'universté de Wilno (en 1803), la fondation du lycée de Krzemieniec (en 1805), de l'université de Varsovie (en 1818) — malheureusement les trois dernières institutions n'étaient pas d'une longue durée — a contribué à entretenir et à répandre dans notre patrie le goût de connaissances mathématiques et de leur histoire. L'Algèbre de L'Huillier (1782), qui (en traduction polonaise de Gawronski) était un livre d'enseignement dans nos écoles secondaires, contient une bonne esquisse sur l'histoire des mathématiques. Dans les programmes des écoles au commencement du siècle courant, on rencontre déjà plusieurs monographies traitant l'histoire de diverses branches des mathématiques. C'est Montucla, Kästner, Bossut qui ont été les guides des auteurs de ces monographies historiques. Nous avions aussi des travaux d'une plus grande valeur scientifique, ce sont les écrits de Sniadecki (1756—1830) et de Hoene Wronski (1778—1853). Le dernier ne negligeant pas dans ses nombreux écrits français l'histoire des sujets traités, éclaircissait leur rapport avec l'ensemble des recherches passées et contemporaines. Il préparait aussi un «cours philosophique» sur l'histoire des mathématiques, qui, malheureusement, ne fut pas publié.

Dans nos conditions peu favorables pour l'avancement des sciences, tous ces travaux dont je viens de parler n'ont pas exercé une grande influence sur le progrès de recherches originales, mais elles ont soutenu l'intérêt pour l'histoire des sciences chez nous; en effet on étudie la littérature étrangère sur l'histoire des mathématiques, on fait précéder les ouvrages et les monographies par des introductions historiques, en un mot on prépare le terrain pour les futurs travailleurs qui, on peut l'espérer, seront plus heureux que nous.

Dans la liste suivante, j'ai donné une bibliographie historico-mathématique polonaise en ordre chronologique; j'en ai exclu les travaux sur l'histoire de l'astronomie, qui sont assez nombreux mais qui n'entrent pas dans les limites de cette note, dans laquelle j'ai traité seulement l'histoire des mathématiques pures. J'ai cité les monographies historiques, les livres et les articles

ù l'on trouve des notices historiques sur les mathématiques, t les biographies des savants.

1781.

niadecki, J., O nauk matematycznych poczatku, znaczeniu i wplywie na oswiecenie. Kraków 1781.

8°, 11 p. — Sur les origines, la signification et l'influence des sciences mathématiques.

1782.

L'Huillier, Krótki zbiór historyi matematycznej.

Esquisse de l'histoire des mathématiques. — Insérée dans l'*Algèbre* de L'HUILLIER traduite en polonais par GAWRONSKI (Warszawa 1782); les 15 pages de l'introduction.

1810.

Soltykowicz [Notices historiques sur BRUDZEWSKI, GRZEPSKI, BROSCIUS et sur plusieurs autres mathématiciens polonais.]

Insérées dans l'ouvrage *O stanie akademii Krakowskiej* de cet auteur (Krakow 1810), p. 237—269, 285—295, 439—482.

1811.

Hoëné Wronski, Introduction à la philosophie des mathématiques et technie de l'algorithmie. Paris 1811.

4°, 269 p. — L'auteur expose (pag. 217—221) ses observations critiques et historiques relatives à l'interprétation du mot *porisme*.

1813.

Poulin, P. [Notices historiques sur le développement de la théorie des sections coniques.]

Insérées dans la *Teorya przecicc ostrokregowych* de cet auteur (Warszawa 1813), p. 10—21.

1814.

Bentkowski, F. [Notices sur la littérature polonaise des sciences mathematiques.]

Insérées dans la *Historya literatury polskiej* de cet auteur (Warszawa i Wilno 1814) tome II, p. 295—366.

Hoëné Wronski, Philosophie de l'infini. Paris 1814.

4°, 208 p. — Contient plusieurs notices historiques et critiques sur les méthodes infinitésimales et sur l'origine du calcul différentiel.

1815.

Sniadecki, J., O Józefie Ludwiku de Lagrange. Wilno 1815.

Dziennik Wilenski 2, 479—500, 641—669. — Contient une analyse des travaux de LAGRANGE et des remarques historiques sur le développement des mathématiques.

Hoëné Wronski, Philosophie de la technie algorithmique. I, II. Paris 1815—1817.
4°. XII + 186 + XIX + 645 p. — Contient plusieurs notices historiques importantes sur le développement de la théorie des séries et des fractions continues.

1817.

Sniadecki, J. [Notices historiques sur le calcul des probabilités.] Dans le mémoire *O rachunku losów* de cet auteur lu pendant la séance littéraire de l'université de Wilno et imprimé dans les oeuvres de Sniadecki (Warszawa 1837). tome 4. p. 206—225.

Twardowski, Recenzya Trygonometryi kulistéj Jana Sniadeckiego. Pamiętnik Warszawski 1817. 477—501. — Analyse de la trigonométrie sphérique de J. Sniadecki; contient une histoire de la trigonométrie.

Bentkowski, O zyciu i zaslugach Jana Joachima Liveta. Rocznik Towarzystwa Przyjaciół nauk (Warszawa) 10. 1817, 150—164 Sur la vie et les travaux scientifiques de J. Livet.

1818.

Leski, J., Rys zycia Michala Hube. Rocznik Towarzystwa Przyjaciół nauk 12. 1818. 72—84. — Sur la vie de Michel Hube 1737—1807).

Sapalski. F. [Notices historiques sur la géométrie descriptive.] Insérées dans le mémoire *Rozprawa o teoryi sterotomii* de cet auteur (Warszawa 1818). p. 13—32.

Sniadecki, J., O rozumowaniu rachunkowem. Wilno 1818. Dziennik Wilenski p. 348—365. — Sur le raisonnement analytique.

1819.

Wolicki, O wzroscie arytmetyki i geometryi w rozmaitych krajach i wiekach. Warszawa 1819.
4°. 21 p. — Sur le développement de l'arithmétique et de la géométrie dans les divers pays et siècles.

1820.

Nahajewicz, K., Krótki rys historyi matematyki do konca XVIgo wieku. Lublin 1820.
4°. 28 p. — Apercu de l'histoire des mathématiques jusqu'à la fin du XVIe siècle.

Skolimowski, R., O wplywie, który nauki matematyczne w miare swych postepów w doskonalosci mialy i maja na oswiate. Warszawa 1820.
4°. 27 p. — De l'influence des sciences mathématiques sur la culture.

1821.

Hoene-Wronski, Introduction to a course of mathematics. London 1821.
4°. 40 p. — Traduit en polonais en 1880.

1822.

Krzyzanowski, A. [Notices historiques sur la géométrie analytique.]
Insérées dans la *Geometrya analityczna* de cet auteur (Warszawa 1822), p. I—VIII.

Krzyzanowski, A., O zyciu uczonem Stanislawa Solskiego. Warszawa 1822.
4°, 50 p. — Sur la vie et les oeuvres de STANISLAS SOLSKI (mathématicien polonais du XVII^e siècle).

Bartoszewicz, A. [Notices historiques sur les mathématiques et sur les mathématiciens polonais].
Insérées dans la monographie *Rzecz o matematyce* (Biala 1822, 4°, 32 p.)

1823.

Ostrowski, Fr., Widok historyczny stanu nauk matematycznych w XVI wieku. Lublin 1823.
4°, 28 p. — Aperçu historique sur l'état des mathématiques au XVI^e siècle.

1824.

Hube, H. [Notices sur les travaux de MONGE, de HACHETTE et de CHASLES.]
Insérées dans le mémoire *O poczatkach geometryi analitycznej* de cet auteur (Rocznik Towarzystwa naukowego Krakowskiego, **9**, 76—130).

1825.

Krzyzanowski, A. [Notices historiques sur la théorie des parallèles.]
Insérées dans le mémoire *O trudnosciach zachodzacych w wykladzie zasad geometryi elementarnej* (Pamietnik Umiejetnosci Sztuk i nauk 1825, p. 69—112).

1826.

Ostrowski, F., Widok historyczny stanu nauk matematycznych w XVII wieku. Lublin 1826.
4°, 51 p. — Aperçu historique sur l'état des mathématiques au XVII^e siècle.

Jasinski, W. [Aperçu de l'histoire des logarithmes.]
Inséré dans le mémoire *Wyklad elementarny teoryi logarytmow* de cet auteur (Warszawa 1826), p. 36—39.

1829.

Wreczycki, Rys historyi geometryi do epoki wynalezienia analizy Descartesa wraz z ocenieniem zaslug znakomitszych geometrów polskich w tymze czasie. Warszawa 1829.
4°, 44 p. — Esquisse de l'historie de la géométrie jusqu'au temps de l'invention de la géométrie analytique par DESCARTES; avec une analyse des travaux des géomètres polonais pendant la même période.

1830.

Janicki, J. [Notice historique sur la théorie des carrés magiques.]
Insérée dans le mémoire *Rzecz o kwadratach magicznych* de cet auteur (Warszawa 1830), p. 37—40.

Checiewski, W., Krótka historya matematyki czystej do konca XVgo wieku. Lublin 1830.
4°, 32 p. — Abrégé de l'histoire des mathématiques pures jusqu'à la fin du XVe siècle.

1835.

Checiewski, W., Wiadomosc o geometrach polskich od roku 1500 do 1684. Kielce 1835.
4°, 8 p. — Notice historique sur les géomètres polonais depuis 1500 jusqu'à 1684.

1847.

Hoene-Wronski, Réforme des mathématiques. Complément historique et didactique de la Réforme des mathématiques dans leurs parties pures et appliquées. Paris 1847.
4°, p. I—CCCXXVII.

1857.

Zebrawski, T. [Histoire de la littérature polonaise des sciences mathématiques.]
Insérée dans le tome 9 (1857) p. 519—526 de la *Historya literatury polskiej* publiée par M. WISZNIEWSKI.

1862.

Zebrawski, T., Wiadomosc o Adamie Kochanskim i pismach jego matematycznych. Krakow 1862.
8°, 11 p. — ADAM KOCHANSKI (mathématicien du XVIIe siècle) et ses écrits mathématiques.

1870.

Folkierski, W. [Notice sur l'histoire du calcul infinitésimal.]
Insérée dans les *Zasady rachunku rozniczkowego* de cet auteur (Paris 1870), p. XX—XXXVI.

Trzaska, W. [Notice sur le développement de la théorie des déterminants.]
Insérée dans l'écrit: *Krótkie wiadomosci o wyznacznikach* (Paris 1870), qui est un appendice à l'ouvrage de FOLKIERSKI (p. 1031—1033).

1873.

Zebrawski, T., Bibliografia pismiennictwa polskiego z dzialu matematyki i fizyki oraz ich zastosowan. Krakow 1873.
8°, 617 p. — Bibliographie de la littérature polonaise relative aux sciences mathématiques et physiques et à leurs applications.

1876.

Transon, A. [Traductions polonaises de deux articles: »Reflexions sur l'événement scientifique d'une formule publiée par WRONSKI en 1812 et découverte par CAYLEY en 1873» et »Lois des séries de WRONSKI; sa Phoronomie», parus dans les Nouvelles annales des mathématiques **13**, 1874.]
Pamietnik Towarzystwa nauk scislych w Paryzu **8**, 1876, articles: VII (1—8) et VIII (1—8).

1878.

Franke, J. N. i Jakubowski, A., Maciej Gloskowski matematyk polski XVII^go wieku. Krakow 1878.
8°, 34 p. — MATHÉE GLOSKOWSKI, mathématicien polonais du XVII^e siècle (auteur d'un ouvrage: *Geometria peregrinans*).

Dickstein, S., Hermann Grassmann.
Niwa (Warszawa) 1878, 739—751. — Sur la vie et les oeuvres de H. GRASSMANN.

1880.

Hoene-Wronski, Wstep do wyklada matematyki. Wyduwca L. NIEDZWIECKI. Paryz 1880.
8°, 100 p. — Observations sur le progrès et le développement des sciences mathématiques et sur la philosophie de ces sciences. Dans les appendices une biographie de H. WRONSKI et la liste de ses ouvrages philosophiques, scientifiques et de ses manuscrits. — Voir mon analyse dans le Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem. **12** (1880), 56—57.

1881.

Gosiewski, W. [Notices historiques sur l'algèbre en Pologne.]
Encyklopedya wychowawcza **1**, 1881, 191—199.

Trybulski, W. [Notices historiques sur l'arithmétique.]
Encyklopedya wychowawcza **1**, 1881, 339—346. — Cette notice contient des renseignements nouveaux sur l'histoire de l'arithmétique et sur l'enseignement de cette science en Pologne.

Dickstein, S., Badania matematyczno-historyczne. Warszawa 1881.
Prawda (Warszawa) 1881, p. 127—128, 620—621. — Les nouvelles recherches sur les mathématiques chez les anciens Egyptiens et Babyloniens (d'après MORITZ CANTOR).

1882.

Dickstein, S., Jan Broscius.
Encyklopedya wychowawcza **2**, 1882, 319—325.

1883.

Dickstein, S., Wyjatek z »Matematyki polskiej» Lenczewskiego w roku 1757 w Wilnie wydanej.
Przeglad pedagogiczny (Warszawa) 1883, 41—54. — Sur l'arithmétique de LENCZEWSKI (1757).

Meyerson, E., O matematyce starozytnych Egipcyan.
Ateneum (Warszawa) 1883, 137—151, 268—279, 403—404. — Sur les sciences mathématiques chez les anciens Egyptiens.

Fafara, J., Historyczny zarys matematyki u starozytnych. I, II. Tarnopol 1883—1884.
8°, 24 + 27 p. — Aperçu historique sur les mathématiques dans l'antiquité.

Sprawozdania z pismiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodniczych. I—IV. (1882—1885). Warszawa 1883—1887.
8°. — I (1882): VIII + 188 p. II (1883): IV + 221 p. III (1884): VIII + 294 p. IV (1885): VII + 305 p. — Revue des travaux dans les sciences mathématiques et naturelles publiés 1882—1885. Editeurs MM. E. et N. NATANSON.

1884.

Baraniecki, A. [Aperçu sur le développement de l'arithmétique en général et sur l'enseignement arithmétique en Pologne.]
Inséré dans l'*Arytmetyka* de cet auteur (Warszawa 1884), p. XIII—LVI. — Dans une note à la fin du livre, M. FRANKE traite sur les nombres parfaits et amicaux de BROZEK.

Zajaczkowski, W. [Aperçu sur le développement de la géométrie analytique et sur l'histoire de la géométrie analytique en Pologne.]
Inséré dans la *Geometrya analityczna* de cet auteur (Warszawa 1884), p. XIV—XXXVII.

Franke, J. N., Jan Brozek (J. Broscius) akademik krakowski 1585—1652. Kraków 1884.
8°, 303 p. — C'est jusqu'à ce jour le meilleur travail historico-mathématique polonais. Voir mon analyse dans le Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 19—21.

1886.

Zebrawski, T., Dodatki do Bibliografii pismiennictwa polskiego dzialu matematyki i fizyki oraz ich zastosowan. Kraków 1886.
8°, 155 p. — Additions à la Bibliographie publiée en 1873.

1887.

Dickstein, S., Niewyzyskana spuscizna po Hoene-Wronskim.
Wszechswiat (Warszawa) 1887, 10—12. — Sur les manuscrits inédits de HOENE-WRONSKI.

Baraniecki, M. A., Teofil Zebrawski.
Wszechswiat 1887, 210—214. — Notice biographique.

Dickstein, S., Hoene-Wronski. Warszawa 1887.
8°, 16 p. — Sur la vie et les ouvrages de HOENE-WRONSKI.

1888.

kstein, S., Wiadomosc o pracach z dziedziny geometryi wielowymiarowej.
Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa) **1**, 1888, 129—136. — Notice sur des travaux de la géométrie polydimensionale.

winski, Pl., O algorytmie x. Tomasza Klosa. Lwów 1888.
8°, 24 p. — Sur l'arithmétique de T. KLOS (1537).

1889.

:kstein, S., O metodzie teleologicznej Hoene-Wronskiego rozwiazywania równan algebraicznych.
Rozprawy i Spraw. Wydz. matem.-przyr. Akad. Umiejetn. Krakow. **19**, 1889. 28 p. — Sur la méthode téléologique de la résolution des équations de HOENE-WRONSKI.

iwinski, Pl., O algorytmie Bernarda Wojewódki.
Muzeum (Lwów) 1889, 20, 27, 98—104, 173—178. — De l'arithmétique de WOJEWODKA (1566).

ia, G., Przeszlosc i stan obecny najwazniejszych teoryj geometrycznych. Przeklad uzupelniony licznemi dodatkami, wydany za upowaznieniem autora przez S. DICKSTEINA. Warszawa 1886.
8°, VIII.+ 112 p. — Traduction du mémoire: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (1887).

:stein, S. [Abrégé de l'histoire de la géométrie élémentaire en général et en Pologne ainsi que notices historiques sur l'enseignement géométrique en Pologne.]
Encyklopedya wychowawcza **4**, 1889 (sous presse).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M. Zwerger. Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet. München, 1889. J. Lindauer'sche Buchhandlung. 8°, V, 129 p. + 1 pl.

Der Verfasser dieser Schrift ist kein Neuling mehr auf dem Gebiete der Geschichte der Physik, denn er hat in einer früheren Arbeit (*Die lebendige Kraft und ihr Mass,* München 1885) bereits eine gründliche Kenntnis der Quellen an den Tag gelegt. Das Problem, dessen Entwicklung er diesmal verfolgt, steht mit dem damals behandelten in nahem, innerem Zusammenhange, und die Autoren, welche die Lehre vom physische Pendel und vom Trägheitmomente behandelten, sind zum übe wiegenden Teile dieselben, welche auch in den litterarische Kämpfen um das wahre Kraftmass eine Rolle spielten. D Frage, welche den Keim zu den folgereichen und langwierige Untersuchungen über den Schwingungsradius in sich enthie wurde zuerst angeregt in dem Briefwechsel zwischen Mersen und Cartesius, und letzterer ist, man mag über seine phantastische Naturkonstruktion wie immer denken, doch d jenige, der den seitdem in bleibenden Besitz der Wissensch übergegangenen Begriff vom Schwingungsmittelpunkt oder, er sich ausdrückte, Agitationszentrum zuerst formulierte, obw er diesen Begriff noch nicht richtig einzukleiden wusste. Dühri in seinem sehr verdienstlichen Geschichtswerke, aus dem H Zwerger anscheinend nicht geschöpft hat, vielleicht um s ausschliesslich durch die Quellenwerke leiten zu lassen, erke dieses Verdienst auch an, fährt dann aber fort, beim Überga von der statischen zur dynamischen Betrachtungsweise sei D cartes aus dem richtigen Gleise gekommen, und knüpft da die weitere Bemerkung: »Ein näheres Eingehen auf die in weiteren Cartesianischen Briefen enthaltene Kontroverse Roberval würde die Einsicht in die geschichtliche Entwickl nicht im Verhältnis der Ausdehnung der Erörterungen förd die zum genauen Verständnisse jener tastenden Versuche un gänglich werden würden» (S. 133 der 1. Auflage). Die Standpunkt ist nicht der unsrige, wir möchten in der Geschic auch die Aufzählung der Fehlgriffe und Umwege nicht mis und danken es deshalb unserer Vorlage, dass sie sich auch der Polemik des Roberval gegen Descartes des näheren

schäftigt. Wie sehr der letztere von der Berechtigung der Angriffe seines Gegners durchdrungen war, erhellt schon aus der seinem sonstigen Wesen ganz unangemessenen Grobheit, die er zur Schau zu tragen sich bemühte. Dass ROBERVAL auf dem richtigen Wege sich befand, hauptsächlich aber an der Unvollkommenheit der damaligen Rechnungsmethoden scheiterte, ist wohl vordem noch nicht gleich bestimmt erkannt und hervorgehoben worden. — Die erste wirkliche Lösung gab HUYGENS, dessen Berechnung der ausschlaggebenden Grösse Σmr^2 der Verf. einer gründlichen Analyse unterzieht; für siebzehn Fälle ist es dem grossen Niederländer selbst gelungen, den Schwingungsradius zu berechnen. Allerdings fand die neue Theorie nicht sofort Anklang, ein gewisser CATELAN hatte allerhand Einwürfe dagegen zu erheben, allein nunmehr trat für HUYGENS kein geringerer als JAKOB BERNOULLI in die Schranken und widerlegte CATELAN's Argumente im einzelnen. BERNOULLI beschäftigte sich auch noch fernerhin mit der Sache und gab, von der inzwischen gelungenen Entdeckung der Infinitesimalrechnung begünstigt, eine vollkommen exakte Lösung des Problemes, durch welche die Erledigung des Einzelfalles einzig und allein von der Ausführung einer gewissen Integration abhängig wurde. Auch lieferte derselbe Mathematiker zuerst einen Beweis für den von HUYGENS axiomatisch angenommenen Satz, dass der Schwerpunkt eines schwingenden Körpers ebensohoch steigen muss, als er vorher gefallen war. Immerhin bleibt, wie der vorhin schon genannte CATELAN darlegte, auch bei BERNOULLI noch mancher Punkt unaufgeklärt; nach dieser Seite hin schafften JOHANN BERNOULLI und BROOK TAYLOR Abhilfe, nicht ohne dass sich auch bei dieser Gelegenheit wieder der streitsüchtige Charakter des ersteren deutlich genug bekundete. Der Antagonismus zwischen den deutschen und englischen Gelehrten hinderte beide Teile, die durch gemeinsame Arbeit erzielten Fortschritte richtig zu würdigen. Ein neues Ferment ward in die Untersuchung hineingetragen durch DANIEL BERNOULLI, der die Schwingungen einer Kette in betracht zog; EULER nahm dasselbe Problem auf und löste es auf andere Weise, indem er dabei zu seiner Verwunderung die Resultate seines Vorgängers bestätigt fand. Auch erweiterten beide Forscher den bisher allein ins Auge gefassten Begriff der Schwingung, und zumal EULER bethätigte auf diesem Gebiete sein altbewährtes Talent, sich von einer Fragestellung immer zu einer neuen, komplizierteren hinführen zu lassen. Wie vollständig derselbe diesen ganzen Komplex von Aufgaben beherrschte, geht u. a. auch aus dem

Umstande hervor, dass einige neuere Physiker, welche die Lehre vom Schwingungsmittelpunkte mit den modernen Hilfsmitteln behandeln, im wesentlichen doch, wie der Verf. darthut, nur in denselben Wegen wandeln, auf denen ihnen die grossen Geometer der Baseler Schule bereits vorangegangen waren.

Die ganze Monographie ist trefflich dazu geeignet, den Entwicklungsgang der neueren Mechanik an einem scharf umrissenen Spezialfalle zu illustrieren; dass im Interesse eines grösseren Leserkreises die Bezeichnungsweise der Gegenwart an die Stelle der in den Originalen angewendeten getreten ist, kann man auch vom geschichtlichen Standpunkte aus nur billigen. Als unhistorisch möchten wir nur einige Namenschreibungen — *Deskartes* statt DESCARTES, *Huyghens* statt HUYGENS — vermieden sehen.

München. S. GÜNTHER.

G. Loria. DIE HAUPTSÄCHLICHSTEN THEORIEN DER GEOMETRIE IN IHRER FRÜHEREN UND HEUTIGEN ENTWICKELUNG. HISTORISCHE MONOGRAPHIE. UNTER BENUTZUNG ZAHLREICHER ZUSÄTZE UND VERBESSERUNGEN SEITENS DES VERFASSERS IN'S DEUTSCHE ÜBERTRAGEN VON F. SCHÜTTE. MIT EINEM VORWORTE VON R. STURM. Leipzig, Teubner 1888. 8°, 131 p.

G. Loria. PRZESZLOSC I STAN OBECNY NAJWAZNIEJSZYCH TEORYJ GEOMETRYCZNYCH. PRZEKLAD UZUPELNIONY LICZNEMI DODATKAMI, WYDANY ZA UPOWAZNIENIEM AUTORA PRZEZ S. DICKSTEINA. Warszawa 1889. 8°, 112 p.

Über die in 1887 erschienene verdienstvolle Arbeit »*Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*» des Herrn GINO LORIA hat schon Herr Prof. GÜNTHER in dieser Zeitschrift (Jahrg. 1887, S. 110) einen Bericht erstattet. In Folge des Erscheinens der oben genannten Übersetzungen (einer deutschen und einer polnischen) erlauben wir uns letzteren Bericht zu vervollständigen.

Schon die deutsche Übersetzung weist im Vergleich mit dem italiänischen Original bedeutende Veränderungen auf. Während im letzten der zu besprechende Stoff in 8 Abschnitten behandelt wird, die folgende Aufschrift führen: I. Die Geometrie vor der Mitte des 19. Jahrhunderts. — II. Theorie der ebenen Kurven. — III. Theorie der Oberflächen. — IV. Theorie der Kurven doppelter Krümmung. — V. Abbildungen, Korrespondenzen, Transformationen. — VI. Geometrie der Geraden. — VII. Nicht-Euklidische Geometrie. — VIII. »

dimensionale Geometrie, — ist in der ersten ein neuer Abschnitt zugekommen; es sind nämlich die auf die Gestalt der Kurven, der Oberflächen und die abzählende Geometrie bezüglichen Theile der Abschnitte II und III vervollständigt und zu einem besonderen Abschnitte (IV der deutschen Ausgabe) zusammengestellt. Die zur Differentialgeometrie gehörenden in der italiänischen Monographie (im Abschnitte III) nur kurz angeführten, Untersuchungen, sind in der deutschen Ausgabe ausführlich besprochen und von den epochemachenden Werken von MONGE und GAUSS, deren Inhalt angegeben wird, bis auf die letzten Arbeiten auf diesem Gebiete, sorgfältig dargestellt worden. An mehreren Orten sind die Litteraturnachweise stark vermehrt und auch die in 1888 erschienenen Schriften citirt worden.

Die polnische Ausgabe ist noch vollständiger. Sie wurde zwar, bald nach dem Erscheinen der italiänischen Monographie, aus dem Original übertragen, da aber inzwischen, noch vor dem Drucke, die deutsche Übersetzung zur rechten Zeit in die Hände des Übersetzers kam, so wurden, natürlicher Weise, auf alle die oben bezeichneten Veränderungen und Zusätze volle Rücksicht genommen. Der Herr Verfasser, mit dem der Übersetzer in Briefwechsel stand, hat ausserdem demselben eine nicht unbedeutende Anzahl neuer Zusätze und Verbesserungen zugeschickt. Die in der Bibliotheca Mathematica 1888 (p. 39—48, 67—80) erschienene Monographie des Herrn Verfassers: »*Notizie storiche sulla geometria numerativa*» wurde statt des bezüglichen Theiles des Abschnittes IV eingeführt. Die mehreren im Schlusscapitel der deutschen Ausgabe fehlenden Citate wurden vom Herrn Verfasser angegeben. Ausserdem hat der Übersetzer, auf den Wunsch des Verfassers, die auf die polnische mathematische Litteratur bezüglichen Arbeiten an geeigneten Orten namhaft gemacht. Somit erscheint die polnische Übersetzung als die *dritte* stark vermehrte und verbesserte Ausgabe der Monographie von Prof. LORIA.

Der von Herren GÜNTHER und M. CANTOR (Zeitschr. f. Math. **33**, 1888; Hist. lit. Abth. S. 191) gerühmte Fleiss und seltene Litteraturkenntniss des Herrn Verfassers bleibt noch in höherem Grade für die eben besprochenen Übersetzungen bestehen und Referent ist der Ansicht, dass die mühevolle Arbeit des Herrn LORIA von einem grossen Nutzen sein wird für Studierende und Lehrer. Sie lässt noch den Wunsch hegen, dass auch auf anderen Gebieten der Mathematik ähnliche Monographien baldigst erscheinen mögen.

Warszawa. S. DICKSTEIN.

W. W. R. Ball. A SHORT ACCOUNT OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. London, Macmillan 1888. 8°, XXIII + 464 p.

Cet ouvrage est un compendium qui peut être considéré comme un essai de combler la lacune dans la littérature historico-mathématique, que M. MANSION a signalée il y a peu de temps dans ce journal (voir année 1888, p. 35). Il contient 19 chapitres avec les titres suivants: I. *Egyptian and Phœnician Mathematics.* — II. *The Ionian and Pythagorean Schools.* — III. *The Schools of Athens and Cyzicus.* — IV. *The first Alexandrian School.* — V. *The second Alexandrian School.* — VI. *The Byzantine School.* — VII. *On systems of numeration.* — VIII. *The rise of learning in western Europe.* — IX. *The mathematics of the Arabs.* — X. *The Introduction of Arabian mathematical works into Europe.* — XI. *The development of arithmetic to the year 1637.* — XII. *The mathematics of the renaissance 1450—1637.* — XIII. *The close of the renaissance 1586—1637.* — XIV. *Features of modern mathematics.* — XV. *History of mathematics from Descartes to Huygens, circ. 1635—1675.* — XVI. *The life and works of Newton.* — XVII. *Leibnitz and the mathematicians of the first half of the eighteenth century.* — XVIII. *Lagrange, Laplace and their contemporaries, circ. 1740—1830.* — XIX. *Recent Times.*

M. BALL a utilisé pour son travail non seulement les oeuvres des principaux mathématiciens, mais aussi plusieurs des plus récents ouvrages de l'histoire des mathématiques; parmi ces ouvrages nous regrettons qu'il ait oublié le traité de M. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra*, et qu'il semble n'avoir fait que peu d'usage de l'important livre de M. ZEUTHEN sur *Kegelsnitslæren i Oldtiden*. D'un autre côté le style de M. BALL est clair et élégant, de nombreux aperçus rendent facile de suivre le fil de son exposition et de fréquentes citations permettent à celui qui le désire d'approfondir les recherches que l'auteur n'a pu qu'effleurer.

Naturellement les oeuvres que M. BALL connaît le mieux sont ceux de ses compatriotes, sur lesquels il donne quelques détails peu connus. Ainsi, il nous avertit p. ex. que l'idée fondamentale de la *Théorie des fonctions analytiques* de LAGRANGE se trouve déjà indiquée dans la *Residual Analysis* de LANDEN. Malheureusement l'amour de la patrie pousse l'auteur à montrer une prédilection marquée pour les mathématiciens anglais. Pour faire ressortir la vérité de cette remarque je choisis le cha-
[illegible] sur NEWTON. Je suis le premier à reconnaître que ce
[illegible] est un des meilleurs de tout l'ouvrage et qu'il ren-

erme des notices très utiles à tous ceux qui n'ont pas eu l'occasion, comme l'a eue M. BALL, d'examiner les manuscrits inédits de NEWTON gardés à l'Université de Cambridge. Mais, quelque grand que soit NEWTON, il est sans doute un peu trop de lui dédier la septième partie d'une histoire des mathématiques. Le grand espace consacré ainsi à NEWTON a naturellement été préjudiciable aux autres savants. Ainsi, d'après M. BALL, LEIBNIZ a fait très peu pour le progrès des mathématiques, tandis que, en effet, plusieurs des idées de LEIBNIZ dont il fait si peu de cas, ont été le germe de branches telles que la théorie des déterminants et le calcul géométrique de GRASSMANN. Je me permets de faire remarquer aussi que les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique ont été données avant NEWTON par ALBERT GIRARD; il semble donc que ce savant ait mérité une place plus élevée que celle que lui a donnée M. BALL. — Je joins ici quelques autres remarques sur certains points de l'ouvrage de M. BALL. Quand l'auteur fait l'éloge de la partie historique de l'algèbre par WALLIS, il me semble qu'il aurait dû aussi indiquer pourquoi son opinion diffère tant de celle de MONTUCLA. M. BALL attribue à WREN la découverte des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe, mais il devait remarquer aussi que tout le monde croit avec CHASLES que le géomètre anglais s'est borné aux surfaces de révolution. Ajoutons encore que CRAMER a des mérites bien plus grands que ceux que lui reconnaît M. BALL, que RUFFINI doit être nommé à cause de ses recherches sur l'irrésolubilité algébrique des équations d'un degré supérieur au 5:ème, et que la méthode de transformation de TSCHIRNHAUSEN est bien plus digne d'être rappelée aujourd'hui que les recherches optiques du même géomètre.

A mon sens, la valeur de l'histoire de M. BALL diminue à mesure que la période examinée s'approche de notre temps, de manière que la partie la plus faible en est certainement la dernière. Ce fait n'est point étonnant; en effet, bien que nous ayons d'excellentes biographies des plus éminents savants, aussi bien que des monographies historiques de tel ou tel sujet, il est si difficile d'écrire l'histoire des mathématiques dans notre temps que cette entreprise peut décourager les plus éminents écrivains. Il faut avouer que la marche suivie par M. BALL n'en a fait qu'augmenter les difficultés. Il commence par donner une liste (nécessairement défectueuse) de noms des mathématiciens de notre temps, en y joignant quelques notices biographiques. Malheureusement ces notices sont très incomplètes et même

quelquefois erronnées (p. ex. il croit HESSE encore professeur à Heidelberg, M. JORDAN mort dès 1878 et il donne à M. KLEIN une chaire à Berlin, tandis que, comme on sait, ce géomètre a été professeur à Leipzig, et l'est actuellement à Göttingen). Après cette liste, M. BALL (en adoptant un système tout différent de celui qu'il a suivi auparavant) considère successivement les travaux modernes appartenant aux branches suivantes: Fonctions elliptiques et abéliennes, Théorie des nombres, Algèbre supérieure, Géométrie moderne et analytique, Analyse, Astronomie, Physique mathématique. Cette classification (évidemment incomplète) oblige bien souvent M. BALL à considérer séparément les diverses parties de l'oeuvre scientifique d'un même géomètre, et, par conséquent, c'est avec peine que le lecteur s'en forme une idée exacte. N'avait-il pas été mieux de faire successivement les biographies des plus grands mathématiciens de notre époque et d'indiquer ensuite les savants mineurs qui ont continué leurs recherches? De cette manière M. BALL aurait peut-être évité d'omettre p. ex. les ouvrages de MM. GENOCCHI et BACHMANN dans la Théorie des nombres et de MM. NÖTHER et HALPHEN dans la Théorie des courbes à double courbure, ceux de M. KIRCHHOFF dans la Physique mathématique et de M^me^ KOWALEVSKI dans l'Analyse.

Dans ce qui précède, je me suis permis d'appeler l'attention sur quelques défauts de l'ouvrage de M. BALL; mais d'autre part, comme ces défauts sont peu importants en comparaison de ses mérites, je j'ose avancer que cet ouvrage pourra devenir très utile comme manuel d'histoire des mathématiques pour les étudiants, et qu'il ne sera pas déplacé dans les bibliothèques des savants.*

Genova. G. LORIA.

---

* A l'analyse précédente de M. LORIA, je me permets d'ajouter quelques mots sur les sources que M. BALL a utilisées et sur celles qu'il n'a pas utilisées. Parmi les premières, il a donné lui-même une place marquée aux ouvrages de MM. HOEFER et MARIE, et, en effet, plusieurs des nombreuses erreurs de ces deux ouvrages sont répétées par M. BALL. D'autre part, en parlant des journaux historico-mathématiques, M. BALL passe sous silence la Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik avec ses *Suppléments*, sans doute parce qu'il n'a pas eu recours à ce recueil important. Il est donc très naturel qu'il n'a pu corriger plusieurs des notices inexactes ou incomplètes qu'il a trouvées dans les autres sources (voir p. ex. le passage relatif à RUDOLFF et STIFEL à la page 192.)

Pour ces raisons, il serait à désirer que M. BALL fît subir à son intéressante *History of mathematics* une révision complète et qu'il corrigeât dans un supplément les erreurs qui se sont glissées malgré lui dans son ouvrage. (G. E.)

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1889: 1. — [Analyse de l'année 1887:] Fiziko-matem. naouki **4** (1888), 1889, 375—378. (V. V. BOBYNIN.) — [Analyse de l'année 1888:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 7_6, 1889, 119—125.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

34 (1889): 2.

Allman, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin, Hodges 1889.

8°, XII + 237 p. + 1 pl. — Réimpression, avec quelques additions, d'une série de notes publiées dans Hermathena 1877—1887.

Archilla, D. S., e **Vicuña, D. G.,** Discursos leidos ante la real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales en la recepción publica del Sr. D. S. Archilla y Espejo. Madrid 1888.

8°, 111 p. — P. 6—86: Discours de M. ARCHILLA sur l'histoire des notions fondamentales du calcul infinitésimal; p. 87—111: Discours de M. VICUÑA sur l'histoire du calcul infinitésimal en Espagne. — [Analyse:] Jorn. de sc. matem. **8**, 1888, 186—187. (G. T.)

Ball, W. W. R., A history of the study of mathematics at Cambridge. Cambridge, Deighton 1889.

8°, XVI + 264 p.

Beltrami, E., Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky.

Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 5_1: 1, 1889, 441—448.

Bertolotti, A., Architetti, ingegneri e matematici in relazione coi Gonzaga signori di Mantova nei secoli XV, XVI e XVII. Ricerche archivistiche mantovane.

[Giornale ligustico (Genova) **15**, 1888. 140 p.

Besso, D., Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo.

Periodico di matematica (Roma) **4**, 1889, 14—17.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in Nederlanden. XXX.

Amsterdam, Akad. van Wetensch., Versl. en Meded. 3_5, 1886, 69—119. — Sur la dispute de STAMPIOEN avec WAESSENAER au sujet de l'extraction des racines de binomes irrationnels.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи развитія математическихъ наукъ на западѣ. Періодъ усвоенія арабской науки. I.

Fiziko-matem. naouki **3** (1887), 1888, A: 16—39; **4**, 1888, 1—26,

97—112, 177—191, 257—266. — Bobynin, V. V., Esquisses historiques du développement des sciences mathématiques dans l'occident. Période de l'appropriation de la science arabe. I.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣйствія развитію научныхъ знаній. I, II.
Fiziko-matem. naouki **4**, 1888, 27—55, 113—131, 192—210, 267—308. — Bobynin, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque du concours du gouvernement pour le développement les connaissances scientifiques. I, II.

БОБЫНИНЪ, В. В., Карлъ Фридрихъ Гауссъ.
Fiziko-matem. naouki **4**, 1888, 56—75, 132—152, 211—228, 309—344. — Bobynin, V. V., Notice biographique sur K. F. Gauss.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. 2:1 (1764—1774). Москва 1889.
8°, (2) + 107 + (1) p. — Bobynin, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à présent. Tome 2, cahier 1 (1764—1774). — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki« 1888.

Curtze, M., Über den »liber de similibus arcubus« des Ahmed Ben Iusuf.
Biblioth. Mathem. 1889, 15—16.

°**Cutworth, W.**, Life and correspondance of Abraham Sharp, the Yorkshire Mathematician and Astronomer. London 1888.

Dickstein, S., Wiadomosc o pracach z dziedziny geometryi wielowymiarowej.
Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa) **1**, 1888, 129—136. — Note sur des travaux de la géométrie polydimensionale.

Dickstein, S., O metodzie teleologicznej Hoene-Wronskiego rozwiazywania rownan algebraicznych.
| *Krakow*, Akad. umiej., Rozprawy **19**, 1889. 28 p. — Sur la méthode de Hoene-Wronski pour la résolution d'équations algébriques. — Mémoire essentiellement historique.

Dziwinski, P., O algorytmie x. Tomasza Klosa.
| Muzeum (Lemberg) 1888. 24 p. — Sur l'*Algorithmus* de Thomas Klos.

Eneström, G., Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques 1667—1888.
Biblioth. Mathem. 1889, 1—14. — [Analyse:] Centralbl. für Bibliothekswesen **6**, 1889, 217.

Eneström, G., Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159 . . .
Biblioth. Mathem. 1889, 28.

Favaro, A., Di alcuni nuovi materiali per lo studio del carteggio di Ticone Brahe e delle sue relazioni con Galileo.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 7_6, 1889, 199—215.

(**Favaro, A.**,) Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Indice alfabetico e topografico del commercio epistolare. Firenze 1889.

4°, 23 p. — Cette liste a été dressée pour guider les recherches relatives à des documents sur GALILEI.

Gelcich, E., Die ersten Bestimmungen der Rotationsdauer der Sonne durch Beobachtung der Sonnenflecken.

Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 1—14, 41—53.

°**Graf, J. H.**, Der Mathematiker Johann Georg Tralles (1763—1822). Bern, Wyss 1886.

8°, 21 p.

°**Grube, F.**, Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. II. Theil (Laplace und Legendre). Beilage zum Programm der königl. Domschule zu Schleswig, Ostern 1888. Schleswig 1888.

4°, 28 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 193—194. (CANTOR.)

Heiberg, J. L., Bidrag til Mathematikens Historie hos Byzantinerne. I—III.

Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1887, 88—92.

Loria, G., Przeszlosc i stan obecny najwazniejszych teoryj geometrycznych. Przeklad uzupelniony licznemi dodatkami, wydany za upowaznieniem autora przez S. DICKSTEINA. Warszawa 1889.

8°, VIII + 112 p. — Traduction en polonais du mémoire: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (1887).

Loria, G., Addizioni alle Notizie storiche sulla Geometria numerativa.

Biblioth. Mathem. 1889, 23—27.

Loria, G., I poligoni di Poncelet. Discorso pronunziato nell' università di Genova. Torino 1889.

8°, 50 p. — [3 L.]

°**Mach, E.**, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1888.

8°. — [8 M.]

°**Mackay, J. S.**, The ancient methods for the duplication of the cube.

Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **4**, 1886, 2—17.

°**Mansion, P.**, Sur Euclide.

Bruxelles, Soc. scient., Annales **10**, 1886, A 46.

ШІАЧИНСКІЙ, Э. К., Изъ прошлаго.

Vjestnik elem. matem. **5**, 1888, 206—208; **6**, 1889, 17—19, 273—275. — SCHPATCHINSKIJ, E. K., Petites notices et extraits relatifs à l'histoire des sciences mathématiques et physiques.

Schubert, H., Die Quadratur des Zirkels in berufenen und

unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. Hamburg 1889.
8°, 40 p. — [0,80 M.] — Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. Neue Folge. Dritte Serie. Heft 67.

°**Segre, C.**, C. G. C. v. Staudt ed i suoi lavori. Torino, Bocca 1888.
8°.

Suter, H., Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526.
Biblioth. Mathem. 1889, 17—22.

°**Wahle, R.**, Über die geometrische Methode des Spinoza. Wien 1888.
8°, 24 p. — [0, 50 M.]

Vicuña, G., Lanz y Betancourt. Bosquejo biblio-biográfico Madrid 1888.
8°, 20 p. — Sur un traité de mécanique pratique publié pour la première fois à Paris en 1808.

°**Wipper**, Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes nebst kurzen biographischen Mittheilungen über Pythagoras. Aus dem russischen übersetzt von F. GRAAP. Leipzig 1888.
8°. — [1,50 M.]

Wolf, R., Über die Rechtschreibung des Namens von Joost Bürgi, und über die Beziehungen von Willebrord Snellius zu Cassel.
Astronomische Mittheilungen (Zürich) n° 72, 1888, 37—55.

°**Zebrawski, T.**, Dodatki do Bibliografii pismiennictwa polskiego z dzialu matematyki i fizyki. Krakow 1886.
8°, (3) + 155 p. — Additions à la bibliographie polonaise des sciences mathématiques et physiques. — [Analyse:] Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa) 1, 1888, 196. (S. D.)

Zwerger, M., Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet. München, Lindauer 1889.
8°, V + 129 p. + 1 pl.

Question 24 [sur un ouvrage de la philosophie des mathématiques].
Biblioth. Mathem. 1889, 32. (CH. HENRY.)

BALL, W. W. R., A short account of the history of mathematics. London, Macmillan 1888. 8°.
Nature (London) 1889, 265—268. — Liter. Centralbl. 1889, 426—427. (—z—k.)

[EU]CLIDIS Elementa, edidit J. L. HEIBERG. Vol. V continens [E]lementorum qui feruntur libros XIV et XV et Scholia in

Elementa cum prolegomenis criticis et appendicibus. Leipzig, Teubner 1888. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 189—191. (CANTOR.) — Liter. Centralbl. 1888, 1642. (—Z—R.)

HUYGENS, CHR., Oeuvres complètes publiées par la société Hollandaise des Sciences. Tome I. Correspondance 1638—1656. Haag, Nijhoff 1888. 4°.

Liter. Centralbl. 1888, 1773—1774. (—Z—R.) — Journal des savants 1888, 369—378. (J. BERTRAND.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{7}_6$, 1889; 19 p. (A. FAVARO.) — Revue critique d'histoire et de littérature (Paris) **26**, 1888, 437—443. (T. DE L.)

KÜNSSBERG, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Teil. Programm der k. bayer. Realschule zu Dinkelsbühl. Dinkelsbühl 1888. 8°.

Biblioth. Mathem. 1889, 29—30. (S. GÜNTHER.) — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 74—75. (CANTOR.)

LAGRANGE, J. L., Oeuvres complètes. Tome XIII: Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par L. LALANNE. Paris, Gauthier-Villars 1882. 4°.

Journal des savants 1888, 538—552. (J. BERTRAND.)

LORIA, G., Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica. Torino 1887. 4°.

Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 194—195. (CANTOR.)

UNGER, F., Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig, Teubner 1888. 8°.

Deutsche Litteraturz. **10**, 1889, 157—158. (M. CURTZE.) — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 70—73. (CANTOR.)

WEISSENBORN, H., Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Berlin, Mayer & Müller 1888. 8°.

Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{12}_2$, 1888, 283—288. (P. TANNERY.) — Liter. Centralbl. 1888, 1010—1012.

ZEUTHEN, H. G., Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité. (Oversigt over Vidensk. Selskabs Forhandlinger.) Kjöbenhavn 1888. 8°.

Neue Philologische Rundschau 1888, 394—396. (S. GÜNTHER.) — Jorn. de sc. mathem. **9**, 1889, 16—17. (G. T.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1889, 30—32. — Fiziko-matem. naouki **4** (1888), 1889, 379—400. — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

25. Si domanda un compendio di storia delle matematiche, corredato da una crestomazia matematica, contenente estratti delle opere matematiche dell' antichità, del medio evo, del rinascimento e dei tempi moderni. Di questi estratti basterà, che, oltre all' autore, al titolo dell' opera ed all' estensione, sia indicata la edizione. — Si dovrà poi per ogni squarcio indicare i motivi, pei quali si può essere indotto ad accoglierlo nella crestomazia. (Istituto Veneto delle scienze, lettere ed arti.)

* L'Institut Vénétien, dans sa séance solennelle du 19 mai 1889, a promis une somme de 3000 francs pour la meilleure réponse à cette question.

---

26. D'après une indication donnée par PALMSKÖLD vers la fin du 17[e] siècle, le savant suédois J. BOTHVIDI a publié en 16 3 un écrit intitulé: *Arithmeticæ vulgaris libri duo, primum a M. HEIZONE BUSCHERO breviter collecti: nunc vero auctiores editi studio et opera* JOHANNIS BOTHVIDI *Goti Norcopensis.* Rostokii, cum consensu amplissimæ facultatis philosophicæ. Anno MDCXI II.

Je désirerais savoir s'il existe encore quelque exemplaire de cet écrit. (G. Eneström.)

Réponse à la question 24. M. EG. HANEGRAEFF n'a pas encore publié son ouvrage sur la philosophie des mathématiques, mais il est toujours occupé de ce sujet et n'a pas abandonné son projet de 1856. (P. Mansion.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1889.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 3. | NOUVELLE SÉRIE. 3.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur un théorème de Kepler équivalant à l'intégration d'une fonction trigonométrique.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans l'intéressante note *Über eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler,*[1] M. GÜNTHER a appelé l'attention sur le théorème suivant indiqué par KEPLER:

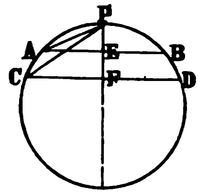
$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} \sin \frac{\alpha r}{n} = \sin \operatorname{vers} \alpha,$$

théorème équivalant à

$$\int_0^\alpha \sin \varphi \, d\varphi = 1 - \cos \alpha.$$

Comme KEPLER n'a pas signalé lui-même comment il est arrivé à son théorème, l'éditeur de ses oeuvres complètes, M. FRISCH, a essayé de réstituer sa méthode, mais M. GÜNTHER fait remarquer avec raison que cette réstitution est peu satisfaisante, et il ajoute: »Wir müssen es vielmehr eingestehen: über KEPLER's Entdeckungsgang breitet sich in diesem Falle ein Schleier, welchen zu lüften wir nicht imstande sind».

Dans les lignes suivantes, je me permets de proposer une très simple hypothèse relative à la voie suivie par KEPLER pour déduire le théorème dont il s'agit.



A l'aide d'un lemma de PAPPOS, KEPLER démontre[2] (voir la figure) que la calotte sphérique CPD est proportionnelle à PF, c. à. d. la calotte CPD est égale à PF multiplié par une constante. Si l'on fait PF égal au rayon r de la sphère, on trouve aisément que cette constante est $2\pi r$, ou 2π si l'on pose $r = 1$. D'autre part, d'après un théorème énoncé par KEPLER,[3] la calotte sphérique peut être décomposée dans une suite infinie d'éléments dont le terme général est la périphérie d'un cercle ayant pour rayon AE. On a donc la calotte CPD égale à $\Sigma 2\pi AE$. Si maintenant on pose

$$\text{l'arc } PA = \varphi, \qquad \text{l'arc } PC = a,$$

on a

$$AE = \sin\varphi, \qquad PF = \sin \operatorname{vers} a,$$

et par conséquent

$$2\pi\Sigma \sin\varphi = 2\pi \sin \operatorname{vers} a,$$

où Σ se rapporte à tous les φ depuis 0 à a. On peut donc écrire cette équation sous la forme:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} \sin\frac{ar}{n} = \sin \operatorname{vers} a,$$

ce qui est précisément le théorème de KEPLER. On en déduit immédiatement la formule

$$\int_0^a \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos a$$

en observant que l'élément de la calotte n'est pas $2\pi AE$, mais[4] $2\pi AE da$ et que, par conséquent, le membre gauche de l'équation doit être multiplié par da ou $\frac{a}{n}$.

[1] Bibliotheca Mathematica 1888, 81—87.
[2] KEPLER, *Opera omnia, ed.* FRISCH. Vol. VI (1866), p. 407. Comparez GÜNTHER, l. c., p. 85.
[3] KEPLER, l. c., Vol. VI, p. 407.
[4] De fait, KEPLER dit: »Si sphaerica superficies intelligatur divisa in zonas infinitas aeque latas, erit quaelibet zona *ut* circulus aliquis latitudine carens»; il semble donc avoir remarqué lui-même qu'il faut multiplier $2\pi AE$ par une certaine quantité.

Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet,

di Gino Loria a Genova.

Non è senza ragione che verso il termine del mio discorso: *I poligoni di Poncelet* (Torino, Loescher 1889) io espressi il convincimento che, malgrado la cura da me posta nel cercare gli elementi per una disamina completa dei lavori relativi a questo argomento, molti di essi mi sarebbero sfuggiti; e non è invano che io manifestai il desiderio che altri segnalasse i punti nei quali la mia narrazione presenta delle lacune. Infatti, dopo la publicazione di quel mio scritto, parecchii ebbero la bontà di indicarmi delle memorie sullo stesso tema di cui io non aveva tenuto conto; gli è in gran parte grazie ad essi che sono ora in grado di scrivere questa breve Nota destinata ad ovviare ad alcune delle mie involontarie ommissioni; a publicare la quale mi spinge, non solo il desiderio di rendere meno imperfetta quella mia publicazione, quanto il convincimento che, nello stato attuale della Scienza, sia necessario porre a confronto *tutti* i varii modi in cui fu studiato un argomento a fine di riconoscere quali di essi posseggano una vera originalità epperò segnino un effettivo progresso, e quanto rimanga ancora da fare attorno all'argomento stesso.

Da quanto io esposi (l. c. p. 20) sembra risultare che i primi lavori sui poligoni di Poncelet che seguirono la memoria di Jacobi[1] siano quelli publicati dal Sig. Cayley nel 1853[2]. Orbene ciò non è esatto, perchè fino del 1841 il Trudi publicò una memoria[3] in cui le questioni relative ai poligoni di Poncelet si trovano ridotte ad equazioni assai più generali di quelle incontrate più tardi (1859) del Mention. Lo scopo precipuo di tale scritto essendo la soluzione del problema di Cramer[4] (cioè l'inscrizione in una conica di un poligono i cui lati passino ciascuno per un punto dato), esso contiene dimostrazioni analitiche compiute dei teoremi riguardanti i poligoni variabili inscritti nelle coniche e con lati passanti per punti dati; ed in quanto ai poligoni inscritti in una conica e circoscritti a un'altra, sono considerati i teoremi pel triangolo, e pel quadrilatero; ma la difficoltà di una eliminazione fu allora di ostacolo a poterli conchiudere in generale. Però in quella memoria è pure per la prima volta esposto un metodo generale per trovare le relazioni che debbono sussistere fra gli elementi

di due sezioni coniche l'una inscritta e l'altra circoscritta a un poligono e applicato specialmente al triangolo e al quadrilatero.

Poco dopo, sormontati gli ostacoli di quell'eliminazione, potè il TRUDI dimostrare i teoremi di PONCELET nel modo più generale e diretto, e assegnare un metodo generale per trovare la relazione corrispondente a un poligono di qualsivoglia numero di lati inscritto in una conica e circoscritto a un'altra. Questi risultati vennero in dominio del publico in parte grazie a una nota dei Rendiconti dell' Accademia di Napoli (1843), e completamente per mezzo dell' importante memoria *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale della teoria delle funzioni ellittiche con diverse applicazioni.*[5]

L'oggetto principale di essa è di ottenere una rappresentazione geometrica del teorema di addizione degli integrali ellittici che (a differenza di quelle scoperte da LAGRANGE e da JACOBI) fosse indipendente dalla previa trasformazione di essi a forma canonica; onde essa soddisfa il desiderio espresso da JACOBI nella chiusa della sua citata memoria. E poichè tale memoria fu scritta senza che l'autore avesse notizia dell'esistenza di quella del Sig. CAYLEY e fu stampata prima che egli la conoscesse, così il TRUDI condivide col CAYLEY la gloria di avere eseguita l'investigazione progettata da JACOBI e di avere studiata la questione difficilissima di determinare la relazione che deve esistere fra le equazioni di due coniche affinchè queste posseggano un poligono di PONCELET; se lo scritto del geometra inglese supera quello dell'italiano perchè contiene questa relazione sotto forma esplicita, questo la vince su quello per l'accuratezza della forma e per essere composto seguendo un metodo che meglio risponde alle vedute Jacobiane. Nè voglio tacere che dalle ricerche del TRUDI non soltanto risulti in modo evidentissimo che nella ricerca della relazione a cui si alluse è lecito restringersi al caso di un poligono con un numero primo di lati, ma spicchi eziandio chiaramente, quale parte fondamentale abbia la considerazione di una corrispondenza doppiamente quadratica nello studio dei poligoni di PONCELET.

Ma i due lavori ora discorsi non compongono da soli il contributo arrecato dal TRUDI alla teoria che ci occupa. Infatti il primo volume degli Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (1863) contiene ello stesso autore gli *Studii intorno ad una singolare eliminazione applicazione alla ricerca delle relazione tra gli elementi di due l'una inscritta, l'altra circoscritta ad un poligono, ed ai ndenti teoremi di Poncelet,* i quali per l'originalità delle

considerazioni, la perfezione del dettato e l'eleganza analitica gareggiano con quelli che li precedettero. La singolare eliminazione che ivi è studiata ha per fine la ricerca della relazione fra v_0 e v_n che nasce dell'eliminazione di $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ fra le n equazioni

$$av_r^2 v_{r+1}^2 + 2b(v_r + v_{r+1})v_r v_{r+1} + c(v_r + v_{r+1})^2$$
$$+ 2dv_r v_{r+1} + 2e(v_r + v_{r+1}) + f = 0;$$
$$(r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

essa viene eseguita invocando l'ajuto del calcolo integrale, notando cioè che v_0 e v_n sono connessi da un'equazione differenziale ellittica e servendosi dell'integrale algebrico di essa scoperto da Eulero. La ricerca si semplifica quando $b = 0$ e $c = 0$, cioè nel caso più interessante nelle applicazioni geometriche scopo degli *Studii* in discorso. Queste applicazioni conducono l'autore a formole che risolvono per via ricorrente il problema di trovare la relazione esistente fra i coefficienti di due sezioni coniche quando nell'una è inscrittibile un n-gono circoscritto all'altra; e val la pena di notare che queste relazioni si possono scrivere senza fattori estranei avendo l'autore premessa l'osservazione generale che il metodo da lui esposto dà immediatamente la relazione per un poligono di $2k + 1$ lati moltiplicata per l'analoga relativa a un poligono di $2k - 1$ lati.

Non è la tema di tediare il lettore, ma la deficienza di spazio, che mi fa abbandonare i lavori del Trudi, sopprimendo il commento di cui sarebbero meritevoli. E passo ad occuparmi della nota del Sig. Brioschi *Sui poligoni inscritti alle coniche*[6] la quale — malgrado il giudizio poco favorevole che ricevette dal Poncelet[7] — è a mio avviso degnissima di prendere un posto onorevole nella collezione di lavori che vado esaminando. Essa ebbe origine dal desiderio di stabilire, evitando calcoli lunghi e complicati, l'identità delle due relazioni che assegnarono i Sig^{ri} Cayley e Salmon come annunciatrici dell'esistenza di un triangolo inscritto in una conica e circoscritto ad un'altra. Ma l'autore, oltre al raggiungere questo intento, seguendo il filo delle sue argomentazioni e mediante una semplicissima considerazione geometrica, perviene a una regola che permette di trovare per via ricorrente l'inviluppo del lato libero di un poligono $A_1 A_2 \ldots A_n$ inscritto nella conica $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} = 0$ e i cui lati $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ tocchino l'altra conica

$$l_1^2 x_1^2 + l_2^2 x_2^2 + l_3^2 x_3^2 - a_1 x_2 x_3 - a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1 x_2 = 0.$$

Fra le dimostrazioni del teorema di PONCELET per il caso di triangoli, assai notevole per semplicità ed eleganza è quella che si legge nella nota del Sig. BELTRAMI intitolata *Alcune formole per la teoria elementare delle coniche.*[8] Sgraziatamente però il ragionamento ivi fatto non è applicabile a poligoni d'ordine superiore a tre; infatti — come notò il Sig. CREMONA[9] — esso riposa sulla circostanza che alla condizione affinchè una conica sia inscrittibile in un triangolo inscritto in un'altra può darsi la stessa forma che ha la notissima relazione esistente fra le sei coordinate omogenee di una retta dello spazio; e sotto una forma analoga *non* si può scrivere la condizione affinchè una conica sia inscrittibile in un poligono di più di tre lati inscritto in un'altra curva di secondo ordine. E fra i lavori più recenti in cui il teorema di PONCELET è dimostrato per triangoli e cerchii, citerò la memoria del DÖRHOLT *Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte* (Münster 1884; v. specialmente § 11).

I due scritti (v. l. c. p. 30) in cui il CLIFFORD espose l'applicazione dei poligoni di PONCELET alla trasformazione delle funzioni ellittiche furon preceduti da una breve nota *On some porismatic Problems*[10] in cui il principio di corrispondenza di CHASLES viene applicato a dimostrare la natura porismatica del problema di costruire un poligono inscritto in una conica e circoscritto ad un'altra e a trovare il numero delle soluzioni che hanno certe questioni affini.

Alla questione di inscrivere in una conica un poligono circoscritto a una circonferenza il Sig. FIEDLER è stato naturalmente condotto nella ben nota sua opera *Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme* (Leipzig 1882) considerando una conica come projezione ortogonale di una sezione piana di un iperboloide equilatero rotondo sul piano del cerchio di gola (§§ 165—169). In pari tempo egli si occupò del problema di chiusura cui dànno luogo i cerchii tangenti a due cerchii coplanari e concluse (§ 169) la relazione $\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2}$ di STEINER alla quale allusi nella prima nota a pag. 40 del mio Discorso.

Aggiungerò qui qualche parola relativamente al lavoro del Sig. DISTELI[11] che potei esaminare soltanto dopo avere pronunciato il mio discorso. Siccome ivi i teoremi di STEINER sui poligoni inscritti nelle cubiche piane o nelle quartiche con due punti doppii vengono dedotti da considerazioni sulle quartiche gobbe di 1ª specie, così esso può collegarsi agli scritti dei Sig^ri^ AUGUST, HARNACK, WESTPHAL e ED. WEYR da me esami-

nati e a quelli dei Sig^{ri} SCHUR[12] e EBERHARD[13] di cui faccio ora menzione. Ma qui finisce l'analogia fra tali lavori e quello del Sig. DISTELI, perchè i ragionamenti di questi, fondati su considerazioni di Geometria descrittiva, si scostano totalmente da quelli che si leggono nei lavori precitati e rivelano che il loro autore appartiene alla scuola del Sig. FIEDLER; ed invero la base del lavoro del Sig. DISTELI è da cercarsi nell'opera: *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* e specialmente in quelle parti dei volumi II e III (della nuova edizione) in cui sono studiate le quartiche gobbe. Il metodo di ricerca adoperato dall'autore gli permette di dimostrare per via sintetica non solo gli enunciati di STEINER ma anche i teoremi che vi aggiunse il CLEBSCH.

Lo scritto del Sig. LÉAUTÉ citato nella nota 6, p. 28 del mio Discorso è il sunto di un più esteso lavoro publicato nel 1876 col titolo: *Etude géométrique sur quelques applications aux courbes du 2^d degré du théorème d'Abel relatif aux fonctions elliptiques* (Mém. de l'acad. des sciences de Toulouse **8**$_7$).

La considerazione dei poligoni di PONCELET degeneri a cui io ho alluso p. 29—31 ha condotto recentemente il Sig. STURM ad alcuni nuovi risultati.[14] Nel caso di due cerchii, oltre ai quadrangoli e agli esagoni di PONCELET, che esistono allorquando sono soddisfatte le condizioni scoperte da STEINER, altri ve ne sono nei quali le diagonali principali sono parallele all' asse radicale dei due cerchii: questo osservarono i Sig^{ri} ROSANES e PASCH a p. 164—165 del tomo 65 del Journal für Mathematik. Ma il Sig. STURM scoperse che per l'esistenza dei suddetti poligoni devono essere soddisfatte l'una o l'altra delle seguenti equazioni di condizione: $d^2 = R^2$; $(d^2 - R^2)^2 = 4d^2R^2$. Similmente esistono ottagoni di PONCELET colle diagonali principali parallele all' asse radicale se è $(d^2 - R^2)^4 = 16R^2r_1^4d^2$.

Finirò col far cenno della memoria del Sig. KLUYVER sulla relazione invariantiva fra due coniche in una delle quali è inscritto un poligono circoscritto all'altra,[15] nella quale l'autore si propose di trovare per via algebrica l'invariante il cui annullarsi trae seco l'esistenza di poligoni di PONCELET per due coniche K_0 e K_1. Per raggiungere tale intento egli stabilisce il concetto di corda d'ordine n della conica K_0; per costruire il secondo estremo P_n di una tale corda avente per primo estremo P_0 si conduce da P_0 una tangente a K_1 la quale incontra nuovamente K_0 in P_1, da P_1 la seconda tangente a K_0 che incontra nuovamente K_0 in P_2, e così via: dopo n tali operazioni si trova P_n. Al variare di P_0 la corda P_0P_n inviluppa

una conica K_n appartenente al fascio determinato dalle due date, i cui coefficienti sono funzioni omogenee di grado n^2 nei coefficienti di K_0 e nei coefficienti di K_1 di grado $\frac{n^2-4}{2}$ o $\frac{n^2-1}{2}$ secondochè n è pari o dispari. Dallo studio delle equazioni delle coniche K_n l'autore trae elementi sufficienti per determinare per via ricorrente l'invariante scopo delle sue investigazioni. Egli termina facendo risultare la parte che può avere questo invariante nelle formole di moltiplicazione della funzione *sen am.*

E giacchè il lavoro del Sig. KLUYVER mi richiama a quello del suo compatriotta VAN DEN BERG[16] di cui io feci un troppo rapido cenno nel mio discorso, mi permetto di aggiungere qui alcune notizie complementari, frutto di una nuova lettura di esso. In tale lavoro si trovano (p. 111—115) le condizioni per l'esistenza di poligoni di un numero di lati non superiore a 32 inscritti in una circonferenza e circostritti ad un'altra; ivi leggonsi poi (p. 164—166) delle formole che porgono le condizioni per poligoni di $2n$, $3n$, ..., kn lati mediante quelle che corrispondono a poligoni con un minor numero di lati. Inoltre (p. 171—174) l'autore riesce a trattare mediante considerazioni geometriche l'analogo problema sferico. Finalmente (p. 178 e seg.) nello stesso lavoro si trova dimostrato in due modi che la relazione fra i rapporti degli assi omologhi di due elissi coassiali che ammettono un poligono di PONCELET è identica alla relazioni analoga che compete a due circonferenze in posizione analoga.[17] Questa identità di forma ha eziandio luogo per due ellissi aventi soltanto il centro comune come lo stesso autore ha rilevato in una memoria che vedrà presto la luce nel Nieuw Archief voor Wiskunde;[18] nella quale si trovano inoltre sviluppate alcune considerazioni schizzate dal Sig. KLUYVER e ove lo studio del caso in cui le radici del discriminante delle due coniche siano razionali riconduce alle funzioni Λ di MOUTARD (cf. l. c. p. 26 e 27, note).

Aggiungerò che nell'ultima delle sue contribuzioni allo studio della rappresentazione geometrica dei numeri complessi[19] il Sig. VAN DEN BERG si è imbattuto in un teorema, il quale appartiene alla teoria che ci occupa e può enunciarsi così: »Se i punti-radici di un' equazione sono vertici di un poligono (ordinario o stellato) inscritto in una conica e circoscritto a un altra, e se i gradi di molteplicità di due qualunque successivi fra queste radici stanno fra loro come i segmenti adiacenti in cui il lato che le congiunge è diviso del suo punto di contatto, allora i punti-radici dell'equazione derivata sono, oltre a quelli originarii con gradi di molte

plicità diminuiti d'un'unità, i fuochi delle coniche che possono inscriversi sia nei lati sia nelle diagonali di uno stesso ordine del poligono; ai quali, nel caso di un poligono regolare, deve aggiungersi il punto di concorso delle diagonali principali.»

Ne potrei concludere meglio che riportando l'enunciato della bella proposizione che lo stesso autore scoperse come generalizzazione di quella testè citata: »I punti-radici della derivata di un'equazione che ha n dati punti-radici con determinati gradi di molteplicità sono, oltre i punti dati, ciascuno con gradi di molteplicità diminuiti di un' unità, gli $n - 1$ fuochi d'una curva di $(n - 1)^{ma}$ classe tangente a ciascuno degli $\frac{n(n-1)}{2}$ lati dell' n-gono completo avente per vertici i punti dati nel punto derivato de'suoi estremi, cioè nel punto che divide quel lato in ragione degli ordini de'suoi estremi.» [20]

[1] Jacobi, *Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.* Journ. für Mathem. **3**, 1828, 376 (*Ges. Werke* B. I (1881), p. 277).

[2] Philosophical Magazine, $\mathbf{5}_4 - \mathbf{7}_4$.

[3] Trudi, *Sui poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni* (Napoli 1841).

[4] Questa memoria è la penultima delle quattro stampate negli anni 1840 e 1841 per risolvere il problema di Cramer, il quale era stato riproposto del Prof. Flauti nel suo *Programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica,* publicato nell'Aprile 1839 e di nuovo nell'Ottobre seguente.

[5] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Napoli **1** (Napoli 1856): Memorie matematiche presentate nel 1853, p. 63—99.

[6] Annali di scienze matematiche e fisiche **8**, 1857, 119—125. — Questa nota si trova tradotta in francese nelle Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, 421.

[7] Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie.* T. I (1865), p. 496.

[8] Giornale di matematiche, **9**, 1871, 341—344.

[9] Giornale di matematiche **10**, 1872, 47—48.

[10] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **2**, 1876, 120—123, oppure *Mathematical Papers by* W. K. Clifford (London 1882), p. 16—19.

[11] Disteli, *Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode* (Leipzig 1888).

[12] SCHUR, *Über eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung*. Mathem. Ann. **20**, 1882, p. 262 e seg.

[13] EBERHARD, *Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung*. Zeitschrift für Mathem. **32**, 1887, 65—82, 129—164.

[14] Lo desumo da due lettere che egli mi scrisse l' 11 e il 27 Giugno 1889.

[15] KLUYVER, *Over de invariante Betrekking tusschen twee kegelsneden in en om denzelfden veelhoek beschreven*. (Nieuw Archief voor Wiskunde, **15**, 1888.) Cfr. anche la nota *Sur un système d'invariants communs à deux coniques* (Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc.; Congr. de 1887).

[16] VAN DEN BERG, *Over zoodanige stelsels van twee cirkels in het platte vlak of op den bol, of ook van twee coaxiale ellipsen in het platte vlak, dat daarin en daarom een zelfde veelhoek past*. Nieuw Archief voor Wiskunde, **14**, 1887, 95—116, 125—192.

[17] P. es. ponendo pei cerchii di equazioni $\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$, $(\xi - d)^2 + \eta^2 = R^2$, $x = \frac{r}{R-d}$, $y = \frac{r}{R+d}$ e per le ellissi di equazioni $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$, $\frac{\xi^2}{a'^2} + \frac{\eta^2}{b'^2} = 1$, $A = \frac{a'}{a}$, $B = \frac{b'}{b}$; alle condizioni $x + y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, necessarie per l'esistenza di triangoli e quadrangoli di PONCELET, nei due cerchii corrispondono per le ellissi le seguenti: $A + B - 1 = 0$, $A^2 + B^2 - 1 = 0$.

[18] Il Sig. VAN DEN BERG ebbe la cortesia di communicarmene un sunto in una lettera del 18 Giugno 1889.

[19] VAN DEN BERG, *Nogmaals over afgeleide Wortelpuncten*. Nieuw Archief voor Wiskunde **15**, 1888, 100—164.

[20] Aggiungo qui la notizia, che non potè trovar posto nel testo, che il Sig. AMESEDER si è occupato di poligoni più generali di quelli che STEINER considerò nelle quartiche piane di genere 1; si vegga la nota *Über Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven* (Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien; Math. Cl. **93**, 1886, 357—379) e la citazione della memoria del Sig. OEKINGHAUS: *Zur Theorie der Schliessungsprobleme* (Arch. der Mathem. $\mathbf{6}_2$, 1887).

Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark.

Von S. A. Christensen und J. L. Heiberg in Kjöbenhavn.

Während die älteren dänischen Beiträge zur Geschichte der Mathematik äusserst wenig sind und ohne besondere Bedeutung, so hat der allgemeine Aufschwung dieser Studien in unserem Jahrhundert auch in Dänemark eine Reihe von Arbeiten hervorgerufen. Unter den Verfassern derselben wird man nur ein paar Mal den Namen eines Mannes finden, dessen Bedeutung für diese Studien bei uns gar nicht nach seinem geringen Antheil an der litterarischen Production bemessen werden darf, und der deshalb an dieser Stelle besonders erwähnt zu werden verdient, Ludvig H. F. Oppermann (geb. 1817, † 1883). Ursprünglich Philolog, besass er eine hervorragende Begabung für Mathematik und hatte namentlich die bedeutenderen griechischen Mathematiker sehr eingehend studirt; bei seiner Zurückgezogenheit — er war etwas von einem Sonderling — und von anderen Studien und Amtspflichten — er war Professor der deutschen Sprache an der Universität — in Anspruch genommen, theilte er aber von seinen Resultaten nur wenig mit, um so mehr, weil sie mit den landläufigen Ansichten über griechische Mathematik wenig in Einklang waren. Er hatte in der That von der Auffassung, die jetzt herrscht oder sich Bahn bricht, vieles vorweggenommen oder wenigstens geahnt. Die Anleitung, welche er mündlich gern ertheilte, wurde daher, als das Studium der griechischen Mathematiker bei uns wieder erwachte, sehr anregend und fruchtbringend. Denn was er sich angeeignet hatte, lag nach Jahren noch immer in musterhafter Ordnung in seinem bewunderungswürdigen Gedächtniss und wurde jetzt mit Lust und Liebe zu Nutzen jüngerer Studiengenossen hervorgeholt.

Auch Ad. Steen (geb. 1816, † 1886), Professor der Mathematik, hatte Interesse für die Geschichte seiner Wissenschaft und brachte gern sowohl in seinen Lehrbüchern als bei seinem Unterricht historische Notizen an. Schon 1876 hielt Prof. Zeuthen eine Vorlesung an der Universität über Geschichte der Mathematik (2 Semester, 2 Stunden wöchentlich), und derselbe hat später mehrmals an der Universität den Studirenden »Anleitung zum Studium classischer mathematischen Werke aus

dem Alterthum und der neueren Zeit» gegeben (1878, 2:tes Semester, 1—2 St. wöch.; 1882, beide Semester, 2 St. wöch.; 1884, 1:stes Semester, 2 St. wöch.). Die Neubelebung des Studiums gab sich auch bei der Umgestaltung der Prüfungen für Gymnasiallehrer 1883 einen Ausdruck, indem bei der Prüfung für angehende Lehrer der Mathematik »ein kurzer Abriss der Geschichte der Mathematik nebst directer Kenntniss der Elemente Euklids und der Geometrie von Descartes» obligatorisch ist. Infolge dessen hat Prof. Zeuthen wiederholt (1885, 2:tes Semester, 1886 1:stes Semester, je 2 Stunden wöchentlich; 1888, 2:tes Semester, 2 St. wöch.) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten.

Erwähnenswerth ist es noch, dass P. La Cour auf der höheren Volksschule (Fortsetzungsschule für Erwachsene) zu Askov den Versuch gemacht hat die Mathematik seinen Schülern, die zum grössten Theil junge Bauernsöhne sind, historisch vorzutragen (vgl. unten bei 1888).

Hier unten folgt jetzt ein Verzeichniss der auf Geschichte der Mathematik bezüglichen Schriften, die in Dänemark erschienen oder von Dänen verfasst sind.

1636.

Torne, E. O., Disquisitiones ex universa Mathesi depositae super Analyticam Vietaeam. Hafniæ 1636. 4°.

1655.

Meibom, M., Dialogus de proportionibus. Hafniæ 1655. Fol.
Enthält viele Bruchstücke griechischer Mathematiker.

1706.

Gram, J., Cogitationum ad loca scriptorum antiquiorum specimen I: de origine geometriae apud Ægyptos. Havniæ 1706. 4°.

1740.

Profe, G., De caussis incrementorum, quae Mathesis recentiori aetate cepit. Oratio in solenni panegyri illustr. Altonani gymnasii. Altonæ et Flensburgi 1740. 4°.

1759.

Horrebow, P., Dissertatio de ortu et progressu geometriae. Hafniæ 1759. 4°.

1771.

Bull, I. R., Dissertatio de cultu matheseos apud Romanos. Hafniæ 1771. 4°.

1774.

Bechmann, N. K., Dissertatio de prima origine scientiae, quae mathesis vocatur. I. Hafniæ 1774. 4°.

1785.

De Numerorum characteribus, quos Arabicos vulgo vocant. Hafniæ 1785. 8°.
Universitätsprogram ohne Namensangabe des Verfassers.

Historia problematum geometr. περι επαφων, de tactionibus, ɔ: de describendo circulo per data puncta transeunte, datasque rectas vel circulos tangentes. Hafniæ 1785. Fol.
Universitätsprogram ohne Namensangabe des Verfassers.

1786.

De inventore logarithmorum. Hafniæ 1786. 8°.
Universitätsprogram ohne Namensangabe des Verfassers.

1792.

Christiani, I. W., Commentatio qua explicantur fundamenta calculi quem ab infinito nominamus et ostenditur quomodo iis quae tradiderunt Euclides, Archimedes, Apollonius Pergaeus innitatur calculus infiniti. Gottingæ 1792. 4°.

1793.

Christiani, I. W., Disputatio inauguralis exhibens supplementa ad commentationem de fundamentis calculi quem ab infinito nominamus anno superiori editam. Kiliæ 1793. 4°.

1819.

Navarrus, J., Tentamen de Archytae Tarentini vita atque operibus. I. Hafniæ 1819. 4°.

1844.

Biering, Historia problematis cubi duplicandi. Hauniæ 1844. 8°.
Plagiat von der bekannten Schrift Reimers: *Historia problematis de cubi duplicatione* (Gottingæ 1798).

Steen, A., og Möller, R., Det Bieringske Plagiat, populært fremstillet, med Herr Bierings egen godhedsfulde Understöttelse. Kjöbenhavn 1844. 8°.
»Das Bieringsche Plagiat, gemeinverständlich dargestellt, mit gütiger Unterstützung des Herrn Biering selbst.»

1860.

Bache, L., Kort Udsigt over Deskriptivgeometriens Historie.
Tidsskrift for Mathematik 1860, 88—93, 129—139. — Kurze Übersicht über die Geschichte der darstellenden Geometrie.

Hinrichs, Om Binomialformlen.
Tidsskr. for Mathem. 1860, 38—42. — Enthält einige Bemerkungen zur Geschichte der Binomialformel.

1861.

Thiele, T. N., Om Logarithmeproblemet.
Tidsskr. for Mathem. 1861, 145—156. — Enthält Notizen zur Geschichte der Logarithmen.

1871.

Oppermann, L., Historisk Gisning.
Tidsskr. for Mathem. 1871, 124—125. — Versuch die Methode zu ermitteln, wodurch ein gewisser Annäherungswerth der Länge einer Sehne gefunden worden ist (vgl. Chasles, *Aperçu historique*, S. 453).

1872.

Zeuthen, H. G., Om Dualitetsprincipet.
Tidsskr. for Mathem. 1872, 145—156. — Über die Geschichte des Dualitätsprincips.

1873.

Steen, A., Det mathematiske Studiums Fremgang i Danmark i dette Aarhundrede.
Tidsskr. for Mathem. 1873, 161—174. — Über die Entwickelung des Studiums der Mathematik in Dänemark im 19ten Jahrhundert.

1875.

Oppermann, L., Om Interpolation som Middel til at lette Beregningen af irrationale Tal.
Kjøbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1875, 18—22. — Enthält Bemerkungen über die von Archimedes angewandte Methode irrationale Quadratwurzeln annähernd zu berechnen.

1876.

Zeuthen, H. G., Fra Mathematikens Historie. I. Brahmaguptas Trapez. II. Euclids Summation af Kvotientrækker. III. Et projektivgeometrisk Bevis hos Apollonius. IV. Pröver paa Diofants Lösning af arithmetiske Opgaver.
Tidsskr. for Mathem. 1876, 168—174, 181—191; 1882, 97—98 til 98—101; 1883, 145—156. — Zur Geschichte der Mathematik. I. Brahmaguptas Trapez. II. Summation geometrischer Reihen bei Euklid. III. Ein projektivisch-geometrischer Beweis bei Apollonius. IV. Beispiele der Lösung arithmetischer Aufgaben bei Diofant.

1877.

Tychsen, C., Lagrange.
Tidsskr. for Mathem. 1877, 129—143.
Übersetzung:
Lagrange. Traduit du danois par H. G. ZEUTHEN.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879), 815—827.

Smith, H. J. St., Om den nuværende Tilstand af og Udsigterne for nogle Grene af den rene Mathematik. [Oversættelse ved H. G. ZEUTHEN.]
Tidsskr. for Mathem. 1877, 65—96. — Übersetzung eines Vortrages *On the present state of some branches of pure Mathematics* (Proceed. of the London mathem. soc. **8**, 1876).

Heiberg, J. L., Arkhimedes.
Kort Udsigt over det philologisk-historiske Samfunds Virksomhed i Aarene 1874—76 (Kjöbenhavn 1877), S. 19—20.

1878.

Heiberg, J. L., Über eine Stelle des Pappus.
Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878; Hist. Abth. 117—120.

1879.

Heiberg, J. L., Quaestiones Archimedeae. Hauniæ 1879.
8°, 208 S. + 1 Taf. — [Recensionen:] Zeitschr. für Mathem. **24**, 1879; Hist. Abth. 168—169. (CANTOR.) — Zeitschr. für mathem. Unterricht **10**, 1879, 363—365. (GÜNTHER.) — Liter. Centralbl. 1879, 1122—1124. (HULTSCH.) — Revue critique **9**, 1880, 32—34. (THUROT.) — Neue Jahrb. für Philol. und Pädag. **121—122**, 1880, 108—112. (H. MENGE.) — Jahresbericht über die Fortschritte der classischen Alterthumswissenschaft **23**, 1880, 227—228. (CURTZE.)

Heiberg, J. L., Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze.
Zeitschr. für Mathem. **24**, 1879; Hist. Abth. 177—182.

Heiberg, J. L., Regne- og Mathematikundervisningen hos Grækerne og Romerne.
Vor Ungdom (Kjöbenhavn) 1879, 238—245, 339—344. — Der mathematische Unterricht bei Griechen und Römern.

Zeuthen, H. G., Nogle Hypotheser om Arkhimedes' Kvadratrodsberegning.
Tidsskr. for Mathem. 1879, 145—155. — Einige Hypothesen über die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. — Hierzu eine Mittheilung von A. STEEN.

Heiberg, J. L., Nogle Puncter af de græske Mathematikeres Terminologie.
Det philol.-hist. Samfunds Mindeskrift (Kjöbenhavn 1879), 1—20. — Zur Terminologie der griechischen Mathematiker. — [Recensionen:] Jahresb. üb. die Fortschr. d. cl. Alterth. **23**, 1880, 228—229. (CURTZE.) — Revue critique **11**, 1881, 45. (GRAUX.)

Hansted, B., Deux pièces peu connues de la correspondance d'Euler. (Lettre d'Erik Pontoppidan à L. Euler et réponse d'Euler.)
Bullet. d. sc. mathém. 3₂. 1879. 26—32.

1880.

Heiberg, J. L., Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte.
Zeitschr. für Mathem. **25**. 1880; Hist. Abth. 41—67.

Heiberg, J. L., Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. I—V.
Neue Jahrb. für Philol.; Suppl. **11**. 1880. 357—398; **12**. 1881. 377—402; **13**. 1884. 543—577. — [Recensionen:] Philolog. Rundschau 1881, 12—15. (Weissenborn.) — Revue critique **11**. 1881. 45—46. (Graux.) — Jahresber. üb. die Fortschr. d. cl. Alterth. **40**. 1884, 11. (Curtze.) — Philolog. Wochenschr. 1881, 384—385; 1882, 74—77. (M. Schmidt.)

Heiberg, J. L., Om Euklid.
Kort Udsigt over det philol.-hist. Samfunds Virksomhed 1878—1880 (Kjöbenhavn 1880). S. 15—17.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Recensuit J. L. Heiberg. I—III. Lipsiae, Teubner 1880—1881.
8°. I (1880): XII + 499 S. — II (1881): VIII + 468 S. + 1 Taf. — III (1881): XCII + 525 S. — [Recensionen:] Revue critique **12**. 1881. 47—49. (Thurot.) — Philolog. Rundschau 1881, 45—48 (Günther); 1882. 1379—1383 (H. Menge). — Philolog. Wochenschr. 1882, 453—457. (M. Schmidt.) — La Cultura **1**. 1882. 35—36. — Zeitschr. für Mathem. **27**. 1882; Hist. Abth. 108—110. (Cantor.) — Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellsch. 1884. 70—76. (A. Wittstein.) — Deutsche Litteraturz. 1882, 6—9. (Eberhard.) — Jahresber. üb. die Fortschr. d. cl. Alterth. **40**. 1884. 23—24. (Curtze.)

1881.

La Cour, P., Historisk Mathematik. Kolding 1881.
8°, 230 S. + 8 Taf. — Vergl. 1888.

1882.

Heiberg, J. L., Litterargeschichtliche Studien über Euklid. Leipzig, Teubner 1882.
8°. IV + 224 S. — [Recensionen:] Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882; Hist. Abth. 100—102. (Cantor.) — Blätter für das bayr. Gymnasialschulw. **19**. 1883. 77—81. (Günther.) — Philolog. Rundschau 1882. 1515—1519. (H. Menge.) — Jahresber. üb. die Fortschr. d. cl. Alterth. **40**. 1884. 17—18. (Curtze.) — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16** (1883). 565—571. (A. Favaro.)

Gram, J. P., Le Triparty de Nicolas Chuquet. En Lærebog i Arithmetik og Algebra fra 1484.
Tidsskr. for Mathem. 1882. 126—138. — Das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von Nicolas Chuquet verfasst im Jahre 1484.

1883.

EUCLIDIS Elementa, edidit J. L. HEIBERG. Vol. I—V. Lipsiae, Teubner 1883—1888.
8°. I (1883): X + 333 S. — II (1884): XXII + 437 S. — III (1886): VI + 417 S. — IV (1885): VI + 423 S. — V (1888): CXIII + 738 S. — [Recensionen:] Philolog. Anzeiger **15**, 1884, 34—37; **17**, 1886, 580—583. (WEISSENBORN.) — Blätter f. bayr. Gymnasialschulw. **24**, 1888, 57—58. (GÜNTHER.) — Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 57; **33**, 1888; Hist. Abth. 189—191. (CANTOR.) — Liter. Centralbl. 1885, 1583; 1887, 61; 1888, 1642. (—Z—R.)

Heiberg, J. L., Die Archimedeshandschrift Georg Vallas.
Philologus **42**, 1883, 421—437.

Heiberg, J. L., L. H. F. Opperman.
Nordisk Tidsskrift for Filologi (Kjöbenhavn) 1883, 248—251. — Necrolog.

Heiberg, J. L., Zum Fragmentum mathematicum Bobiense.
Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883; Hist. Abth. 121—129.

Christensen, S. A., Om den historiske Udvikling af Theorien for Fladers og Rumkurvers Krumning.
Tidsskr. for Mathem. 1883, 97—127. — Über die historische Entwickelung der Theorie der Krümmung von Flächen und Raumkurven.

Gram, J. P., Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann.
Tidsskr. for Mathem. 1883, 137—144. — Necrolog.

1884.

Steen, A., Maximus Planudes' Problemer.
Tidsskr. for Mathem. 1884, 139—146. — Mit Zusätzen von H. G. Z[EUTHEN] S. 146—147.

Thiele, T. N., Arkhimedes og $\sqrt{3}$.
Tidsskr. for Mathem. 1884, 151—154. — Archimedes und $\sqrt{3}$.

Kromann, K., Isaac Newton og hans Betydning for Videnskaben. Kjöbenhavn 1884.
8°, 76 S. + Portr. — ISAAC NEWTON und seine Bedeutung für die Wissenschaft.

Heiberg, J. L., Jahresbericht über griechische und römische Mathematik.
Philologus **43**, 1884, 321—346, 467—522.

Heiberg, J. L., Die arabische Tradition der Elemente Euklids.
Zeitschr. für Mathem. **29**, 1884; Hist. Abth. 1—22. — [Recension:] Revue scientifique **34**, 1884, 625—626.

Heiberg, J. L., Archimedis περὶ ὀχουμένων liber I graece restituit.
Mélanges Graux (Paris 1884), S. 689—709. — [Recension:] Liter. Centralbl. 1884, 856—857.

Heiberg, J. L., Et Falsum vedrörende Archimedes.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1884, 25—30. — Ein Falsum anlangend Archimedes.

1885.

Heiberg, J. L., Ein Palimpsest der Elemente Euklids.
Philologus **44**, 1885, 354—366.

Zeuthen, H. G., Keglesnitslæren i Oldtiden.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Skrifter (Mathem. Afd.) **3**, 1885, 316 + (2) S. — [Recensionen:] Tidsskr. for Mathem. 1886, 44—56. (VALENTINER.) — Nordisk tidskrift (Stockholm) 1885, 623—628. (J. L. HEIBERG.)

Übersetzung:

Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. v. FISCHER-BENZON. Kopenhagen, Höst 1886.
8°, VI + 511 S. — [Recensionen:] Bullet. d. sc. mathém. **10**, 1886, 263—271. (P. TANNERY.) — Liter. Centralbl. 1887, 1303. (G—L)

Zeuthen, H. G., Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen.
Tidsskr. for Mathem. 1885, 175—179. — Einige Bestimmungen des Volumen einer Pyramide.

Christensen, S. A., Et Bevis hos Archimedes.
Tidsskr. for Mathem. 1885, 47—50. — Ein Beweis des Archimedes.

Christensen, S. A, Indförelsen af Regning med Decimalbrök i Danmark.
Tidsskr. for Mathem. 1885, 149—152. — Die Einführung der Decimalrechnung in Dänemark.

La Cour, P., Historisk Undervisning i Mathematik og Fysik.
Verdandi (Stockholm) 1885, 97—106. — Über historischen Unterricht in der Mathematik und Physik.

Zeuthen, H. G., Den pythagoræiske Læresætning.
Tidsskr. for Mathem. 1885, 125—127. — Der Pythagoreische Lehrsatz

1886.

Heiberg, J. L., Nogle Eftervirkninger af græsk Mechanik.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1886, 1—14. — Einige Nachwirkungen griechischer Mechanik.

Zeuthen, H. G., Adolph Steen. (Nekrolog.)
Tidsskr. for Mathem. 1886, 65—70.

1887.

Christensen, S. A., Om Kjendskabet til de regelmæssige Legemer hos Oldtidens Mathematikere.
Maanedsskrift for den elementære Mathematik (Kjöbenhavn) 18 73—75, 81—83. — Über die Kenntnisse von regelmässigen Körpern bei den Mathematikern des Alterthums.

Christensen, S. A., The first determination of the length of a curve
Biblioth. Mathem. 1887, 76—80.

Übersetzung:

Den förste Bestemmelse af en krum Linies Længde.
Tidsskr. for Mathem. 1887, 121—126.

Hjort, V., Hans Carl Fredrik Christian Schiellerup.
Tidsskr. for Mathem. 1887, 148—153. — Necrolog.

Heiberg, J. L., Bidrag til Mathematikens Historie hos Byzantinerne.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1887, 88—96. — Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Byzantinern.

Heiberg, J. L., Der byzantinische Mathematiker Leon.
Biblioth. Mathem. 1887, 33—36.

Heiberg, J. L., Eine alte lateinische Übersetzung von Archimedes.
Opuscula philologica. Mindre Afhandlinger udg. af det philologisk-historiske Samfund (Kjöbenhavn 1887), S. 1—8.

1888.

Nielsen, Gauss.
Meddelelser fra Ordrups Latin- og Realskole 1888, 40—48.

La Cour, P., Historisk Mathematik. Kjöbenhavn, Philipsen 1888.
8°, VIII + 374 + (2) S. + 1 Taf. — Historische Mathematik.

Zeuthen, H. G., Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1888, 127—144. — [Recensionen:] Philol. Rundschau 1888, 394—396. (S. GÜNTHER.) — Jorn. de sc. mathem. **9**, 1889, 16—17. (G. T.)

Heiberg, J. L., Et mathematisk Sted hos Aristoteles.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1888, 1—6. — Eine mathematische Stelle des Aristoteles.

Heiberg, J. L., Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 161—170.

Heiberg, J. L., Om Scholierne til Euclids Elementer.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Skrifter (Hist. og philos. Afd.) **2**$_6$, 1888, 229—304 — Über die Scholien zu den Elementen EUCLID's. — [Recensionen:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 75—76. (CANTOR.) — Revue critique **27**, 1889, 223. (A. JACOB.)

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. Schubert. Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Hamburg 1889. In-8°. 40 p.

Le but de ce petit écrit est de faire une exposition populaire de la nature et de l'histoire du problème indiqué par le titre. L'auteur y a compris non seulement les tentatives de carrer exactement le cercle, mais aussi les méthodes proposées pour trouver approximativement la valeur du nombre π. En premier lieu, il fait connaître en quoi consiste la quadrature du cercle et la différence entre des problèmes résolubles et non résolubles à l'aide de la géométrie élémentaire. Puis il donne une esquisse de l'histoire du problème dont il s'agit; il rend compte successivement des solutions signalées chez les Egyptiens, les Chaldéens et les Grecs, ainsi que chez les Romains, les Hindous, les Chinois et les Arabes. Ensuite il traite sur l'histoire de la quadrature du cercle en Europe avant et après Newton, faisant mention de plusieurs quadrateurs et de différentes méthodes employées pour calculer la valeur de π. Enfin il nous fait connaître les efforts des mathématiciens du 18e et du 19e siècle pour prouver que π est un nombre transcendant, efforts qui ont abouti à la démonstration de ce théorème donnée par Lindemann d'où il suit que le cercle ne peut être carré exactement avec la règle et le compas.

L'exposition de M. Schubert est très bien adaptée au but qu'il s'est proposé; il va sans dire qu'il offre peu de faits nouveaux à celui qui s'est attaché à l'étude de l'histoire des mathématiques. Parmi les erreurs peu nombreuses et peu importantes que nous y avons trouvées, nous ne signalerons que les deux suivantes. Page 9 on lit: »Die Zahl, welche angiebt, wievielmal so gross der Umfang eines Kreises ist als sein Durchmesser, haben seit Archimedes alle Mathematik treibenden Kulturvölker mit π bezeichnet«. Cette indication est peu exacte; en effet le symbole π n'a été employé que vers le milieu du 18e siècle (cf. Biblioth. Mathem. 1889, p. 28). — Pag. 27—28 l'auteur fait mention d'un mathématicien »Peter Metius« qui n'a jamais existé; le nom du savant dont il s'agit, était Adrian Anthonisz, et l'erreur dépend d'une fausse interprétation des mots: *pater meus P. M.* [= piæ memoriæ] dont Adrian Metius s'est servi dans un passage où il parle de son père (¹).

Stockholm. G. Eneström.

(¹) Bierens de Haan, *Bouwstoffen etc.*; Versl. en Meded. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 12₂, 1878, 6—7.

G. J. Allman. GREEK GEOMETRY FROM THALES TO EUCLID. Dublin 1889. 8°, XII + 237 S. + 1 Pl.

Der Verfasser hatte in der in Dublin erscheinenden Zeitschrift Hermathena zuerst im Jahre 1877 * mit der Veröffentlichung seiner *Greek Geometry from Thales to Euclid* begonnen und bis zum Juli 1887 in fünf weiteren Abschnitten das Werk zu Ende geführt. Da indes von vielen Seiten der Wunsch geäussert worden war, dass die in vier Bänden der genannten Zeitschrift verstreuten und ausserhalb Englands schwer zugänglichen Einzelabschnitte als selbständiges Werk herausgegeben würden, so hat der Verfasser die hier vorliegende Buchausgabe veranstaltet. Da seine Untersuchungen schon zur Zeit der ersten Veröffentlichung vollständig abgerundet waren, so hat er in der Hauptsache auf einen Wiederabdruck dieser Abschnitte sich beschränkt, nicht jedoch ohne im einzelnen hier und dort die bessernde Hand anzulegen.

Der Titel des Werkes fordert unwillkürlich zu einem Vergleich mit dem im Jahre 1870 erschienenen Werke BRETSCHNEIDER's: *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* heraus. BRETSCHNEIDER bezeichnete sein auf 184 Seiten beschränktes Buch als einen historischen Versuch, und zwar musste er das meiste unmittelbar aus den griechischen Quellen herausarbeiten, da nur wenige vorbereitende Einzeluntersuchungen ihm zu Gebote standen. Wie vieles hat sich seit der kurzen Zeit von noch nicht zwanzig Jahren geändert! Die damals noch unedierten Texte des PAPPOS und AUTOLYKOS sind allgemein zugänglich geworden, die Elemente des EUKLID und die Werke des ARCHIMEDES liegen in zuverlässigen Ausgaben vor, die Geschichte der alten Mathematik hat im Jahre 1880 durch CANTOR eine vorzügliche Bearbeitung gefunden, endlich eine Reihe der wichtigsten Einzelfragen ist von TANNERY, HEIBERG, HANKEL, GÜNTHER, WEISSENBORN, HEATH, ZEUTHEN und anderen behandelt worden.

Schon dadurch, dass Herr ALLMANN diese ganze Litteratur, soweit sie bei der Bearbeitung jedes einzelnen Abschnittes ihm vorlag, sorgfältig benutzte, gewann er für seine *Greek Geometry*

---

* Diese Jahreszahl trägt der in meinen Händen befindliche Sonderabdruck aus Hermathena Vol. III, N° V. Auch M. CURTZE in seinem *Jahresbericht über die exakten Wissenschaften im Alterthum von Anfang 1878 bis Michaëli 1879* (Jahresbericht über die Fortschritte der classischen Alterthumswissenschaft **23**, 1880, S. 219) registriert den Abschnitt als im J. 1877 erschienen. Jedoch ist das betreffende Heft von Hermathena erst im Februar 1878 ausgegeben worden (siehe ALLMAN, *Greek Geometry* p. 224).

einen breiteren Boden und eine freiere Umschau als sein Vorgänger BRETSCHNEIDER. Aber nicht minder ist anzuerkennen, dass er durch eigene Kritik und vorsichtiges Abwägen der oft recht unsicheren Überlieferung mehrere schwebende Fragen selbständig gefördert hat. Über den ersten im Jahre 1877 erschienenen Abschnitt hat CURTZE in dem bereits erwähnten Jahresbericht über die exakten Wissenschaften in durchaus günstigem Sinne sich geäussert. Er hebt hervor, dass mit grossem Scharfsinn die über THALES und PYTHAGORAS erhaltenen Notizen gesammelt sind und ein Bild der Verdienste derselben um die Mathematik ins Licht gestellt ist. Wenn auch dem Verfasser nicht in allen Einzelheiten, besonders betreffs der Pythagoreer, beigestimmt werden könne, so sei doch die Arbeit ein höchst beachtenswerter Beitrag zur Geschichte der Mathematik in Griechenland.

Seitdem wir einerseits die Aufzeichnungen altägyptischer Geometer, aus denen die Anfänge der griechischen Mathematik sich entwickelten, genauer kennen, andererseits die Quellenkunde für die ganze Epoche von THALES bis EUKLID immer reichhaltiger und zuverlässiger sich gestaltet hat, erhalten die Namen eines HIPPOKRATES, DEMOKRIT, EUDOXOS eine früher nicht geahnte Bedeutung und auch die Verdienste eines THALES, PYTHAGORAS, ARISTÄOS und so vieler anderen, denen es schon früher an Anerkennung nicht fehlte, treten nun um so glänzender hervor.

Der gesammte Stoff ist auf 9 Kapitel verteilt, über welche wir nun der Reihe nach kurzen Bericht erstatten, hin und wieder eigene Bemerkungen anknüpfend.

THALES ist Schüler der ägyptischen Priester gewesen. Von ihnen hatte er die Sätze kennen gelernt, welche man aus verschiedenen geometrischen Figuren durch wiederholte Beobachtungen und Messungen abgeleitet hatte. Aus dieser rein praktischen Geometrie entwickelte er zuerst eine Theorie der Linien, fand die Grundzüge der Lehre von den Winkeln im Dreieck und verwendete dieselben zu Distanzmessungen. Auch lässt sich nachweisen, dass er zuerst eine Gleichung im eigentlichen Sinne des Wortes sowie eine Proportion aufgestellt hat. Dies und mehreres andere schreibt ALLMAN (p. 7—15) seinem THALES zu, und mag auch, wie CANTOR und TANNERY bemerken (vgl. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I, S. 119 ff.; TANNERY, *Thalès de Milet, ce qu'il a emprunté à l'Egypte*, Revue philosophique 1880; HEIBERG, *Jahresbericht* etc., Philologus **43**, S. 330 ff.), das Gebiet seiner Erfindungen einigermassen zu beschränken sein, so wird ihm doch niemand den Ruhm streitig

machen, die Geometrie über das lediglich auf die Praxis gerichtete Formelwesen der Ägypter erhoben und eine wissenschaftliche Behandlung derselben vorbereitet zu haben.

Auch dem PYTHAGORAS wird vom Verfasser vielleicht mehr zugeschrieben als er in der That aufgefunden hat. Indes wird sich, gemäss dem Zustande der Tradition, in dieser Hinsicht wohl nie eine sichere Entscheidung treffen lassen. Vielleicht geht der Verfasser zu weit, wenn er (p. 47) den Hauptinhalt des I. und II. Buches und wesentliche Teile des IV. und VI. Buches der Euclidischen Elemente etwa in derselben Weise als Pythagoreisch bezeichnet, wie man allgemein von dem Pythagoreischen Lehrsatz spricht. Die grundlegenden Gedanken mag zuerst PYTHAGORAS ausgesprochen haben, ja man darf vielleicht auch zugeben, dass die jetzt uns vorliegende Fassung einiger Lehrsätze bereits von ihm herrührt; allein die systematische Zusammenstellung der Sätze, die geschlossene und von Stufe zu Stufe vorschreitende Beweisführung, kurz die Schöpfung der Elemente als eines mustergültigen Lehrbuches, das ist zu einem kleinen Teile das Verdienst des EUKLID; den grösseren Teil der Arbeit aber haben vor ihm mehrere andere Mathematiker gethan, deren Namen wir nur vermuten können, die jedoch sicher jünger als PYTHAGORAS waren. Wenn man ferner diesen Abschnitt des ALLMAN'schen Werkes mit den zwar später erschienenen, aber unabhängig von ALLMAN verfassten Kapiteln VI und VII der Vorlesungen CANTOR's über Geschichte der Mathematik vergleicht, so wird man die Übereinstimmung beider Gelehrten gern als einen Beweis für die Richtigkeit des Gefundenen gelten lassen; wo aber Meinungsverschiedenheit sich herausstellt, da wird eine wiederholte Prüfung aller Beweisgründe voraussichtlich dahin führen, dass des PYTHAGORAS Geometrie nach Form und Inhalt sehr weit von der bei EUKLID uns erhaltenen Überlieferung entfernt war. Die ganze Pythagoreische Zahlenspeculation war etwas der strengen Geometrie fremdartiges, und gerade seinen Zahlen räumte PYTHAGORAS einen möglichst weiten Spielraum auch für geometrische Verhältnisse ein. Das konnte in sachgemässer Weise geschehen, wie z. B. nach CANTOR's Ansicht der Satz Elem. I, 47 aus der Beobachtung der Zahlengleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ entstanden ist; es lag aber auch die Gefahr einer nicht sachgemässen Übertragung nahe, wie solche sicher von den Schülern des PYTHAGORAS geübt und später von den Neuplatonikern zu einem wissenschaftlich unhaltbaren Systeme weitergebildet worden ist. Dazu kommt das Dogmenwesen in der Pythagoreischen Secte, der blinde Autoritätsglaube, der von den Schülern

gefordert wurde. Das alles steht mit dem Wesen derjenigen Geometrie, die in den Lehrbüchern des EUKLID, AUTOLYKOS und THEODOSIOS uns überliefert ist, in offenbarem Widerspruche. Mit einem Worte, die griechischen Elemente der Mathematik, welche wir als mustergültig nach Form und Inhalt bewundern, mögen dem Genius des PYTHAGORAS viel zu danken haben, allein von den Abwegen, auf welche die Eigenart seiner Anschauungen notwendig führen musste, haben sie sich losgemacht, und ihre Verfasser haben damit ein grosses Verdienst um alle folgenden Geschlechter sich erworben.

Bei seinen Untersuchungen über HIPPOKRATES von Chios hat der Verfasser es unternommen, den Gang der Beweisführung annähernd wieder herzustellen, dessen jener Mathematiker des 5. Jahrhunderts sich bedient haben mag, um das Problem der Quadratur des Zirkels zu lösen. Er legt nämlich den von BRETSCHNEIDER zuerst zugänglich gemachten Bericht des SIMPLIKIOS über des EUDEMOS Bemerkungen zum *κύκλου τετραγωνισμός* des HIPPOKRATES zu Grunde, scheidet aber dabei alles aus, was er für Zusatz des SIMPLIKIOS hält, insbesondere alle Verweise auf Euklidische Sätze, welche bei HIPPOKRATES sich nicht gefunden haben können. (Anlangend die weiteren Untersuchungen, welche von TANNERY, DIELS, USENER und HEIBERG an die oben erwähnte Stelle geknüpft worden sind, ist auf HEIBERG, *Jahresbericht über griechische und römische Mathematik*, Philologus **43**, S. 337 ff. zu verweisen.) Wenn hiernach der ursprüngliche Bericht des EUDEMOS annähernd wieder hergestellt ist, so sind wir auch im Stande zurückzuschliessen auf jene Form der Beweisführung, welche HIPPOKRATES selbst vermutlich angewendet hat. Kurz, Herr ALLMAN findet in dem Berichte des EUDEMOS eine Überlieferung, welche als »das älteste Fragment griechischer Geometrie» gelten darf, und entwickelt hiernach (p. 75—77) eine Übersicht derjenigen Theoreme und Probleme, welche dem HIPPOKRATES für seine Quadratur des Zirkels als bereits erwiesen vorgelegen haben müssen. Anknüpfend hieran wird es ferner gestattet sein, diese Sätze mit dem von HIPPOKRATES verfassten Lehrbuche der Elemente (EUDEMOS bei PROCLUS *in I Euclidis element. librum, ed.* FRIEDLEIN, p. 66, 7: *πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν*) in unmittelbare Verbindung zu bringen: sie müssen wenigstens zum guten Theile in diesem Lehrbuche vorhanden gewesen sein. Ausserdem sind wir im Stande, rückwärts schreitend die Sätze zu ermitteln, welche wiederum die Voraussetzung bildeten für die vorhin bezeichneten Hippokratischen Theoreme und Probleme, und so

wird sich eine stattliche Reihe von Propositionen zusammenstellen lassen, welche wir jetzt nur nach der Euklidischen Fassung citieren können, die aber, wenn auch in etwas anderer Form, bereits dem HIPPOKRATES bekannt gewesen sind und voraussichtlich auch in seinem Lehrbuche sich vorgefunden haben. Endlich, dass auch die Beweisführung dieser Sätze in ähnlicher Weise verlief, wie EUKLID sie überliefert hat, schliesst CANTOR (l. c., S. 176 f.) mit grosser Wahrscheinlichkeit. Der unterzeichnete Berichterstatter hat in seinem Aufsatze »*Autolykos und Euklid*« (Berichte der philol.-histor. Classe der Sächsischen Gesellsch. der Wissensch. 1886, S. 128 ff.) nach dem Vorgange von NOKK und HEIBERG ein Lehrbuch der Sphärik nachgewiesen, welches im 4. Jahrhundert v. Chr. bekannt gewesen und von AUTOLYKOS und EUKLID benutzt worden ist. Dabei stellte sich zugleich heraus, dass eine beträchtliche Anzahl von Elementarsätzen, die wir gegenwärtig nur aus der Redaction des im 3. Jahrhundert blühenden EUKLID kennen, etwa um ein Jahrhundert früher, und zwar im wesentlichen bereits in der durch EUKLID überlieferten Fassung, schon vorhanden und wahrscheinlich auch in einem Lehrbuche zusammengefasst waren. Eine Reihe anderer Sätze ist von HEIBERG (*Et mathematisk Sted hos Aristoteles*, Overs. over d. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1888), im Anschluss an eine Stelle des ARISTOTELES als voreuklidisch nachgewiesen worden. Ausserdem ist hinzuweisen auf HEIBERG's *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig 1882), S. 33—36, so wie auf verschiedene Einzelbemerkungen welche TANNERY in seinen zahlreichen Essais bietet und die noch einer systematischen Zusammenstellung bedürfen. Genug, wir haben es hier mit einer noch offenen Frage zu thun, deren Lösung aber man sich nach und nach nähern wird. Vor der Hand ist es wohl schon ein Gewinn, wenn das Problem als solches formuliert wird, nämlich die voreuklidischen Elemente soweit als möglich wiederherzustellen und insbesondere alle Wahrscheinlichkeitsgründe dafür zu sammeln, dass die als voreuklidisch nachgewiesenen Sätze bereits in jener früheren Zeit hauptsächlich nach derselben Methode und wohl auch in ähnlicher Form bewiesen worden sind, wie die Überlieferung bei EUKLID lautet.

Dass der Verfasser die Stellung des DEMOKRIT in der Geschichte der Mathematik trefflich beurteilt, hat der Unterzeichnete bereits an anderer Stelle hervorgehoben (vgl. die Recension von CANTOR's *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in den Jahrbüchern für class. Philologie 1881, S. 578 f.). Wieder-

holt sei hier der Hinweis auf den bedeutsamen Fortschritt, den Herr ALLMAN darin sieht, dass DEMOKRIT die Pythagoreische Methode der Vergleichung geradliniger Figuren weiter führte zur Kombination von Kurven (γραμμῶν σύνθεσις), dass er der Theorie des Kreises besondere Aufmerksamkeit zuwendete und dabei wahrscheinlich das Grundprincip der Infinitesimalrechnung entdeckte, endlich dass er zuerst die Kegelschnitte in den Kreis seiner Betrachtungen zog und die Vergleichung des Kegels mit dem Cylinder vorbereitete.

Des ARCHYTAS Hauptverdienst war die Lösung des Problems, zwischen zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionalen zu konstruieren. Diese Lösung war nur möglich auf Grund eines bereits entwickelten geometrischen Wissens und Könnens. Die Methode der Lösung zeigt uns zugleich, dass ARCHYTAS eine richtige Vorstellung von geometrischen Örtern und deren Anwendung auf Bestimmung eines Punktes mittelst der Intersection hatte. Doch scheint er τόπος als Bezeichnung eines geometrischen Ortes noch nicht gebraucht zu haben.

In der Person des EUDOXOS tritt uns ein Gelehrter entgegen, der in seiner Behandlung der Mathematik und Astronomie zuerst das anbahnte, was wir als systematische Wissenschaft bezeichnen. Das hat Herr ALLMAN mit Recht hervorgehoben; doch kann Referent den Wunsch nicht unterdrücken, dass eine Gesamtdarstellung der Leistungen des EUDOXOS streng vom litterar-historischen Standpunkt aus versucht werden möge. Das ist ja für jeden alten Schriftsteller, dessen wissenschaftliche Thätigkeit nur aus Überlieferungen von zweiter, dritter oder noch späterer Hand beurteilt werden kann, wünschenswert; aber bei den meisten griechischen Mathematikern würde jeder Versuch vergeblich sein. Indes EUDOXOS scheint mir der Zeitfolge nach der erste zu sein, betreffs dessen ein solcher Versuch nicht aussichtslos, ja vermutlich sehr lohnend sein würde. Wenn wir auch die so zu schaffende Übersicht nicht »Fragmenta Eudoxi» oder ähnlich betiteln dürften (denn dazu reicht das Mass der Überlieferung nicht aus), so würden wir doch, immer unter Erwägung der verschiedenen Grade der Wahrscheinlichkeit, ein System der Lehre des EUDOXOS zusammenstellen und ziemlich ergiebig durch litterarische Nachweise ausfüllen können. Anzufangen wäre mit den Elementen. Das ganze fünfte Buch des EUKLID ist nach zuverlässiger Überlieferung dem EUDOXOS zuzuschreiben, und auch andere wesentliche Teile von EUKLID's Werk lassen sich auf denselben zurückführen. Dann würde etwa zu fragen sein, was aus des AUTOLYKOS und THEODOSIOS

Werken, vielleicht auch aus ARCHIMEDES und PAPPOS als beeinflusst von EUDOXOS sich zusammenstellen lässt; endlich würden die astronomischen Leistungen für sich zu behandeln sein. In letzterer Hinsicht ist in dem vorliegenden Werke die Bezugnahme auf die Forschungen HENRI MARTIN's zu vermissen. Der Unterzeichnete hat darüber in dem Jahresbericht über die Fortschritte der classischen Alterthumswissenschaft **40**, 1884, S. 50ª ff. Bericht erstattet und es versucht die Stellung des EUDOXOS zur Entwickelung der mathematischen Astronomie kurz zu charakterisieren. Ausserdem ist hier hinzuweisen auf H. KÜNSSBERG: *Eudoxos von Knidos. I Theil: Lebensbeschreibung des Eudoxos, Überblick über seine astronomische Lehre* etc., (Programm der Realschule Dinkelsbühl 1888).

MENÄCHMOS wurde durch das alte Problem der Verdoppelung des Würfels auf den Versuch, die Kegelschnitte wissenschaftlich darzustellen, hingeführt. Der Verfasser des vorliegenden Werkes steht hier in allen wesentlichen Punkten im Einklange mit BRETSCHNEIDER und CANTOR. Die bei den Alten erhaltenen Nachrichten über Sätze des MENÄCHMOS werden einer ausführlichen Besprechung unterzogen.

Der früher in Hermathena Vol. VI N° XII erschienene Abschnitt über DEINOSTRATOS und ARISTÄOS ist von mir bereits in der Berliner Philologischen Wochenschrift 1887, S. 246 f., besprochen worden. Die Überlieferung über beide Mathematiker ist hauptsächlich in dem Sammelwerke des PAPPOS erhalten. Die betreffenden Stellen werden von dem Verfasser übersetzt und besprochen. Im Anchluss an TANNERY vermutet der Verfasser, dass in dem Berichte des PAPPOS über DEINOSTRATOS wichtige Reste der Geschichte der Geometrie von EUDEMOS enthalten sind, möge nun PAPPOS unmittelbar aus dem damals vielleicht noch vorhandenen Werke der EUDEMOS oder aus dessen Überarbeitung durch SPOROS geschöpft haben. Wie der Satz von den Quadraten über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks schlechthin nach PYTHAGORAS benannt wird, so ist eine bekannte Kurve, die Quadratrix, nach aller Überlieferung unzertrennlich mit DEINOSTRATOS verbunden. Anknüpfend an den Aufsatz TANNERY's *Sur les solutions du problème de Delos par Archytas et par Eudoxe* (Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux **2**, 1878) tritt der Verfasser in eine längere Untersuchung über die Geschichte der Quadratrix ein und schliesst mit dem Endergebnis, dass dieselbe, wie CANTOR mit Recht annehme, von HIPPIAS von Elis behufs der Dreiteilung des Winkels erfunden, ihre

[redacted]

Anwendung aber auf die Quadratur des Kreises von DEINOSTRATOS, und zwar als Ergänzung zur Geometrie des EUDOXOS hinzugefügt worden sei.

Dem ARISTÄOS schreibt der Verfasser ausser den fünf Büchern über die *τόποι στερεοί* und einer Schrift über die Vergleichung der fünf regulären Polyeder noch fünf Bücher Elemente der Kegelschnitte zu. Ich habe die letztere Annahme in der oben angeführten Recension bezweifelt.

Das letzte Kapitel ist dem THEÄTETOS gewidmet. Die über ihn erhaltenen Nachrichten werden übersichtlich zusammengestellt und dann die viel umstrittene Stelle über *μῆκος* und *δύναμις* in PLATON's *Theätet* besonders behandelt. Der Verfasser kommt dabei nochmals auf die Frage der Quellen von EUKLID's Elementen (p. 211 f.). Hatte er vorher den Hauptinhalt von Buch I und II und wesentliche Teile von Buch IV und VI auf PYTHAGORAS zurückgeführt, so äussert er sich nun weiter über die Quellen der übrigen Bücher mit Ausnahme von III, VII, VIII und IX. Dem EUDOXOS schreibt er zu Buch V und damit zusammenhängend die Umarbeitung von Buch VI, sowie die Behandlung der Exhaustionsmethode in Buch XII. Buch XI gehöre einem unbekannten älteren Verfasser an. Die Grundlage zu Buch X habe THEÄTETOS gelegt; aber in der Hauptsache sei dasselbe Originalarbeit des EUKLID. Endlich Buch XIII beruhe zum Teil auf einem Werke des ARISTÄOS, sei aber von THEÄTETOS zu der auf uns gekommenen Form umgearbeitet worden. Neuerdings hat Herr TANNERY (in seiner *Géométrie grecque*, 1887, p. 95—107) über diese Frage, welche er früher an mehreren Stellen gelegentlich berührt hatte, im Zusammenhang sich geäussert; zur weiteren Förderung derselben würde zunächst eine übersichtliche chronologische Zusammenstellung, geordnet nach den einzelnen Büchern EUKLID's, erwünscht sein.

Auch anlangend den EUDEMOS, der als Verfasser einer Geschichte der Geometrie häufig von Herrn ALLMAN erwähnt worden ist, fehlt es noch an einer zusammenhängenden Darstellung.

Zu bemerken ist schliesslich, dass PLATON und ARISTOTELES in dem vorliegenden Werke nicht behandelt sind, gewiss aus dem Grunde, weil beide Philosophen nur gelegentlich auf mathematische Dinge gekommen sind. Doch widmet PLATON einigen Fragen eine so eingehende Berücksichtigung, dass man seinen Namen ungern in einer Geschichte der Geometrie vermisst.

Dresden-Striesen. FRIEDRICH HULTSCH.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von ‖ journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1889 : 2.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобыининымъ. Москва. 8°.
1889 : 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
34 (1889): 3—4.

°**Anton, L.**, Geschichte des isoperimetrischen Problems von Bernoulli bis Lagrange. Dresden 1888.
8°. — [2 M.]

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи развитія математическихъ наукъ на западѣ. Періодъ усвоенія арабской науки. II.
Fiziko-matem. naouki 1889, 1—27. — BOBYNIN, V. V., Esquisses historiques du développement des sciences mathématiques dans l'occident. Période de l'appropriation de la science arabe. II. Traductions latines des ouvrages de mathématiciens arabes.

Christensen, S. A., Om Kjendskabet til de regelmæssige Legemer hos Oldtidens Mathematikere.
Maanedsskrift for den elementære Mathematik (Kjöbenhavn) 1887, 73—75, 81—83.

Curtze, M., Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV. Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift Db. 86. der königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden herausgegeben. Thorn 1887.
8°, (2) + XV + 50 p. + 5 pl. — Publié dans les Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn **6**, imprimé en 1887 mais paru seulement en 1889. — [Analyse:] Liter. Centralbl. 1889, 1148. (—Z—R.)

Dickstein, S., Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne.
Biblioth. Mathem. 1889, 43—51.

Favaro, A., Supplemento al Carteggio di Ticone Brahe con G. A. Magini nell' archivio Malvezzi de' Medici in Bologna.
[Atti e memorie della r. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna 7_3, 1889. 12 p.

Favaro, A., Ticone Brahe e la corte di Toscana.
| Archivio storico italiano **3_5**, 1889. 16 p.

G[uccia], G. B., Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen.
Palermo, Circolo matematico, Rendiconti **3**, 1889, 210—222. — Avec une petite notice biographique.

°**Günther, S.**, Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus.
Geographische Abhandlungen, herausg. v. A. Penck (Wien) **3**:2, 1888. 71 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 105—106. (Cantor.)

Heiberg, J. L., Om Scholierne til Euklids Elementer.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Skrifter (Hist. Afd.) **2_6**, 1888, 227—304. — Avec un résumé en français. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 75—76. (Cantor.) — Revue critique **27**, 1889, 223. (A. Jacob.)

Heiberg, J. L., Et mathematisk Sted hos Aristoteles.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1888, 1—6.

Hermite, Ch., Discours prononcé aux funérailles de M. Halphen.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **108**, 1889, 1079—1081.

Hultsch, F., Ein Beitrag zur Kenntnis des Volkstümlichen Rechnens bei den Römern.
| Jahrbücher für Philologie **139—140**, 1889, 335—343.

Kronecker, L., Paul du Bois Reymond.
Journ. für Mathem. **104**, 1889, 352—354. — Nécrologie.

Loria, G., L'opera scientifica di Ettore Caporali.
Giorn. di matem. **27**, 1889, 1—32. — [Analyse:] Jorn. de sc. mathem. **9**, 1889, 57. (G. T.)

°**Napier, J.**, The construction of the wonderful canons of logarithms. Translated by W. R. Macdonald. Edinburgh, Blackwood 1889.
8°. — Le traducteur a ajouté des notes explicatives et une liste des ouvrages de Neper. — [Analyse:] The Scots observer (Edinburgh) 1889, 532.

°**Rebière, A.**, Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Paris, Nony 1889.
8°, 282 p. — [3.50 fr.] — [Analyse:] Jorn. de sc. mathem. **9**, 1889, 56. (G. T.) — Mathesis **9**, 1889, 159—160. (P. M.)

°**Reiff, R.**, Die Anfänge der Variationsrechnung.
Mathem.-naturwiss. Mittheilungen (Tübingen) **2**, 1887, 90—98.

Reiff, R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp 1889.
8°, VI + 212 p. — [5 M.]

Riccardi, P., Di alcune opere di Prospettiva di autori Italiani ommesse nella »Histoire de la Perspective» di M. Poudra.
Biblioth. Mathem. 1889, 39—42.

Staigmüller, H., Lucas Paciulo. Eine biographische Skizze.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 81—102, 121—128.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1889, 35—38.

Une discussion sur la ligne droite; par FOURIER et MONGE.
Mathesis **9**, 1889, 139—141. — Extrait des Séances de l'école normale **1** (1795).

Wolf, R., Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts.
Biblioth. Mathem. 1889, 33—34.

Anfragen. — Questions. 25 [sur un compendium de l'histoire des mathématiques]. 26 [sur un traité d'arithmétique publié en 1613].
Biblioth. Mathem. 1889, 64. (ISTITUTO VENETO DELLE SCIENCE, LETTERE ED ARTI; G. ENESTRÖM.)

Réponse à la question 24.
Biblioth. Mathem. 1889, 64. (P. MANSION.)

ALLMAN, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin, Hodges 1889. 8°.
Nature (London) **40**, 1889, 172. (R. T.) — The Academy 1889, 380—381. (J. S. MACKAY.) — The Scots observer (Edinburgh) 1889, 531—532. — The Dublin evening mail 1889, Febr. 27. — The Scotsman (Edinburgh) 1889, Febr. 25.

BALL, W. W. R., A short account of the history of mathematics. London, Macmillan 1888. 8°.
Biblioth. Mathem. 1889, 56—58. (G. LORIA.) — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 103—105. (CANTOR.)

LORIA, G., Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins deutsche übertragen von F. SCHÜTTE. Mit einem Vorworte von R. STURM. Leipzig, Teubner 1888. 8°.
Liter. Centralbl. 1888, 1578. (—z—r.) — Deutsche Literaturz. **10**, 1889, 396. (M. CURTZE.) — Biblioth. Mathem. 1889, 54—55. (S. DICKSTEIN.) — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1888; Hist. Abth. 105. (CANTOR.)

LORIA, G., Przeszlosc i stan obecny najwazniejszych teoryj geometrycznych. Przeklad uzupelniony licznemi dodatkami, wydany za upowaznieniem autora przez S. DICKSTEINA. Warszawa 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1889, 54—55. (S. DICKSTEIN.)

MARIE, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome XII: D'Arago à Abel et aux géomètres contemporains. Paris, Gauthier-Villars 1888. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 191—192. (CANTOR.) — Beiblätter zu den Ann. d. Phys. **12**, 1888, 409—410. (E. W.)

SCHUMANN, E., Professor Dr. Joh. Friedr. Wilh. Gronau. Sein Leben und seine Verdienste um die Wissenschaft. Beilage zum Programm des Realgymnasiums zu St. Johann. Danzig 1888. 4°.
Zeitschr. für Mathem. 33, 1888; Hist. Abth. 192. (CANTOR.)

ZWERGER, M., Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet. München, Lindauer 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1889, 52—54. (S. GÜNTHER.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1888. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. 34, 1889; Hist. Abth. 109—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1889, 59—63. — Fiziko-matem. naouki 1889, 72—88. — Zeitschr. für Mathem. 34, 1889; Hist. Abth. 107—108, 158—160.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

27. Dans le *Grand dictionnaire universel* de P. LAROUSSE, T. XIII (1875), p. 483, on trouve la notice que le problème de la quadrature du cercle était tellement célèbre au seizième siècle que CHARLES QUINT promit cent mille écus à celui qui carrerait le cercle, et que les Etats hollandais offrirent aussi une somme considérable à celui qui obtiendrait un tel résultat.

Y a-t-il pour la première partie de cette notice quelque autre source que la fausse lettre de CHARLES QUINT à RABELAIS communiquée à QUETELET pas CHASLES et publiée par celui-la dans l'Annuaire de l'observatoire de Bruxelles pour 1867, p. 204? Et quelle est la source originale de la seconde partie de la notice? (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1889.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1889. STOCKHOLM. № 4.

NEUE FOLGE. 3. — NOUVELLE SÉRIE. 3.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Französische Strasse 38/39.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen.

Von ELLING HOLST in Christiania.

Aus vielen Gründen ist es vonvornherein nicht zu erwarten in der norwegischen Litteratur mehr als sehr sparsame Beiträge zur Geschichte der Mathematik finden zu können.

Bis 1811, da die Universität in Christiania errichtet wurde, war die academische Ausbildung an Kopenhagen geknüpft. Die seltenen und zerstreuten gelehrten Bestrebungen in Norwegen hatten erst von 1760 an einen Mittelpunkt im Lande selbst gefunden, indem GUNNERUS, SCHÖNNING und SUHM in Drontheim eine zunächst private wissenschaftliche Gesellschaft stifteten, aus welcher 1767 durch specielle Confirmation von Christian VII. »Det kongelige norske Videnskabers Selskab» (zu Drontheim) entstand.

Beinahe um ein Jahrhundert jünger ist »Videnskabsselskabet» zu Christiania (gestiftet 1858).

Schon in den Schriften der Drontheimschen Gesellschaft kommen mathematische Arbeiten vor, namentlig von F. C. H. ARENTZ (1736—1825), Rector in Bergen, die nicht ohne Werth sind und jedenfalls als Culturbilder Interesse haben. Bei der neuen Universität zeigt die Erscheinung ABELS (1802—29), dass man schon bald an der tiefsten Arbeit der gegenwärtigen Zeit theilnehmen konnte. Die Namen BROCH, BJERKNES, SYLOW und LIE bestätigen dasselbe, was neuere Zeiten betrifft.

Als eine noch heute vergleichungsweise sehr junge Institution kann indessen unsere Universität dem Studium der Geschichte der Mathematik nur sehr dürftige Bedingungen darbieten. Die unten zu nennenden Schriften und Noten bezeugen auch völlig, dass die norwegischen Beiträge zur mathematisch-historischen Forschung zum grössten Theil einen zufälligen oder localen Character haben. Die biographischen Artikel treten ziemlich hervor, und von diesen wieder diejenigen, welche ABEL behandeln. Von den zahlreichen ABEL-Biographien sind hier nur solche mitgenommen, welche für ihre Zeit neue wesentliche Beiträge enthalten haben. Der Hauptbiograph ABELS ist bekanntlich C. A. BJERKNES.

In dieser Verbindung muss *Norsk Forfatterlexikon* (Norwegisches Verfasser-Lexicon) von I. B. HALVORSEN erwähnt werden. Die zwei bisher erschienenen Bände (A—H incl.) haben vorzügliche Dienste bei der Ausarbeitung der gegenwärtigen Notiz geleistet.

Unter den norwegischen Beiträgen ist eine kleine Gruppe von speciellem Interesse, nämlich die, welche die seltenen nachgelassenen Bruchstücke mathematischen Inhalts der »norrönen« (altnordischen) Literatur behandeln. Die Ehre, diese ans Licht gebracht zu haben, gebührt Philologen der norwegisch-historischen Schule namentlich P. A. MUNCH (1810—63).

Was Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik betrifft, hat O. J. BROCH (1818—89) schon 1852 solche angefangen. Wenn man seine Vorlesungsberichte (veröffentlicht in den *Universitets- og Skoleannaler*, Christiania) durchgeht, scheint es als ob er den Plan gehabt hätte, im Laufe von 5—6 Jahren eine Reihe von Gegenständen nach und nach zu behandeln, welche ausser den ordinären Vorlesungen fielen, und unter diesen auch die Geschichte der Mathematik. In der That hat er eine solche Reihe, die fast alle damals bearbeiteten Felder der Mathematik berührte, zweimal durchgemacht, und er scheint nur von seiner mancherlei staatsbürgerlichen Thätigkeit gehindert worden zu sein, diese Vorlesungsreihe ungeändert festzuhalten. Er lies im 2ten Sem. 1852 (1 St. w.) und im 1sten Sem. 1853 (2 St.) über »Die Entwickelungsgeschichte der mathematischen Wissenschaften» und wieder in beiden Sem. 1858 (2 St.) über »Die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bis NEWTON und LEIBNITZ«.

In 1870—71 hielt Dr. A. S. GULDBERG zwei kürzere Vortragsreihen an der Universität, über PASCAL und über ARCHIMEDES.

Endlich hat der Verfasser dieser kleinen Notiz vom 2^{ten} Sem. 1878 bis zum 2^{ten} Sem. 1879 (1—2 St.) die Entwickelungsgeschichte der modern-geometrischen Ideen vorgetragen, und seit 1884 eine jährliche Vorlesungsreihe für »Examen philosophicum» übernommen über die Eigenschaften der ganzen Funktion mit einer Einleitung in die Theorie der Gleichungen, in welcher zugleich die Geschichte der algebraischen Analysis im möglichst weitem Umfange mitgetheilt wird.

Nach dem Beispiele von P. LA COUR in Askov (Dänemark) — vgl. Biblioth. Mathem. 1889, p. 76 — hat der Verf. auch in seinen mathematischen Vorträgen in der »Arbeiteracademie» in Christiania (angef. 1885) specielles Gewicht auf die Geschichte gelegt.

Die mathematisch-geschichtlichen Beiträge, welche der norwegischen Literatur zugerechnet werden dürfen, folgen hier.

1773.

[Ein Aufsatz vom 14. Jahrh. über Kreisumfang etc.]

Scriptores rerum danicarum **2** (Hafniæ 1773, fol.), S. 192. — Die Notiz, die isländisch geschrieben ist und mit den Worten »Ummæling hrings» beginnt, gehört einer Abhandlung historischen Inhalts (*Annales islandicae ad an. 1313*), die im Codex Arn. Magn. 415 qv. enthalten ist. Dieser Codex ist nach G. STORM etwa 1320—1340 geschrieben.

1784.

Glahn, H. G., Om Grönlændernes Maade at tælle paa.

Trondhjem, Vidensk. Selskab, Ny Samling **1** (Kjöbenhavn 1784), 497—506. — Die Art der Grönländer zu zählen.

1827.

Arentz, H. S., Professor og Rector Fredrich Christian Holberg Arentz's Biographie. Trykt paa det kgl. norske Vid. Selsk:s Bekostning. Trondhjem 1827.

8°, (2) + 96 S. — Biographie des Prof. u. Rectors FR. CHR. HOLB. ARENTZ. Gedruckt auf Kosten der kgl. norwegischen Gesellschaft der Wissenschaften.

1829.

Holmboe, B., Necrolog. Kort Fremstilling af Niels Henrik Abels Liv og videnskabelige Virksomhed.

Magazin for Naturvidenskab **9**, 1829, 334—354. — Necrolog. Kurze Darstellung von NIELS HENRIK ABELS Leben und wissenschaftliche Thätigkeit. — Auch separat erschienen. — Im wesentlichen wiedergegeben in der Vorrede zu ABELS *Oeuvres Complètes* (Christiania 1839).

1835.

Hansteen, Chr., Lærebog i Plangeometrie. Christiania 1835.

8°, (2) + XX + 280 S. — Lehrbuch der Plangeometrie. — Enthält im Vorwort III—XX eine historisch-kritische Untersuchung über die Principien der elementar-geometrischen Darstellung, namentlich in Bezug auf die gerade Linie und den Parallelismus. — [Recension:] Morgenbladet (Christiania) 1835. (B. HOLMBOE.) — Es entstand hieraus eine jahrlange Fehde zwischen HANSTEEN und HOLMBOE, worunter auch die obigen Principien weiter discutirt wurden.

1837.

M[unch-]R[æder], Abel.

Bien (Christiania) **22**, 1837, 111—121. — Vergl. Ny Hermoder (Christiania) **4**, 1842, 208—216.

1847.

Munch, P. A., Om Ridderen og Rigsraaden Hr Hauk Erlendssön, Islands, Oslo og Gulathings Lagmand og om hans literære Virksomhed.

Annaler for nordisk Oldkyndighed 1847, 149—216. — Abgedruckt in MUNCH's *Samlede Afhandlinger* I, 299—333. — Ueber den Ritter und Reichsrath Hrrn. HAUK ERLENDSSÖN, »Lagmand» von Island, Oslo und Gulathing, und seine literarische Thätigkeit. — S. 193—196 handeln von dem *Algorismus* (s. 1848) und S. 199 fg. von dem *Cod. 415 qu. A. M.* (s. 1773). — Vergl. hierüber: G. STORM, *Islandske Annaler indtil 1578* (Christiania 1888), S. VII—X.

1848.

Munch, P. A., Algorismus eller Anvisning til at kjende og anvende de saakaldte arabiske Tal efter Hr Hauk Erlendssöns Codex meddelt og ledsaget med Oversættelse.

Annaler for nordisk Oldkyndighed 1848, 353—375. — Algorismus oder Anleitung zur Kenntniss und zum Gebrauche der sogenannten arabischen Zahlen nach dem Codex des Herrn HAUK ERLENDSSÖN, mitgetheilt und mit Uebersetzung begleitet. — [Recension:] Frey (Upsala) 1848, N° 6. (G. STEPHENS.)

1856.

[Hansteen, Chr.] Christopher Hansteens Ungdomshistorie. Foredraget af ham selv ved hans Embedsjubilæum.

Illustreret Nyhedsblad (Christiania) **5**, 1856, 174—175. — CHRISTOPHER HANSTEENS Jugendgeschichte. Vorgetragen von ihm selbst bei seinem Amtsjubiläum. — Vergl. CHR. HANSTEEN, *Reise-Erindringer* (Christiania 1859), S. III—XVIII.

1857.

Bjerknes, C. A., Noticer om Abel samt om hvordan han er bleven bedömt för og nu.

Skillings-Magasin (Christiania) **23**, 1857, 353—55, 366—68, 383—84. — Notizen über ABEL und wie er früher und jetzt beurtheilt worden ist.

1859.

nsteen, Chr., Japanesisk Beviis for den pythagoræiske Læresætning.

Illustreret Nyhedsblad (Christiania) **8**, 1859, 168. — Japanischer Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes.

1861.

ldberg, C. M., Om Cirklers Beröring. Besvarelse af Universitetets Prisopgave for 1859. Universitets-Program. Christiania 1861.

4°, 32 + (4) S. — Ueber das Apollonische Berührungsproblem. — Die Einleitung behandelt die Geschichte des Problems.

nsteen, Chr., Niels Henrik Abel.

Morgenbladet (Christiania) 1861, N° 51. — Eine Sammlung von theils persönlichen Erinnerungen, theils Urtheilen über ABEL von GAUSS und Anderen.

1862.

nsteen, Chr., Niels Henrik Abel.

Illustreret Nyhedsblad (Christiania) **11**, 1862, 37—38, 41—42. — Enthält u. a. vier Briefe von ABEL an HANSTEEN und einen Brief von Baron MAURICE an den Minister LÖWENTHAL in Stockholm, norwegisch übersetzt.

1866.

eyser, R. [Zur Geschichte der norwegischen Mathematik im Mittelalter].

KEYSER, R., Nordmændenes Videnskabelighed og Literatur i Middelalderen (Christiania 1866, 8°), S. 557—558.

1869.

Guldberg, A. S., Om Feilenes Compensation i den Leibnitz'ske Infinitesimalregning.

Nyt Magazin for Naturv. (Christiania) **16**, 1869, 47—75. — Über die Compensation der Fehler in der LEIBNITZ'schen Infinitesimalrechnung. — Eine Studie über CARNOT's *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.* — Vergl. R. HOPPE: *Om Principerne for og formentlige Vanskeligheder ved Infinitesimalregningen.* Ibid. **18**, 1871, 321—26. — Ueber die Principien für und vermeintliche Schwierigkeiten bei der Infinitesimalrechnung.

1870.

Guldberg, A. S., Matematikens betydning og anvendelse. Christiania 1870.

8°, V + (2) + 126 S. — Die Bedeutung und Anwendung der Mathematik. — Die Kap. I »Tallet» (Die Zahl) und IV »Om sandsynlighedsregningen og dens anvendelse» (Ueber die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung) sind wesentlich geschichtlich abgefasst. Zum Schluss folgt eine Uebersetzung von PASCAL's: *Réflexions sur la géométrie en général*, S. 135—164.

1872.

Guldberg, A. S., Arkimedes.
Folkevennen (Christiania) **21**, 1872, 280—310.

1873.

Guldberg, A. S., Om Cirkelens Kvadratur.
Fra Videnskabernes Verden (Kjöbenhavn) **1**, 1873, 45—76. — Ueber die Quadratur des Kreises.

1874.

Bjerknes, C. A., Abel og de Abelske Værker.
Morgenbladet (Christiania) 1874—1875. — ABEL und die ABEL'schen Werke.

1876.

Guldberg, A. S., Determinanternes teori. Kristiania 1876.
8°, (4) + VIII + 110 + (2) S. — Theorie der Determinanten. — Die Einleitung behandelt die Geschichte der Determinanten.

1877.

Fjörtoft, O. J., Lærebog i praktisk Regning efter det nye Mynt, Maal og Vægtsystem. I. Christiania 1877.
8°, VIII + 152 S. — Lehrbuch der praktischen Arithmetik nach dem neuen Münz-, Maass- u. Gewichtsysteme. — Erster Abschnitt enthält einiges über norwegische Zählungsmethoden früher und jetzt.

1878.

Holst, Elling, Om Poncelets Betydning for Geometrien. Et Bidrag til de modern-geometriske Ideers Udviklingshistorie. Universitets-Program. Christiania 1878.
8°, XVI + 146 + (2) S. — Ueber die Bedeutung PONCELET's für die Geometrie. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der moderngeometrischen Ideen. — [Recension:] Tidsskr. for Mathem. 1879, S. 111 fg. (H. G. ZEUTHEN); vergl. ib. 1880, S. 71 und S. 75.

1880.

Bjerknes, C. A., Niels Henrik Abel. En Skildring af hans Liv og videnskabelige Virksomhed. Stockholm 1880.
8°, 129 S. — NIELS HENRIK ABEL. Eine Schilderung seines Lebens und seiner wissenschaftlichen Thätigkeit. — Dem Nordisk Tidskrift för vetenskap, konst och industri (Stockholm) 1880

als Supplement beigegeben. Die Arbeit war im Jahrg. 1878 dieser Zeitschrift angefangen, ohne daselbst abgeschlossen zu werden. — Uebersetzung s. 1885.

1883.

Lie, S., Om Abel.
Morgenbladet (Christiania) 1883, N° 188 A. — Ueber ABEL.

1884.

Geelmuyden, H., Hansteens videnskabelige Virksomhed.
Naturen (Christiania) **8**, 1884, 150—159. — Die wissenschaftliche Thätigkeit HANSTEENS.

1885.

Bjerknes, C. A., Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française revue et considérablement augmentée par l'auteur. Paris 1885.
8°, (2) + IV + 368 S. + Portrait. — Übersetzt von G.-I. HOÜEL. — [Recensionen:] Aftenposten (Christiania) 1885, N° 62. (O. B[ERG].) — Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{9}_2$, 1885, 141—53 (G. BRUNEL); 190—202 (J. BERTRAND). — Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), 14—15. (N[ETT]O.) — Allg. österr. Literaturz. 1885. (S. GÜNTHER.) — Vergl. G. BRUNEL: *Notice sur l'influence scientifique de G.-I. Hoüel* (Bordeaux 1888), S. 72—77.

1886.

Bergh, P., Seiten- und Diagonalzahlen bei den Griechen.
Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886; Hist. Abth. 135.

1889.

Bjerknes, C. A. [Gedächtnissrede über O. J. BROCH].
Diese Rede, worin BROCH's Leben und wissenschaftliche Bedeutung ausführlich geschildert ist, wurde den 22. März 1889 in der Sitzung der »Videnskabs-Selskabet» zu Christiania gehalten und wird hoffentlich bald erscheinen.

Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science.

Par V. BOBYNIN à Moskwa.

L'histoire de l'état préscientifique des connaissances mathématiques n'existe point encore à proprement parler. Tout ce que nous en connaissons se borne à des faits séparés, rarement liés entre eux. Une réunion de ces faits en un tout complet, un tableau quelque peu satisfaisant des connaissances mathématiques dans leur développement historique à l'époque antérieure à la science, aboutirait à un échec presque inévitable pour quiconque en tenterait l'essai. Actuellement le but unique de l'investigateur en ce domaine est de l'enrichir d'un plus grand nombre de faits. C'est pourquoi l'intention d'en communiquer quelques uns relatifs à l'arithmétique et à la géométrie préscientifiques ne saurait être déplacée. Nous les avons rencontrés principalement dans les sections consacrées à l'arpentage de certains manuscrits mathématiques Russes datant du XVII^{e} siècle. Ce sont:

A) Un manuscrit du Musée de Roumiantzef à Moscou. Collection d'Oundolsky N° 682.

B) Un manuscrit appartenant à la Rédaction du journal «Sciences physico-mathématiques».

C) Un manuscrit consacré à l'arpentage, dans les Archives du Ministère des Affaires étrangères à Moscou N° 549.

D) Un manuscrit du Musée de Roumiantzef à Moscou N° 932.

E) Un manuscrit appartenant à la Société d'Amateurs de la littérature ancienne Russe. Publié en fac-similé par la Société sous le titre de la Счетная Мудрость (*Stchetnaïa Moudrostje*).

Les quatre premiers de ces manuscrits datent de la première moitié du XVII^{e} siècle et présentent des copies d'originaux bien plus anciens. Le dernier se rapporte probablement à la seconde moitié du même siècle et l'original (si toutefois c'est une copie) n'én doit pas être plus ancien.

L'arithmétique.

Les premières phases du calcul fractionnaire. Les manuscrits *A*, *C*, *E*, dans leurs sections consacrées à l'arpentage, décrivent en détails le système des mesures agraires employé dans la

Russie antérieure à Pierre le Grand. Ce système n'y est pas d'origine étrangère. C'est l'oeuvre spontanée d'un peuple agriculteur qui la transmit plus tard aux arpenteurs officiels ainsi qu'aux règlements et aux instructions dont l'Etat munissait ces derniers. Соха (*sogha*) et Вытъ (*vitje*) font les unités fondamentales des mesures agraires. On en obtient les subdivisions en divisant successivement par 2 l'unité elle-même en premier lieu, et son tiers en second. Les puissances successives de 2, de la première à l'huitième inclusivement, font les diviseurs de l'unité fondamentale dans le premier cas, et ces mêmes puissances de la première à la cinquième inclusivement, multipliées par 3, dans le second cas. Ces nombreuses subdivisions ont donné lieu à des nominations nouvelles, composées quelquefois par l'addition du mot половина (*polovina*, moitié) ou en abrégé пол (*pol*, demi) au terme original. Cette addition était répétée un nombre équivalent de fois et sans excéder celui de 5 (par exemple $\frac{1}{2^5 \cdot 3}$ = demi-demi-demi-demi-demi-tiers). L'usage de toutes ces subdivisions présentant des difficultés pour les arpenteurs peu habiles dans le calcul fractionnaire, on a essayé d'en faciliter la pratique. Ainsi le manuscrit *E* présente des tables contenant les sommes des subdivisions différentes des deux genres pour les unités des mesures agraires le plus usités: соха (*sogha*) et четверть (*tchetwertje*, un quart). La simplicité de la construction en même temps que la formation de ces termes par d'anciens agriculteurs Russes, nous permettent de voir dans leur système les premières phases du calcul fractionnaire.

La géométrie.

Les figures rectilignes. Pour mesurer les aires des quadrilatères dont deux côtés opposés sont égaux, les manuscrits *A*, *B*, *C* emploient une règle qui peut être exprimée par la formule $\frac{a+b}{2} \cdot c$, où a et b signifient les côtés opposés inégaux et c l'un des deux côtés égaux. Ces mêmes manuscrits calculent l'aire du triangle d'après la formule $\frac{b}{2} \cdot c$, où b est le plus grand et c le plus petit des côtés du triangle. On sait que le Papyrus égyptien de Rhind présente des règles analogues plus limitées seulement dans leur application, à savoir: le cas du trapèze isoscèle quant à la première, et le cas du triangle isoscèle quant à la seconde (alors c représente l'un des côtés égaux dans les

deux formules précédentes). Cette exiguïté comparative nous fait voir dans les règles égyptiennes une phase postérieure du même développement.

Pour ce qui concerne les aires des polygones, les manuscrits A, B, C, E les déterminent soit en les décomposant en des figures plus simples, soit en les transformant en carrés. Le premier procédé ayant été généralement répandu, le mode de la décomposition peut seul renfermer un intérêt de nouveauté.

Tous les polygones des manuscrits A, B, C, à commencer par les quadrilatères, se décomposent en triangles et en quadrilatères dont deux côtés opposés sont égaux, les triangles ayant une préférence marquée. Dans le manuscrit E, en décomposant les polygones — les triangles compris au nombre de ces derniers — on se sert de triangles, de trapèzes rectangulaires et de rectangles. Les premiers et les derniers en sont toutefois préférés au point que dans un des exemples le trapèze rectangulaire se trouve décomposé à son tour en un rectangle et en un triangle rectangulaire.

Le second procédé, également employé par les manuscrits A, B, C, E, substitue au polygone donné un carré ayant le même périmètre. Pour définir le côté de ce carré on mesurait le contour du terrain en question et on divisait par 4 le résultat obtenu. Les polygones exceptés, ce procédé était encore employé particulièrement pour les mesures dés figures curvilignes, la décomposition appelée plus souvent à servir les figures rectilignes.

Le cercle. Les procédés servant à mesurer l'aire du cercle et employés dans les manuscrits mathématiques Russes peuvent être divisés en deux groupes. Le premier appartenant exclusivement à l'arpentage est caractérisé par l'équation $\pi = 4$. Le second employé pour la solution des questions relatives à la définition des volumes des corps ronds est caractérisé par l'équation $\pi = 3$. Dans la section d'arpentage du manuscrit A on voit deux procédés aboutissant également à $\pi = 4$. Le premier consiste dans la substitution d'un carré au cercle, le côté du carré équivalant à $^1/_4$ de la circonférence. Le second prend le diamètre du cercle comme tel côté ou, ce qui en dit autant, substitue au cercle un carré décrit autour de lui. Le dernier procédé toutefois n'est employé qu'indirectement et pour définir la circonférence d'après son diamètre connu, à la suite de quoi ce diamètre est alors multiplié par 4. Dans le manuscrit E, postérieur au manuscrit A, le premier des deux procédés se trouve néanmoins dans un état sensiblement arriéré. On y

définit le côté du carré substitué au cercle en divisant la circonférence par $4\,{}^{2}/_{3}$. L'étrangeté du fait trouve une explication probable dans le raisonnement que voici. Une faute remarquée à l'aide de l'expérience aura eu pour suite des essais dans le but de la corriger, mais conduits à tâtons et jetés au hasard, puisque toute idée-maîtresse leur manquait.

Les procédés du second groupe se rencontrent dans les problèmes stéréométriques des manuscrits A, D, E, dont le dernier suppose l'aire du cercle égal aux ${}^{3}/_{4}$ du carré du diamètre. On voit aisément que ce procédé équivaut à la valeur $\pi = 3$. Le procédé des manuscrits A et D est surtout remarquable comme le résultat de la combinaison du premier procédé du premier groupe avec la valeur $\pi = 3$. ${}^{1}/_{4}$ de la circonférence y représente le côté du carré substitué au cercle, la circonférence elle-même supposée équivalente à son diamètre triplé. La valeur définitive de π, donné par la combinaison des deux procédés si différents sera évidemment ${}^{9}/_{4}$.

La manière d'envisager les figures isopérimétriques. Nous venons de voir que pour mesurer les polygones, rectilignes ou curvilignes, et le cercle, on les remplaçait par des carrés dont les côtés équivalaient à ${}^{1}/_{4}$ du périmètre de ces figures. Les procédés mêmes de la substitution exposés plus haut démontrent suffisamment que les figures isopérimétriques étaient envisagées comme des figures équivalentes. Cette manière de voir marque même un certain progrès dans le manuscrit E, la soustraction des aires s'y trouvant remplacée par la soustraction des périmètres correspondants. Effectivement, dans ce cas on considérait comme la différence cherchée des aires, l'aire du carré au périmètre égal à la différence trouvée des périmètres. C'est encore à la même manière de voir que se rattache probablement l'origine de la règle citée plus haut et servant à calculer l'aire du quadrilatère dont deux des côtés opposés sont égaux. En tâchant d'en égaliser les côtés opposés inégaux, ce que l'on obtient en divisant leur somme par 2, on tendrait à recevoir un rectangle dont une paire de côtés opposés équivaudrait aux côtés égaux du quadrilatère donné et l'autre paire aux côtés égalisés.

Correspondant à un certain degré du développement des connaissances mathématiques, cette manière d'envisager les figures isopérimétriques se répandit généralement parmi les peuples. De nos jours on la rencontre encore chez des personnes dont l'instruction mathématique n'a point dépassé les règles les plus simples du calcul ou parmi celles qui ont imparfaitement étudié la géométrie élémentaire. 1700 ans avant J. C. le Papyrus égyp-

tien de Rhind nous fournit un exemple du même point de vue dans un procédé cité plus haut et servant à déterminer l'aire du trapèze isoscèle. L'art d'arpenter des anciens Egyptiens exprime la même manière de voir avec plus de clarté encore dans les procédés relatifs à la détermination des aires des quadrilatères et des triangles le plus variés. Les inscriptions d'un temple à Edfou s'en servent 107 ou 88 ans avant J. C. Ces procédés peuvent être représentés par les formules $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$ pour les quadrilatères et $\frac{b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$ pour les triangles, où a et b, c et d sont les côtés opposés des figures correspondantes. Dans la société quasi instruite de l'Empire Romain cette manière d'envisager les figures isopérimétriques fut répandue au point de donner lieu à une réfutation détaillée au I^er^ siècle de notre Ere. C'est Fabius Quintilianus qui en est l'auteur. N'étant point mathématicien il n'en inséra pas moins cette réfutation dans ses *Institutiones oratoriae*, livre qui n'a aucun rapport à la géométrie (comparez Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I, p. 464—465).

Enfin la même manière de voir fut très en vogue en Europe au Moyen âge, aux temps antérieurs à l'appropriation de la science Arabe, ainsi que l'atteste la littérature mathématique de l'époque malgré son extrême pauvreté. On peut citer comme exemples le manuscrit anonyme du IX^e^ ou peut-être du VII^e^ siècle: *De iugeribus metiundis* et le recueil des problèmes d'arithmétique, attribué à Alcuin et datant du VIII^e^ siècle: *Propositiones arithmeticae ad acuendos juvenes*. L'aire du cercle y figure comme l'aire du carré dont le côté équivaut à $^1/_4$ de la circonférence.

Il Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni. (1868—1887.)

Nota di Antonio Favaro a Padova.

La puntata del *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da* B. Boncompagni contenente gli indici degli articoli e dei nomi del tomo XX, recava agli studiosi questo tristissimo annunzio: »Col presente fascicolo ha termine il tomo XX ed ultimo di questo Bullettino».

La voce della prossima cessazione di tale effemeride, la quale, nel suo genere, fu ed è probabilmente destinata a rimanere unica, erasi già altrevolte diffusa; ma, in parte per le vive preghiere degli studiosi, in parte anche per il dolore che l'illustre patrizio romano provava nel separarsi da una pubblicazione, la quale era divenuta tanta parte di lui, il pericolo potè venire scongiurato, nè erano del tutto infondate le speranze di farlo recedere dalla presa determinazione, anche dopo compiuto il ventesimo tomo, quando altre circostanze, indipendenti dalla di lui volontà, lo obbligarono a mantenerla.

E certamente il ripetersi delle eccezionali condizioni nelle quali il Bullettino potè sorgere e vivere per vent' anni di vita così prosperosa, è, se non assolutamente impossibile, per fermo eccessivamente difficile.

Nessuno infatti meglio del Principe Don Baldassarre Boncompagni poteva dirsi preparato alla direzione di una simile intrapresa. Le ragguardevolissime pubblicazioni, le quali fin dai primi anni della sua gioventù egli aveva fatte intorno alla storia delle scienze matematiche e fisiche, lo avevano messo in prima linea fra i cultori di questa disciplina, facendogli stringere relazioni con quanti in ogni parte del mondo ne formavano scopo ai loro studi. Ricchissimo di censo, egli potè spendere senza contare, sia raccogliendo una biblioteca forse unica al mondo, sia ponendo a disposizione della nuova effemeride una apposita tipografia: due elementi senza i quali una pubblicazione, quale egli l'aveva ideata, non saprebbe neppur concepirsi. Anche il momento, nel quale il grande disegno poté essere effettuato, non poteva essere più opportuno; i lavori dello Chasles e del Libri e quelli dello stesso Boncompagni avevano segnata la via nuova alle indagini storiche della scienza, mettendo in piena

[redacted]

evidenza la strabocchevole ricchezza delle fonti quasi totalmente inesplorate, ed additato il metodo secondo il quale si doveva di esse approfittare per fornire di solidi fondamenti al novello edifizio. Cosicchè torni difficile lo stabilire se più le condizioni di quegli studi speciali, i quali si trovavano già così bene avviati, abbiano contribuito a far sorgere ed a mantenere il **Bullettino**, o più abbia esso concorso al meraviglioso progresso che essi effettuarono negli ultimi vent' anni.

Esporre il contributo recato alla storia delle scienze matematiche e fisiche da questa ragguardevolissima pubblicazione durante il periodo della sua attività sarebbe impresa difficilissima; riassumerlo nelle proporzioni, che ci sarebbero consentite da quelle della effemeride nella quale scriviamo, assolutamente impossibile.

Dovendo pur tuttavia, per corrispondere al cortese invito che ci fu fatto, dirne qualche cosa, noteremo anzitutto che il materiale scientifico e letterario del **Bullettino** si distribuisce nelle seguenti categorie: memorie originali, pubblicazioni di documenti, traduzioni, lavori bibliografici, recensioni e annunzi di recenti pubblicazioni.

E sotto queste varie forme, senza ombra di dubbio, la parte principalissima spetta al generoso e valentissimo Mecenate, che, con grave dispendio e con suo più grave sagrifizio, sostenne il peso della pubblicazione; imperocchè possa dirsi non esservi scritto della raccolta da lui edita, del quale egli non sia stato collaboratore efficacissimo, sia somministrando copiosi materiali, sia aggiungendo note preziose, ognuna delle quali porta o un dato biografico ignorato, o notizia di un manoscritto sconosciuto o di un' opera rara, il tutto improntato di quella esattezza che prima di lui, può dirsi senza ombra di esagerazione, nessuno aveva mai pensato ad adoperare. Delle opere, il cui titolo è citato linea a linea colla indicazione dei caratteri adoperati, e indicata non solo la pagina, ma la linea; nella riproduzione dei passi sono notate le divisioni delle linee ed è tenuto conto delle varianti offerte da varie edizioni. La quale esattezza, spinta all' ultimo limite, ai più, abituati ad andare per le spiccie, o non molto teneri dei particolari, potè sembrare e sembrò anche soverchia; ma raggiunse, tra gli altri, due singolari vantaggi. Il primo cioè quello di assicurare che la erudizione, sparsa a piene mani dovunque, era veramente di buona lega e di prima mano, poichè chiunque scrivendo nel **Bullettino** citava un manoscritto od un stampato poteva dire o di averlo avuto realmente sott' occhio nell' originale, o di aver potuto

approfittare d'uno di quei stupendi fac-simili dei quali il Principe BONCOMPAGNI era tanto generoso coi cooperatori della sua pubblicazione. Il secondo, e non meno pregevole, di far assumere l'abito del massimo rigore nelle indagini, cosicchè non apparisca soverchio il dire che lo scrivere per il Bullettino non rimase senza utilità grandissima anche per i più provetti, se anco stimarono meglio conveniente di non servirsi fuori del Bullettino delle norme in esso seguite per le citazioni degli stampati; e credettero opportuno di velare un pò quell' apparato di erudizione che in quella effemeride è posto nella massima evidenza.

Esclusiva fatica particolare dell' illustre Editore erano poi gli annunzii delle recenti pubblicazioni, i quali, per quanto non bene equilibrati nelle varie parti, specialmente negli ultimi tempi, pure fornivano esatte e copiose notizie intorno alle pubblicazioni matematiche e fisiche in generale, ed in particolare per ciò che concerneva la disciplina alla quale il Bullettino era in ispecial modo dedicato: esattissime poi per ciò che risguardava le pubblicazioni di parecchie accademie e dei più cospicui periodici di scienze matematiche e fisiche. Questi annunzii, la cui mancanza sarà essa pure vivamente deplorata dagli studiosi, pubblicati di bimestre in bimestre, permettevano di seguire attentamente i nuovi lavori che andavano vedendo la luce, mentre in pari tempo le indicazioni vi si trovavano fornite con tanto lusso di particolari, da agevolare singolarmente le ricerche, precipuamente per coloro i quali vivono lontani da un centro di studi.

L'essere stato io stesso, non dirò tra i principali, ma certamente fra i più assidui cooperatori del Bullettino a partire dall' anno 1874, e precipuamente da quando, lasciato quasi del tutto da parte ogni altro argomento, mi tenni pressochè esclusivamente a coltivare gli studi galileiani, mi vieta di entrare in particolari intorno al contributo dei singoli autori, perchè il non parlare dei miei scritti potrebbe essere stimata affettazione o falsa modestia, ed il tenerne parola essere anco giudicato atto di iattanza: e dall' una e dall' altra egualmente rifuggo.

Dirò soltanto che al Bullettino l'ospitalità era accordata nel modo più largo e più cordiale: gli scritti in lingua italiana, latina e francese vi erano pubblicati in originale: quelli in altre lingue bene spesso per cura ed a spese dell' Editore venivano tradotti in una di queste, e nessuna limitazione veniva posta per ciò che risguardava la pubblicazione di figure, di tavole e di fac-simili. E benchè vi fossero più volontieri veduti i lavori concernenti in particolare la storia dell' aritmetica, alla quale

il Principe BONCOMPAGNI stesso recò così ricco e copioso contributo, tutti indistintamente gli scritti concernenti la storia delle scienze matematiche e fisiche vi erano accolti con tanta premura e vi affluivano così abbondantemente che, senza fatica alcuna, potè mettersene insieme una mole di ben venti volumi in 4°.

A corredo del Bullettino è già annunziata la pubblicazione dell' indice generale degli scritti contenuti nella raccolta e dell' indice alfabetico degli autori di tali scritti; ma farebbe opera egregia chi dai venti volumi estraesse e porgesse insieme riuniti tutti i dati di fatto i quali vi si trovano disseminati e che riuscirebbe troppo malagevole il cercare senza alcuna guida, non ostante i copiosi indici aggiunti alla fine di ogni volume.

Altri parlerà e con maggiore competenza e con più ricchi particolari dello insieme di questa eccezionale raccolta, e non dimenticherà certamente di ricordare dopo il nome del Principe BONCOMPAGNI, quello dell' egregio Commendatore ENRICO NARDUCCI, del quale ognuno che abbia avuta un qualche relazione col Bullettino, rammenterà sempre la profonda e variata erudizione, l'insuperabile cortesia e le squisite premure.

Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.

Di Antonio Favaro a Padova.

Affinchè nella importante rassegna degli studi che nei varii paesi si vennero pubblicando intorno alla storia delle matematiche, la quale è stata promossa dal signor G. Eneström, non manchi un cenno relativo all' Italia, mi sono indotto ad accondiscendere alla domanda che egli si compiacque di farmene. Mi affretto tuttavia a soggiungere che, attesa la copia straordinaria di lavori che intorno a questo argomento furono stesi e pubblicati in Italia, o vennero altrove da italiani dati alla luce, non sarebbe compatibile colle proporzioni del presente periodico il darne un elenco completo, come già fu fatto relativamente ad altri paesi. E poichè in un lavoro di tal genere non si ha il diritto di attribuire alle varie pubblicazioni gradi diversi di importanza, e sulle basi di questo apprezzamento permettersi esclusioni arbitrarie, ho stimato preferibile di tenermi ad indicare le fonti principali alle quali potranno essere con frutto attinti gli elementi per tale rassegna, la quale potrà essere agevolmente compiuta da chi disponga di uno spazio maggiore di quello che per tale lavoro poteva essere in questa effemeride messo a mia disposizione.

Ed intanto comincierò dal dire che, per tutto quanto risguarda i lavori dati alla luce dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX, basterà ricorrere all' opera monumentale del Riccardi, per merito del quale l'Italia fu dotata di un inventario completo delle fonti stampate per la sua storia delle matematiche a tutto il tempo indicato, quale nessuna altra nazione possiede. Nè la *Biblioteca Matematica Italiana* deve essere soltanto suggerita come fonte generica, nella quale gli scritti relativi alla disciplina di cui ci stiamo in particolare occupandó si trovino sparsi qua e là, e debbano cercarsi con gran perdita di tempo e senza fondata speranza di buon esito, chè anzi la disposizione assegnata ai materiali forniti permette di completare la indagine con tutta rapidità e colla massima esattezza desiderabile. Infatti, per ciò che concerne gli scritti biografici relativi ai singoli scienziati, ed ancora rispetto alle opere nelle quali sono forniti intorno ad essi ed ai loro lavori le maggiori notizie, si trovano tutte siffatte indicazioni raccolte

e sommariamente registrate nella prima parte, immediatamente di seguito al nome al quale si riferiscono.

Per fermo, quand' anche null' altro si trovasse in quest'opera, essa dovrebbe essere reputata quale una fonte di primo ordine per rintracciarvi colla massima facilità tutti i materiali per la storia delle matematiche in Italia fino ai primi anni del secolo decimonono; ma la seconda parte di quest' opera istessa contenente l'indice sistematico di tutte le opere, le quali nella prima sono distribuite nell' ordine alfabetico dei cognomi degli autori, somministra con tutti i desiderabili particolari insieme raccolte le indicazioni risguardanti tutto ciò che alla storia dei varii rami delle matematiche pure ed applicate si riferisce.

Quivi infatti, con gli opportuni richiami alla prima parte dell' opera, trovansi fra gli altri registrati i seguenti scritti:

Sulla aritmetica in generale e sulla storia di questa scienza (p. 18, nn. 13).

Sulla geometria in generale e sulla storia di questa scienza (p. 42, nn. 25).

Sull' algebra in generale e sulla storia di questa scienza (p. 62, nn. 3).

Sulla geometria analitica in generale e sulla storia di questa scienza (p. 73, nn. 2).

Sulle sezioni coniche in generale e sulla loro storia (p. 76).

Sulla trigonometria in generale e sulla storia di questa scienza (p. 79).

Sull' analisi superiore in generale e sulla storia di questa scienza (p. 82, nn. 5).

Sulla meccanica in generale e sulla storia di questa scienza (p. 88, nn. 17).

Sulla idraulica in generale e sulla storia di questa scienza (p. 106, nn. 3).

Sulla fisica matematica in generale e sulla storia di questa scienza (p. 133, nn. 16).

Sulla cosmografia in generale e sulla storia di questa scienza (p. 154, nn. 2).

Intorno all' astrologia in generale ed alla sua storia (p. 166, nn. 24).

Sull' astronomia in generale e sulla sua storia (p. 176, nn. 30).

Sulla cronologia in generale e sulla sua storia (p. 227, nn. 18).

Sulla gnomonica in generale e sulla sua storia (p. 235, nn. 4).

Sulla geometria pratica in generale e sulla sua storia (p. 240, nn. 2).

Sulla storia della geografia (p. 257, nn. 17).

Sulla nautica in generale e sulla sua storia (p. 263, nn. 19).

Sull' arte militare in generale e sulla sua storia (p. 269, nn. 18).

Ed oltre a queste vi ha ancora una apposita categoria contenente: Biografie matematiche generali e particolari (p. 4, nn. 51), ed un' altra la quale comprende le: Memorie ed opere che trattano della storia delle scienze in generale (p. 3, nn. 21).

Disgraziatamente però, come si è già avvertito, l'opera del RICCARDI arriva soltanto ai primi anni del secolo decimonono, e quindi parrebbe che a questo tempo dovessero limitarsi le notizie bibliografiche da essa fornite intorno alla storia delle matematiche in Italia, ma lo scrupolo singolare col quale l'egregio Autore ha proceduto lo indusse ad aggiungere alla fine della sua opera monumentale un »Catalogo delle opere più sovente citate nella Biblioteca Matematica e di altre opere storiche, biografiche e bibliografiche ad essa relative, da consultarsi per la storia delle scienze fisico-matematiche in Italia e per la biografia dei matematici italiani, vissuti fino ai primi anni del secolo XIX», al quale furono fatte posteriormente due aggiunte colle quali si arriva fino all' anno 1880. Dobbiamo ad una gentile comunicazione dell' Autore, ch' egli ha già in pronto e si propone di pubblicare quanto prima, insieme con alcune nuove appendici alla prima parte della sua opera, anche ulteriori aggiunte a questo catalogo il quale così fornirà tutti i materiali desiderabili per una completa bibliografia relativa allo studio della storia delle scienze matematiche e fisiche in Italia. Ma finchè questo vivissimo desiderio degli studiosi non venga sodisfatto, i materiali stessi per questi ultimi anni potranno essere agevolmente pescati nelle memorie inserite nel Bullettino del Principe BONCOMPAGNI e negli annunzi di recenti pubblicazioni che vi sono annessi, o nella Bibliotheca Mathematica dell' ENESTRÖM.

Queste sono adunque le fonti principali, le quali bastano a far comprendere quali proporzioni assumerebbe una bibliografia storica delle matematiche in Italia; che se poi dovesse un tale lavoro essere condotto alle minuzie, le quali non possono essere trascurate negli studi rivolti particolarmente ad un determinato argomento, ci basterà l'enunziare che in una bibliografia galileiana la quale con ogni diligenza abbiamo raccolta, le sole voci biografiche e storiche relative al sommo filosofo ascendono a parecchie centinaia. Vogliamo perciò credere che saremo giustificati se, trattandosi di un brevissimo scritto, per il quale soltanto poche pagine ci erano state concesse, abbiamo stimato opportuno di tenerci a questo semplicissimo cenno.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

THE CONSTRUCTION OF THE WONDERFUL CANON OF LOGARITHMS BY JOHN NAPIER, BARON OF MERCHISTON. TRANSLATED FROM LATIN INTO ENGLISH WITH NOTES AND A CATALOGUE OF THE VARIOUS EDITIONS OF NAPIER'S WORKS BY **W. R. Macdonald.** Edinburgh, Blackwood 1889. 8°, XIX + 169 p.

Le livre que nous annonçons est pour la plus grande part une traduction anglaise du célèbre ouvrage posthume de NAPIER *Mirifici logarithmorum canonis constructio.* Parler de l'importance de cet ouvrage est tout-à-fait inutile; quoique les méthodes employées aujourd'hui pour construire les tables des logarithmes ne soient plus celles que NAPIER a proposées, il n'y a aucun doute que ces dernières n'intéressent ceux qui aiment suivre l'évolution des procédés scientifiques. Pour cette raison, on doit être reconnaissant à M. MACDONALD d'avoir publié une traduction qui rendra accessible à tout le monde un mémoire dont quelques priviligiés seulement pouvaient prendre connaissance. M. MACDONALD a voulu que l'édition anglaise fût, autant que possible, un fac-similé de l'édition latine, et l'éditeur a réussi à faire de ce livre un vrai bijou typographique. Le traducteur donne dans une préface un court récit de la vie de NAPIER (1550—1618) et l'indication de ses travaux (dont un est théologique et quatre mathématiques). Quelques savantes notes sont consacrées à éclaircir des questions relatives à NAPIER ou à ses oeuvres. Voici les titres de ces notes: 1. *Sur l'orthographie du nom de* NAPIER. 2. *Sur quelques dénominations employées dans l'ouvrage original.* 3. *Eclaircissements sur le délai dans la publication de la «Constructio» et sur une nouvelle espèce de logarithmes à base* 10. 4. *Sur la représentation des fractions décimales.* 5. *Sur une erreur dans la construction de la seconde table, suivi d'une recherche relative à l'exactitude de la méthode employée par* NAPIER *pour calculer ses logarithmes.* 6. *Sur les diverses méthodes exposées dans l'appendice pour construire une table de logarithmes où* log 1 = 0 *et* log 10 = 1. Enfin M. MACDONALD dresse un catalogue, qui nous semble un modèle dans son genre, des écrits de NAPIER et des ouvrages qui s'y rattachent étroitement, indiquant les différentes éditions et traductions ainsi que les principales bibliothèques où on les trouve.

Il nous est un vrai plaisir de pouvoir appeler l'attention à ce livre dont le but, comme celui de toutes les publications destinées à populariser les oeuvres classiques sur les sciences exactes, ne saurait être trop loué. G. LORIA.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.
1889: 3.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
1889: 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
34 (1889): 5. — [Analyse du tome **33**:] Fiziko-matem. naouki 1889, 166—170. (V. Bobynin.)

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣиствія развитію научныхъ знаній.
Fiziko-matem. naouki 1889, 28—47, 106—145. — Bobynin, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque du concours du gouvernement pour le développement des connaissances scientifiques. III[—IV].

Carrara, B., La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino 1889.
8°, 30 p.

Christensen, S. A. und **Heiberg, J. L.**, Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark.
Biblioth. Mathem. 1889, 75—83.

Dickstein, S., Gieometryja elementarna. Warszawa 1889.
8°, (3) + 99 p. — Extrait de »Encyklopedyi wychowawczéj». — La plus grande partie (p. 1—65) de ce traité est consacrée à un aperçu de l'histoire de la géométrie en général et en Pologne.

°**Dorsten, R. H. van**, Inleiding op eene geschiedenis van de leer der Kegelsneden in de oudheid. (Programm van het Erasmiaansch gymnasium.) Rotterdam 1887.
8°, 39 p.

°**Emmerich, A.**, Der Brocardsche Winkel des Dreiecks. Eine geschichtliche Studie. Mülheim an d. Ruhr 1889.
4°, 23 p.

Eneström, G., Sur un théorème de Kepler équivalant à l'intégration d'une fonction trigonométrique.
Biblioth. Mathem. 1889, 65—66.

Eneström, G., Bidrag till de matematiska studiernas historia i Sverige under femtonhundratalet.
Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 1889, 489—502.

Eneström, G., Meddelande om Svedenborgs matematiska arbeten.
Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 1889, 529—531. — Note sur les ouvrages mathématiques d'EMANUEL SVEDENBORG; résumé d'un mémoire qui paraîtra prochaînement dans le Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens handlingar.

°**Fink, E.**, Kant als Mathematiker. Leipzig 1889.
8°, 51 p. — [1 M.]

°**Graf, H.**, Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in den bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Heft 1, 2. Bern, Wyss 1888—1889.
8°, VIII + 82 + IV + 101 p. — [2,20 M.] — [Analyse:] Liter. Centralbl. 1889, 854. (—Z—R.)

Houzeau, J. C. et **Lancaster, A.**, Bibliographie générale de l'astronomie. Tome premier. Seconde partie. Bruxelles 1889.
8°, (8) + CXX p. + p. 859—1623 + portrait. — Les pages I—CXX contiennent une notice biographique sur J.-C. HOUZEAU, par A. LANCASTER.

Hugo, L., Sur quelques passages anciens relatifs à Thalès et à la géométrie des Egyptiens.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **108**, 1889, 767—768.

°**Hunger, K. G.**, Mitteilungen über eine handschriftliche Coss und die damit verbundene Aufgabensammlung. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra. (Beilage zum Programm des Gymnasiums Georginum zu Hildburgshausen, Ostern 1887.) Hildburgshausen 1887.
4°, 28 p. + 2 pl.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome II. Correspondance 1657—1659. La Haye, Nijhoff 1889.
4°, (6) + 638 + (1) p. + facsim.

Kronecker, L., Summirung der Gauss'schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$.
Journ. für Mathem. **105**, 1889, 267—268. — Note historique et critique.

Loria, G., Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet.
Biblioth. Mathem. 1889, 67—74.

°**Lüroth**, Geschichtliches über die Erfindung der Infinitesimalrechnung. Freiburg i B. 1889.
4°, 27 p. [1,50 M.]

°**Mackay, J. S.**, Historical notes on a geometrical theorem and development (18th century).
Edinburgh, Mathem. Soc., Proceedings **5**, 1887, 62—78.

Nagl, A., Über eine Algorithmus-Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christl. Abendlande.

Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 129—146, 161—170.

Reinhardt, C., Mittheilung über das Möbius-Archiv.

Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Math. Cl.) 1889, 14—21. — Liste des manuscrits de MÖBIUS.

°**Rothlauf, B.**, Die Physik Platos. Eine Studie auf Grund seiner Werke. Zweiter Theil: Schall, Himmelskunde, Licht. Wärme. (Programm der königl. Kreis-Realschule München 1887—1888.) München 1888.

4°, 90 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 73—74. (CANTOR.)

°**ШАПОШНИКОВЪ, Н. А.**, Памяти Алексѣя Васильевича Лѣтникова. Москва 1888.

8°, 30 p. — SCHAPOCHNIKOFF, N. A., Souvenirs d' A.-V. LÉTNIKOFF.

Vinci, Léonard de, Manuscrits F et I de la bibliothèque de l'Institut, publiés en fac-similés phototypiques avec transcriptions littérales, traductions françaises, avant-propos et tables méthodiques par CH. RAVAISSON-MOLLIEN. Ouvrage couronné par l'Académie française. Paris, Quantin 1889.

In-folio, 372 p. — Ce volume qui porte à huit le nombre des manuscrits déjà édités, contient les manuscrits F et I de la Bibliothèque de l'Institut, soit 472 fac-similés phototypiques avec 472 transcriptions littérales, traductions françaises, avant-propos et tables méthodiques. On y remarque peut être mieux encore que dans les précédents volumes cette intime union de l'artiste et du savant qui caractérise le génie de LÉONARD DE VINCI. A côté de curieux passages sur l'optique, la technique du peintre, l'hydrodynamique, les origines des pétrifications et des coquilles, nous signalerons de singulières allégories fantastiques dont le procédé est fort ingénieux. On ne peut que féliciter M. CH. RAVAISSON-MOLLIEN de sa rigoureuse méthode et de l'habileté avec laquelle il a surmonté les difficultés d'interprétation; le procédé phototypique rend avec toute la force désirable le texte et les figures souvent intéressantes qui l'accompagnent.

°**Wohlwill, E.**, Joachim Jungius. Festrede zur Feier seines dreihundertsten Geburtstages am 22. October 1887. Mit einigen Beiträgen zu Jungius' Biographie und zur Kenntniss seines handschriftlichen Nachlasses. Hamburg 1888.

8°, 85 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 77—78. (CANTOR.)

Question 27 [sur une notice relative à l'histoire de la quadrature du cercle].

Biblioth. Mathem. 1889, 96. (G. ENESTRÖM.)

ALLMAN, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1889, 85–92. (F. HULTSCH.)

GÜNTHER, S., Geschichte der antiken Naturwissenschaft (Mathematik, Naturwissenschaft und wissenschaftliche Erdkunde). 1888. 8°.
Liter. Centralbl. 1888, 1401—1402. (F. H.) — Wochenschr. f. klass. Philol. 6, 1889, 449—455. (M. C. P. SCHMIDT.)

LORIA, G., Notizie storiche sulla geometria numerativa. (Bibliotheca Mathematica 1888.)
Jornal de sc. mathem. 9, 1889, 17. (G. T.)

SCHUBERT, H., Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. Hamburg 1889. 8°.
Zeitschr. für Mathem. 34, 1889; Hist. Abth. 152. (CANTOR.) — Biblioth. Mathem. 1889, 84. (G. ENESTRÖM.)

Listes d'ouvrages récemment publiés.
Biblioth. Mathem. 1889, 63 [illegible] Fiziko-matem. nauki 1889, 171—184 [illegible] Zeitschr. für Mathem. 34, 1889; Hist. Abth. 199—200.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

28. È noto che l'esame e il confronto dei sistemi di numerazione scritta basati sul metodo additivo ha condotto HANKEL ad enunciare un principio generale (v. *Zur Geschichte der Mathematik* [illegible] *M*[illegible] Leipzig 1874, p. 32; [illegible] CANTOR, [illegible] *der Mathematik*. I, Leipzig 1880 [illegible] il quale fu sino ad ora universalmente accettato perchè ad esso era stata trovata un' unica eccezione, [illegible] CANTOR, l. c., p. 103).

Ma [illegible] S. [illegible] W[illegible] nella sua *Dissertatio* [illegible] *numeralibus* (Kiliae 188[illegible]) [illegible] HANKEL, che si incontrano [illegible] concludere (l. c. [illegible]). Ora [illegible] quanto importanti [illegible] dal Sig. WOISIN, essi [illegible] HANKEL alla citata con[illegible] che dimostrare [illegible] misura essa sia [illegible] direttamente il mate[illegible] degli archeologi [illegible] affinchè vengano [illegible] sistemi di numerazione [illegible]

(G. LORIA.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT | JOURNAL

FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890.

NEUE FOLGE 4. | NOUVELLE SÉRIE 4.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 21

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1890.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890.

NEUE FOLGE 4. — NOUVELLE SÉRIE 4.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
Kommendörsgatan 21.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1890.

Inhalt. — Table des matières.

ERRATA.

Page	*ligne*	*au lieu de:*	*lisez:*
43	7	ortographe	orthographe.
»	16	tribus hedris	tribus rectangularibus hedris.
44	8	plus	plures.
»	37	existant	existunt.
45	9	duobus	duabus.

53 *après la ligne 6 ajoutez:* + A, toujours positif, est le nombre des sommets étrangers aux faces contiguës à l'origine.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 4. NOUVELLE SÉRIE. 4.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques.

Par G. Eneström à Stockholm.

Tandis que les recherches dans le domaine de l'histoire des mathématiques ont été poursuivies, à partir du milieu de notre siècle, avec une activité toujours croissante, l'étude de cette science n'a été introduite que très tard dans les universités. Sans doute cela dépend en grande partie de ce que chacune des branches des sciences mathématiques tend à s'agrandir de plus en plus, d'où il s'ensuit que, faute de temps pour les études, une nouvelle branche n'y est admise qu'avec difficulté, d'autant plus que plusieurs professeurs de mathématiques n'ont pas encore entrevu l'importance pédagogique et scientifique de l'étude de l'histoire des mathématiques dans les universités.

Mais il y a aussi d'autres raisons pour lesquelles cette étude a été négligée jusqu'à présent. D'une part, il nous manque un bon manuel d'histoire des mathématiques que l'on puisse mettre entre les mains des étudiants; d'autre part, les professeurs de mathématiques n'ont fait que très rarement des études historiques assez profondes pour qu'ils puissent faire eux-mêmes sans trop de besogne un cours d'histoire des mathématiques.

Ces considérations m'ont suggéré l'idée que, en attendant la publication d'un bon compendium historique, il serait utile de composer et de publier au moins un programme de cours d'histoire des mathématiques avec des renseignements bibliographiques, pour guider ceux qui, sans s'être attachés particulièrement à des recherches historiques, veulent rendre compte à leurs

élèves du développement des mathématiques. Il va sans dire que les historiens *ex professo* n'auront pas besoin d'un tel programme.

Mais comme une exposition détaillée du développement des mathématiques exigerait un espace de temps dont on ne saurait disposer que dans des cas tout à fait exceptionnels, il serait peu utile de publier le programme d'un cours complet. En général il me semble peu probable qu'on puisse consacrer à un cours universitaire d'histoire des mathématiques plus d'une année avec une leçon par semaine. Le nombre de leçons serait donc en tout environ trente, et si l'on pouvait donner à chaque leçon $1\,^1/_4 - 1\,^1/_2$ heure, le temps disponible pour tout le cours serait d'environ 38—45 heures. Sans doute, ce temps est très court, mais d'autre part il est nécessaire de limiter ses prétentions pour ne pas risquer de perdre tout. Dans le programme suivant j'ai donc réparti l'exposition de l'histoire des mathématiques en 30 leçons; dans des cas où le nombre des leçons peut être augmenté, il est très facile de modifier le programme d'après les circonstances.

Quand on n'aura à sa disposition qu'un temps aussi restreint, il est important d'en faire le meilleur usage possible. A cet effet, il faut premièrement se demander en général quels sujets on doit traiter dans le cours, et combien de temps on doit assigner aux différentes périodes de l'histoire des mathématiques.

Quant à la première question, il est évident qu'il faut exclure les détails qui n'ont qu'un intérêt secondaire pour le développement des mathématiques. De plus le cours d'histoire des mathématiques ne doit pas contenir seulement une table chronologique ou méthodique des découvertes, mais il doit surtout rendre compte du développement successif des méthodes ainsi que de leur enchainement historique, en vue de permettre aux auditeurs de mieux comprendre et d'apprécier l'état présent des mathématiques. On doit donc signaler les méthodes les plus importantes qui ont été les germes des théories de nos jours et dont celles-ci peuvent être considerées comme le complet développement. Mais il faut aussi appeler l'attention sur des méthodes qui ont été abandonnées pour l'une ou l'autre raison, si elles ont contribué à la découverte de résultats importants ou si une comparaison entre elles et les méthodes actuelles peut être instructive, p. ex. la résolution, à l'aide d'une algèbre géométrique, des équations des deux premiers degrés chez les Grecs; parfois il conviendra aussi de donner des notices sur des méthodes évidemment défectueuses si elles ont joué un rôle important, p. ex. sur l'usage des séries divergentes au 18^e siècle

et sur les recherches de l'école combinatoire en Allemagne au commencement de notre siècle.

Quant à la seconde question, il est naturel que l'histoire des mathématiques chez les Orientaux et en Europe au moyen âge ne doive être traitée que très sommairement. Pour ce qui concerne la géométrie grecque et les mathématiques modernes, la question est plus difficile. D'une part, le développement des mathématiques modernes a pour la science actuelle un intérêt plus grand, d'autre part la connaissance des progrès des mathématiques dans l'antiquité me semble très importante au point de vue pédagogique. Dans le programme, j'ai essayé de tenir le juste milieu entre les extrêmes en assignant à la géométrie grecque et aux mathématiques modernes à peu près le même nombre d'heures. Mais pour qu'il soit possible d'achever en 9 leçons l'exposition du développement des mathématiques à partir de la fin du 17^e^ siècle, il est nécessaire de renvoyer les notices historiques spéciales aux cours systématiques des différentes théories et d'en signaler dans le cours historique seulement les généralités.

Tels sont les principes que j'ai adoptés dans l'essai suivant. Je sais très bien qu'on peut faire des objections contre les détails de ce programme et il aura sans doute besoin d'être amélioré d'après les conseils d'une critique bienveillante pour atteindre mieux son but. Aussi reçevrai-je avec plaisir les observations que mes collègues voudront bien m'adresser à cet effet et je les insérerai dans la Bibliotheca Mathematica si elles sont rédigées sous une forme propre à être publiée.

1. Considérations générales sur l'étude de l'histoire des mathématiques. Aperçu historique du développement de cette étude à partir du milieu du 18^e^ siecle.

2. Connaissances mathématiques antérieures au commencement des recherches scientifiques; différentes manières de compter chez les peuples sauvages. — Les mathématiques chez les Egyptiens. Le manuel mathématique d'AHMES; calcul avec des quantièmes; résolution de différents problèmes. Arpentage; règles approximatives pour calculer des aires et des distances. — Les mathématiques chez les Chaldéens. Système sexagésimale de numération; divers théorèmes de géométrie.

3. Aperçu du développement des mathématiques chez les Grecs avant EUKLIDES. Signes numéraux et systèmes de numération. Abacus. Origine de la géométrie grecque: THALES.

4. PYTHAGORAS et l'école pythagoricienne. Arithmétique;

diverses classes de nombres et leurs propriétés. Géométrie; theorème sur le carré de l'hypoténuse. Problèmes plans.

5. Les trois problèmes célèbres de l'antiquité: quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle. HIPPOKRATES: quadrature des lunules. EUDOXOS: théorie des proportions. MENAICHMOS: sections coniques. DEINOSTRATOS: la quadratrice. PLATON: méthode analytique. ARISTOTELES.

6. EUKLIDES. Précis des 13 livres des *Elementa*.

7. Exposition plus détaillée du contenu des *Elementa*, principalement pour ce qui concerne les livres 1, 2, 5, 6.

8. Le 10^e^ livre des *Elementa*. Le 12^e^ livre et la méthode d'exhaustion. Les autres ouvrages d'EUKLIDES; les *Données*, les *Porismes*.

9. ARCHIMEDES. Aperçu de ses ouvrages. Détermination approximative de la circonférence du cercle. Théorèmes sur le volume et la surface de la sphère.

10. ARCHIMEDES (continuation). Quadrature de la parabole. Conoïdes et spheroïdes. Sections coniques. Problèmes solides. Théorèmes sur les hélices. — ERATOSTHENES. Détermination des nombres premiers à l'aide du crible.

11. APOLLONIUS. Aperçu de ses ouvrages. Le traité des sections coniques. Génération de ces courbes; leurs diamètres et asymptotes. Sur la question du lieux aux trois et aux quatres lignes. Construction des sections coniques à l'aide de tangentes. Propriétés focales. Problèmes des maxima et des minima.

12. APOLLONIUS (continuation). Propositions concernant la similitude de sections coniques. Propriétés des diamètres conjugués. Problèmes solides et leurs diorismes. Les autres ouvrages d'APOLLONIUS; *De sectione rationis, De sectione spatii, Sectio determinata.*

13. Géométrie grecque après APOLLONIUS. NIKOMEDES, DIOKLES, HYPSIKLES, HERON, SERENOS. PAPPOS: ses *Collections mathématiques.* Trigonométrie grecque: HIPPARCHOS, THEODOSIOS, MENELAOS, PTOLOMÆUS.

14. Arithmétique grecque après EUKLIDES. Calcul approximatif de racines carrées. NIKOMACHOS. DIOFANTOS: exemples de ses problèmes et des différentes méthodes dont il s'est servi.

15. Les mathématiques chez les Romains et chez les Byzantins: les travaux des agrimenseurs romains; BOËTIUS, PLANUDES, RHABDAS, MOSCHOPOULOS. — Les mathématiques des

Hindous; chiffres et système indien de numération; arithmetique et algèbre; analyse indéterminée; trigonométrie et géométrie.

16. Les mathématiques chez les Arabes: algorismus et algèbre (MUHAMMED BEN MUSA); trigonométrie; géométrie. — Les mathématiques en Europe an moyen âge: GERBERT, NEMORARIUS, LEONARDO PISANO, ORESME.

17. La renaissance des mathématiques en Europe. PEURBACH, REGIOMONTANUS, CHUQUET, PACCIOLI. Résolution des équations des 3ᵉ et 4ᵉ degrés par FERRO, CARDANO, TARTAGLIA et FERRARI.

18. Arithmétique et algèbre pendant le 16ᵉ siècle: RUDOLFF, STIFEL, STEVIN. Introduction successive de symboles algébriques. Trigonométrie et calcul numérique des fonctions trigonométriques naturelles: COPPERNICUS, TYCHO BRAHE, RHAETICUS, PITISCUS. Calcul du nombre π: VAN CEULEN.

19. Développement de l'algèbre par VIÈTE et ses contemporains; HARRIOT, GIRARD. Invention des logarithmes par NEPER. Calcul des tables logarithmiques par BRIGGS et VLACQ.

20. DESCARTES et sa *Géométrie*. Exposition détaillée de ce traité; géométrie analytique; théorèmes relatifs à la théorie des équations.

21. Propositions de DESARGUES et de PASCAL relatives à la géométrie projective. Recherches de FERMAT sur la théorie des nombres. Problèmes du calcul des probabilités résolus par PASCAL, FERMAT et HUYGENS.

22. Les précurseurs du calcul infinitésimal: FERMAT, CAVALIERI, ROBERVAL, HUDDE, SLUZE, WALLIS, BARROW. Problème des tangentes. Problème des maxima et des minima. Méthodes de quadrature.

23. Découverte du calcul infinitésimal par NEWTON et LEIBNIZ.

24. Développement du calcul infinitésimal par les BERNOULLI, TAYLOR, MACLAURIN, etc. — Progrès des autres branches des mathématiques à la fin du 17ᵉ siècle: WALLIS, HUYGENS, NEWTON, BROUNCKER, TSCHIRNHAUS, JACQUES BERNOULLI.

25. Diverses recherches dans la première moitié du 18ᵉ siècle: COTES, MOIVRE, STIRLING, ALEMBERT. — EULER: précis de ses oeuvres et de son action scientifique.

26. L'analyse supérieure à la fin du 18ᵉ siècle. LAGRANGE, LAPLACE, LEGENDRE: théorie des équations différentielles, intégrales définies, théorie des nombres, calcul des probabilités.

27. Développement de la géométrie moderne depuis la fin du 18e siècle: MONGE, CARNOT, PONCELET, MÖBIUS, STAUDT, PLÜCKER, STEINER. Géométrie non-euclidienne et à *n* dimensions: LOBATCHEVSKIJ, GRASSMANN, RIEMANN.

28. Progrès de l'analyse supérieure dans la première moitié du 19e siècle. Recherches sur les notions fondamentales de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal: CAUCHY. Fonctions elliptiques: ABEL, JACOBI. Fonctions abéliennes et hyperelliptiques.

29. Progrès de l'analyse supérieure (continuation). Théorie des suites: GAUSS, FOURIER. Théorie des équations et algèbre supérieure: ABEL, GALOIS, HAMILTON. Théorie des nombres: GAUSS, EISENSTEIN, DIRICHLET, KUMMER. Application de l'analyse à la géométrie: MONGE, GAUSS.

30. Développement des mathématiques depuis le milieu de notre siècle. Théorie des fonctions et calcul infinitésimal. Algèbre supérieure. Théorie des nombres. Géométrie.

Pour rédiger un cours d'après les indications de ce programme, il serait naturellement à désirer que les professeurs pussent recourir toujours aux sources, c. à d. aux ouvrages mêmes des mathématiciens. Mais comme plusieurs de ces ouvrages ne sont que difficilement accessibles et comme, du reste, une étude approfondie des sources coûterait un temps considérable, la plupart des professeurs seront sans doute forcés d'y renoncer. Pour cette raison je donne ici une liste de travaux historiques qu'ils pourront consulter pour la composition du cours. J'ai exclu tous les écrits qui ne sont pas rédigés en français, en allemand, en anglais ou en italien; j'ai signalé en premier lieu les publications les plus récentes et pour ce qui concerne les écrits publiés avant 1880 je n'ai fait mention que de ceux relatifs à l'histoire des mathématiques après l'an 1200 parce que les autres sont signalés très complétement dans le premier tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR. Les chiffres entre les crochets renvoient aux leçons pour lesquelles les écrits respectifs pourront être utilisés.

Ouvrages généraux.

BALL: A short account of the history of mathematics (London 1888).*

* Ce compendium a plusieurs mérites, mais il ne doit être utilisé qu'avec précaution, parce que M. BALL n'a pu prendre connaissance de certaines importantes recherches de l'histoire des mathématiques, ce qui l'a induit aussi à reproduire un grand nombre des erreurs des traités de HOEFER et de M. MARIE.

CANTOR: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. (Leipzig 1880.)

HANKEL: Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter (Leipzig 1874).

MATTHIESSEN: Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen (Leipzig 1878).

GÜNTHER: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876).

CHASLES: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie; 3[e] édition (Paris 1889).

LIBRI: Histoire des sciences mathématiques en Italię depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dixseptième siècle. I—IV. (Paris 1838—1841.)

GERHARDT: Geschichte der Mathematik in Deutschland (München 1877).

TODHUNTER: A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace (Cambridge 1865).

Ouvrages spéciaux.

[1.] GÜNTHER: Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung (Erlangen 1876). — TANNERY: Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes (Bullet. des sc. mathém. 9_2, 1885). — TREUTLEIN: Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten (Braunschweig 1890). — MÜLLER: Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie (Berlin 1887). — ENESTRÖM: Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques (Biblioth. Mathem. 1887). — FAVARO: Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella r. Università di Padova (Biblioth. Mathem. 1887). — MANSION: Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand (Biblioth. Mathem. 1888). — BOBYNIN: De l'étude sur l'histoire des mathématiques en Russie (Biblioth. Mathem. 1888). — ENESTRÖM: Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques (Biblioth. Mathem. 1889). — DICKSTEIN: Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne (Biblioth. Mathem. 1889). — CHRISTENSEN und HEIBERG: Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark (Biblioth. Mathem. 1889). — HOLST: Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen (Biblioth. Mathem. 1889). — FAVARO: Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in

[redacted]

Italia (Biblioth. Mathem. 1889). — Vicuña: Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques (Biblioth. Mathem. 1890). — Favaro: Il Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Biblioth. Mathem. 1889).

[2.] Weyr: Über die Geometrie der alten Ägypter (Wien 1884).

[3—14.] Günther: Geschichte der antiken Naturwissenschaft [Mathematik, Naturwissenschaft incl. Medizin und wissenschaftliche Erdkunde] (Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft in systematischer Darstellung **5**:1, 1888). — Gow: A short history of greek mathematics (Cambridge 1884). — Tannery: La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire (Paris 1887). — Allman: Greek geometry from Thales to Euclid (Dublin 1889). — Heiberg: Litterargeschichtliche Studien über Euklid (Leipzig 1882). — Euclides: Elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Vol. III. Librum X continens (Leipzig 1886). — Zeuthen: Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. Deutsche Ausgabe von R. von Fischer-Benzon (Kopenhagen 1886). — Günther: Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **4**, 1882). — Heath: Diophantos of Alexandria; a study in the history of greek algebra (Cambridge 1885).

[15.] Tannery: Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas; texte grec et traduction (Paris 1886).

[16—18.] Weissenborn: Gerbert. Beiträge zur Kentnis der Mathematik des Mittelalters (Berlin 1888). — Günther: Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525 (Berlin 1887). — Curtze: Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV. Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift Db. 86. den königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden herausgegeben (Thorn 1887). — Boncompagni: Della vita e delle opere di Leonardo Pisano (Roma 1852). — Giesing: Leben und Schriften Leonardos da Pisa. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 13. Jahrhunderts (Döbeln 1886). — Curtze: Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (Thorn 1870). — Marre: Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien (Bullett. bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880). — Gherardi: Einige

Materialen zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna Übers. von M. CURTZE (Berlin 1871). — TREUTLEIN: Das Rechnen im 16ten Jahrhundert (Abh. zur Gesch. der Mathem. **1**, 1877). — TREUTLEIN: Die deutsche Coss (Abh. zur Gesch. der Mathem. **2**, 1879).

[**19—21.**] NAPIER: The construction of the wonderful canon of logarithms. Translated from latin into english with notes by W. R. MACDONALD (Edinburgh 1889). — DESCARTES: La géométrie. Nouvelle édition [par A. HERMANN] (Paris 1886).

[**22—26.**] Commercium epistolicum de analysi promota. Réimprimé et complété par BIOT et LEFORT (Paris 1856). — LE PAIGE: Correspondance de René-François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une introduction (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884). — GERHARDT: Die Entdeckung der höheren Analysis (Halle 1855). — WEISSENBORN: Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange (Halle 1856). — MANSION: Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Extrait du Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale (Gand 1887). — REIFF: Geschichte der unendlichen Reihen (Tübingen 1889). — BRUNEL: Monographie de la fonction Gamma. (Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux **3**$_3$, 1886). — DELAMBRE: Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789 (Paris 1810).

[**27.**] LORIA: Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Vorbesserungen seitens des Verfassers ins deutsche übertragen von F. SCHÜTTE. (Leipzig 1888). — CHASLES: Rapport sur les progrès de la géométrie (Paris 1870). — REYE: Die synthetische Geometrie im Alterthum und in der Neuzeit (Strassburg 1886). — LORIA: I poligoni di Poncelet. Discorso (Torino 1889). — DIDION et DUPIN: Sur la vie et les ouvrages de J. V. Poncelet (Paris 1869). — CLEBSCH: Zum Gedächtniss an Julius Plücker (Abhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen **16**, 1872).

[**28—30.**] BERTRAND: Rapport sur les progrès récents de l'analyse mathématique (Paris 1867). — SACHSE: Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen durch trigonometrische Reihen (Göttingen 1879). — TODHUNTER: A history of the calculus of variations during the XIXth century (Cambridge 1861). — BAUMGART: Über das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine

vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheorems in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien (Leipzig 1885). — VALSON: La vie et les travaux de Cauchy (Paris 1868). — SARTORIUS: Gauss zu Gedächtniss (Leipzig 1856). — ENNEPER: Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte (Halle 1876). — KÖNIGSBERGER: Zur Geschichte der Theorie des elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29 (Leipzig 1879). — BJERKNES: Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique (Paris 1885). — DIRICHLET: Gedächtnissrede auf C. G. J. Jacobi (Abh. der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1852). — KUMMER: Gedächtnissrede auf G. P. Lejeune-Dirichlet (Abh. der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1860). — POINCARÉ: Notice sur les travaux scientifiques de Henri Poincaré (Paris 1886). — SMITH: On the present state of some branches of pure mathematics (Proceed. of the London mathem. soc. **8**, 1876). — CAYLEY: Address (Report of the British Association 1883; traduite en français dans le Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884).

J'annexe à la fin une indication des cours universitaires d'histoire des mathématiques qui, à ma connaissance, seront professés en 1890.*

Heidelberg. M. CANTOR: Histoire des mathématiques chez les Egyptiens, les Chaldéens et les Grecs. (Deux leçons par semaine.)

Padova. A. FAVARO: Histoire des mathématiques en Italie depuis ARCHIMEDES jusqu'à LEONARDO PISANO. (Cours libre; deux leçons par semaine.)

Gand. P. MANSION: Cours encyclopédique (voir Biblioth. Mathem. 1888, 33—35). Cours spécial sur l'authenticité des six postulats d'EUKLIDES et sur les origines de la géométrie non euclidienne. (Une leçon par semaine.)

Moskwa. V. BOBYNIN: Histoire des mathématiques jusqu'au milieu du 18e siècle. (Deux leçons par semaine.)

* A *Kjöbenhavn*, M. ZEUTHEN a professé pendant l'année académique 1888—89 un cours d'histoire des mathematiques jusqu'à NEWTON et LEIBNIZ inclusivement (deux leçons par semaine). Il a l'intention de renouveler ce cours tous les trois ans. — A *Cambridge*, M. BALL a fait en 1888 un exposé de l'histoire générale des mathématiques et il espère pouvoir consacrer plus tard une suite de leçons à quelques points spéciaux du développement des mathématiques.

Über eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

Die Angaben der *Tabulae Codicum manuscriptorum Bibliothecae Palatinae Vindobonensis* (7 Bände bis 1875) sind principiel so kurz, dass denjenigen, die sich mit einem Gegenstande eingehender beschäftigen, eine nähere Auskunft erwünscht ist. Meine Studien haben mich auf einige mss. jener Bibliothek geführt, und Herr Alfred Göldlin von Tiefenau hat mir verschiedene genaue Notizen zukommen lassen, für welche öffentlich zu danken ich gerne Gelegenheit nehme, um so mehr, als ich nicht immer in der Lage war, sie in extenso anzubringen. Dahin gehört die, Anfangs August 1889 mir zugekommene Nachricht über eine in Cod. Pal. Vind. 5280 von Jacob Lateranus verfertigte Bearbeitung von Zarkali's *Saphea*, die unedirt und fast unbekannt ist. Auf Jacob Lateranus war ich in meinen *Études sur Zarkali* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 17 (1884), p. 790; Sonderabdruck S. 50) gekommen und konnte in meiner noch nicht beendeten Schrift über die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters (S. 590) nur auf eine anderweitige Erledigung hinweisen. Ich gebe hier zunächst wörtlich die Mitteilung des Herrn Göldlin, woran ich eine kurze Bemerkung knüpfen werde.

Die Handschrift beginnt (f. 1 verso):

Jacobus Lateranus Andree Laterano fratri suo germano S. d.

Darnach folgt ein Poema: »Tardis si loquimur nos tibi litteris« . . .

und weiter:

J. L. Andrae L. f. suo g. item S. d. || Ferunt greci frater germane . . . Ex Colonia Agrippina 1504. || Jacobus Lateranus Joanni Tritemio viro eruditissimo Abbati in Spanheim patrono suo s. d. || Longe mihi esset jucundissima v. p. eius memoria . . . Ex Colonia 1504. || Jacobi Laterani ex Landoia bavariae in Sapheam prologus. || Patris Abrusakh (sic) Azarchelis Saphea.

Jetzt folgen die einzelnen Capitel und Paragraphen:

Caput quoque de fabrica primum incipit. L. F.:

Doctrina prima quomodo designetur in corpore. — Doctrina secunda quomodo in plano designetur. — Doctrina tertia de fabrica postice.

Caput secundum de usu postice.

Doctrina prima de gradu solis. — Doctrina secunda de altitudine solis. — Doctrina tertia de Aszimuth (sic) solis. — Doctrina quarta de usu gnomonis. — Doctrina quinta de hora inequali.

Caput tertium de opere Saphcae.

Doctrina prima de gradu solis. — Doctrina 2^{a} de declinatione solis. — Doctrina 3^{a} de altitudine solis meridiana. — Doctrina 4^{a} de arcu solis diurno. — Doctrina 5^{a} de hora solis diurna. — Doctrina 6^{a} de hora solis nocturna. — Doctrina 7^{a} de hora inaequali. — Doctrina 8^{a} de crepusculis. — Doctrina 9^{a} de Aszimuth solis etc. — Doctrina 10^{a} de signorum ascensionibus. — Doctrina 11^{a} de ascendente. — Doctrina 12^{a} de domibus erigendis. — Doctrina 13^{a} de latitudine regionis. — Doctrina 14^{a} de regionum longitudine. — Doctrina 15^{a} de stellae ignotae per notam aliam inventione. — Doctrina 16^{a} de motu lunae.

De ascendente Spherae obliquae.

Nach wenigen Zeilen dieses Capitels bricht der Text in unserem Manuscript ab; der Schluss fehlt. Eine Widmung ist nicht vorhanden. — So weit die Mitteilung des Herrn GÖLDLIN, aus welcher sich sofort schon äusserlich ergiebt, dass hier eine ganz andere Bearbeitung der, von ABU ISHAK AL-ZARKALI (hier »Pater ABRUSAKH AZARCHEL») erfundenen Scheibe» (*Saphaea*) vorliege, als die von SCHONERUS 1534 herausgegebene, welche ich in meinen *Etudes zur Zarkali* ausführlich beschrieben habe. Dort heist es aber in der XXX. *doctrina* mit Beziehung auf STOFFLER: »Ne autem doctrina haec intacta relinquatur placuit subiungere scriptum JACOBI LATERANI in usum gnomonis posticae ita incipientis: Si scire voles puncta umbrae rectae vel versae» etc.; die Stelle umfasst wenige Zeilen und dürfte dem II. Cap. »de usu posticae» entlehnt sein.

Über JACOBUS LATERANUS habe ich nirgends Näheres erfahren können. Seine Widmung an TRITHEMIUS (geb. 1462), — dessen historischer Credit selbst von seinem Biographen SILBERNAGEL (1868) preisgegeben ist — beweist wenigstens, dass TRITHEMIUS wissenschaftliche Männer patronisirte.

Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques.

Par G. VICUÑA à Madrid.

Dans cette notice je me restreins aux écrits imprimés en Espagne ou publiés par des espagnols. Par conséquent, je ne fais pas mention des ouvrages étrangers consacrés à l'étude de l'histoire des mathématiques en Espagne dans l'antiquité et au moyen âge. Je me permets seulement de remarquer ici que cette histoire embrasse plusieurs différentes époques, savoir: 1) l'époque hispano-romaine; 2) l'école florissant à Séville au 7^e siècle, à laquelle appartenait au premier lieu ISIDORE; 3) la première période arabo-espagnole aux temps du Khalifat indépendant à Cordoue; 4) l'action scientifique, à peu près contemporaine, dans l'ancien Condat de Barcelone, vers la fin du 10^e siècle; 5) les siècles suivants, où se trouvait à Tolède un foyer littéraire, fondé par ARZACHEL au 11^e, et ayant obtenu son plus grand éclat par le roi ALPHONSE LE SAVANT au 14^e siècle; on sait qu'un grand nombre d'astronomes et de géomètres castillans, arabes et juifs s'y assemblèrent et que, de même, beaucoup d'étrangers (p. ex. GÉRARD de Crémone) sont venus d'y puiser des connaissances, pour les répandre ensuite dans toute l'Europe. On pourrait ajouter à la liste précédente aussi l'école scientifique de Majorque, dont l'existence a été due au grand RAYMOND LULLE.

J'ai laissé de côté aussi les écrits publiés dans nos colonies actuelles et dans les contrées de l'Amérique où l'on parle l'espagnol. Pour ce qui concerne les indications bibliographiques, j'ai pris comme modèle la *Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques* de G. ENESTRÖM (Bibliotheca Mathematica 1889, 1—14) et je me limite comme lui à l'histoire des mathématiques pures.

1775.

Saverien, Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas, traducida por M. RUBIN DE CELIS. Madrid 1775.

4°, XXIV + 486 p. — Avertissement du traducteur, avec des renseignements bibliographiques espagnoles, p. IX—XVI. Histoire de l'Arithmétique p. 1—31, celle de l'Algèbre p. 31—56, celle de la Géométrie p. 57—115; puis l'histoire de l'Astronomie, de la Gnomonique, de la Navigation, etc. A la fin, p. 415—486, une notice sur les mathématiciens les plus célèbres.

1788.

Andres, J., Disertacion sobre las causas de los pocos progresos que hacen las ciencias en estos tiempos, dicha en la Real Academia de Ciencias y buenas letras de Mantua, traducida del italiano por don Carlos Andres. Madrid 1788.
4°. 4 + 71 p. — L'auteur cherche à démontrer que les progrès des mathématiques dans la seconde moitié du XVIIIe siècle ont été nuls en comparaison avec ceux des époques antérieures; travail historique très érudit. Il y a une édition italienne: le traducteur de celle-ci était frère de l'auteur.

1804.

Antillon, I., Necrologia de Méchain.
Variedades de ciencias, literatura y artes (Madrid) 4. 1804, 244—248. — Il y a des détails authentiques sur la mort du fameux astronome et géomètre français, ayant eu lieu à Castellon de la Plana le 20 Septembre 1804.

1846.

Navarrete, M. F., Disertacion sobre la historia de la Náutica y de las ciencias matemáticas que han contribuido à sus progresos entre los españoles. Madrid 1846.
4°. 421 p. — Contient l'histoire de la science navale depuis l'antiquité jusqu' au milieu du 16e siècle; à la fin il y a quelques notes où l'auteur indique les ouvrages publiés dans cette science jusqu' à la fin du 18e siècle.

1849.

Pascual, A., Elogio del Ilmo Sr. D. José Mariano Vallejo. Madrid 1849.
4°. 20 p.

1850.

Nota histórica de Francisco Vieta.
Madrid. Academia de ciencias. Revista de los progresos de las ciencias exactas, físicas y naturales 1. 1850, 416—419. — Traduction du français.

1851.

Monteverde, M., Discurso sobre el immenso desarrollo que desde el siglo XVII han recibido las matemáticas.
Madrid. Academia de ciencias. Memorias. 1853, 19—28. — Discours de réception lu à la séance du 22 Juin 1851.

Nota historica de Mac-Laurin.
Madrid. Academia de ciencias, Revista 2. 1851. 275—277. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1850.

1853.

cent, A. J. H., Sobre el teorema de Pitágoras.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **3**, 1853, 1—10. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1852.

ticia histórica del Cálculo de variaciones.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **3**, 1853, 205—207. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1852.

mboldt, De los sistemas de cifras usados por diferentes pueblos y del origen de las cifras indias.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **3**, 1853, 207—241. — Traduction faite sur la traduction française par WOEPCKE, publiée dans les Ann. de mathém. 1851.

1854.

t, Sobre la locucion, dividir una recta en media y extrema razon.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **4**, 1854, 1—4. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1853.

mé y Chasles, Informe sobre la Memoria de Woepcke: ensayo de una restitucion de los trabajos perdidos de Apolonio.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **4**, 1854, 65—83. — Traduction d'une notice insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences [de Paris] 1853.

elacion del diámetro con la circunferencia, segun Tolomeo.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **4**, 1854, 513—515. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1854.

1855.

ravesedo, F., Reseña del progreso de las matemáticas entre los antiguos y el obtenido por los modernos. Madrid 1855.
4°, 15 p. — Thèse du grade de docteur en philosophie.

1856.

esselmann, Sobre los diversos nombres del Algebra.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **6**, 1856, 318—320. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de mathém. 1855.

1858.

énderos, M. F., Discurso sobre la importancia del estudio de las matemáticas.
Madrid, Academia de ciencias, Memorias **4**, 1858, 431—444. — Discours de réception, essentiellement historique, lu à la séance du 21 Novembre 1858.

arco, A. R. [Réponse au discours précédent au nom de l'Académie.]
Madrid, Academia de ciencias, Memorias **4**, 1858, 445—457.

1859.

Vazquez Queipo, V., Essai sur les systèmes métriques et monétaires des anciens peuples depuis les premiers temps historiques jusqu'à la fin du Khalifat d'Orient. I—III. Paris 1859.

4°. Tome 1er: XXII + 608 p. + 1 pl. — Tome 2d: XIV + 455 p. — Tome 3e: 663 p. — L'objet de ces recherches est expliqué ainsi dans l'avertissement du premier volume: »Ce livre est par sa nature du domaine de l'histoire et de l'archéologie. Il appartient, néanmoins, par son objet spécial, aux sciences mathématiques«.

1860.

Vallespinosa, F., Resúmen histórico de los progresos de las matemáticas desde los tiempos mas remotos hasta nuestros dias. Madrid 1860.

4°, 16 p. — Thèse du grade de docteur ès sciences.

1861.

Elizalde, J. A., Resúmen histórico de los progresos de las matemáticas desde los tiempos mas remotos hasta nuestros dias. Madrid 1861.

4°, 31 p. — Thèse du grade de docteur ès sciences.

1862.

Picatoste, F., Vocabulario matemático-etimológico, seguido de un breve indice de los matemáticos célebres y de sus obras mas notables. Madrid 1862.

8°, 135 p. — La liste des mathématiciens se trouve aux pages 123—135.

1863.

Rico, M., Libros del saber de Astronomia del rey D. Alfonso X de Castilla, copilados, anotados y commentados. I—V. Madrid 1863—1867.

Folio. — Le discours préliminaire (XCII p.) du tome 1er est une étude bibliographique avec quelques indications sur l'état des mathématiques au temps d'Alphonse le Savant. — Dans le tome 2d il y a une préface avec des notices sur les commentateurs espagnol de Sacrobosco. Dans les trois autres tomes on trouve quelques indications historiques.

1866.

Echegaray, J., Historia de las matemáticas puras en España. Madrid 1866.

4°. 33 p. — Discours de réception à l'Académie des sciences; favorable à l'Espagne.

Valle, L. [Réponse au discours précédent au nom de l'Académie.]
Insérée aux pages 37—53 de l'écrit précédent. — Aperçu historique dans le même sens.

Balanzat, J., Influencia de la filosofia matemática en el estudio y progreso de las ciencias exactas. Madrid 1866.
4°, 27 p. — Discours de réception à l'Académie des sciences. Avec des renseignements historiques.

Azofra, M. M. [Réponse au discours précédent au nom de l'Académie.]
Insérée aux pages 27—55 de l'écrit précédent. — Essentiellement historique.

1867.

Gomez de Cadiz, E., Reseña histórica de las matemáticas.
La Razon. Periódico de ciencias filosóficas y matemáticas (Madrid 1867), 1—4, 9—12, 17—18. — Il n'a paru que trois cahiers de cette revue; les articles ne sont pas signés, mais l'auteur en était GOMEZ.

Gomez de Cadiz, E., Coleccion de biografias de las eminencias en ciencias matemáticas. Madrid 1867.
4°, 24 p. — Notices biographiques sur LAGRANGE (p. 3—5); MARIA AGNESI (p. 6—8); GALILEO (p. 9—13); D'ALEMBERT (p. 14—16); ARQUIMEDES (p. 17—21); LAPLACE (p. 22—24). — C'est tout ce qui à paru de ce recueil, publié comme supplément à La Razon.

Dos cartas del Emperador Carlos V á Rabelais sobre la cuadratura del circulo.
Madrid, Academia de ciencias, Revista **17**, 1867, 63—64. — Traduction de deux fausses lettres communiquées par CHASLES à QUETELET et publiées par celui-ci dans l'Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles 1867.

1873.

Bassecourt, J., Historia y clasificación de las matemáticas. Granada 1873.
4°, 26 p. — Discours lu à l'Université pour l'inauguration du cours 1873—1874. — Travail faible; pas de renseignements espagnols.

1874?

Serrate, J. M., Historia de las matemáticas. Zaragoza [sans date].
4°, 40 p. — Peu de renseignements espagnols.

1875.

Marquez, F. P., Breve reseña de la historia de las ciencias náuticas en España. Madrid 1875.
4°, 67 p. — Discours de réception à l'Académie des sciences. Le troisième supplément contient la notice: *Sobre los progresos de la Mecanica desde el Renacimiento hasta mediados del siglo XVIII* (p. 58—62).

Vicuña, G., Cultivo de las ciencias fisico-matemáticas en España. Madrid 1875.
4°, 78 p. — Discours lu à l'Université pour l'inauguration du cours 1875—1876. Avec des renseignements espagnols.

1876.

Olmedilla, J., Newton.
Revista Europea (Madrid) **8**, 1876, 207—210.

1878.

Clariana, L., Importancia del método leibnitziano.
Cronica cientifica (Barcelona) **1**, 1878, 169—171. — Notice critique et historique.

1880.

Marre, A., Dos reglas de la Aritmética de los Indos.
Cronica cientifica (Barcelona) **3**, 1880, 153—155, 177—178. — Traduction d'une note publiée dans les Ann. de Mathém. 1879.

Eneström, G., Cartas inéditas de Bernoulli à Euler.
Cronica cientifica (Barcelona) **3**, 1880, 329—335, 353—357, 377—382. — Traduction d'un mémoire publié dans le Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar **5**, 1880.

1881.

Leon, E., De la importancia de la geometria pura. Valencia 1881.
4°, 44 p. — Histoire de la géométrie pure à partir du 17e siècle; discours prononcé à l'université de Valencia pour l'inauguration du cours 1881—1882.

Ruiz Arbol, E., Tres sustraendos.
El Liberal (Madrid), 8 Mai 1881 (3 colonnés); sur SERVET, NUÑEZ et SANTA CRUZ à propos de leurs découvertes scientifiques, avec des aperçus sur l'histoire des mathématiques en Espagne.

1882.

Rodriguez Villa, A., D. Sebastian Fernandez de Medrano Director de la real Academia militar de Bruselas.
Revista Contemporánea (Madrid) **37**, 1882, 5—29. — Notice bio-bibliographique sur ce mathématicien espagnol du XVIIe siècle.

1883.

Vicuña, G., Los matemáticos del siglo XVII.
Rev. Contemporánea (Madrid), Juillet et Août 1883, 1—21. — Conférence à l'Athénée (Ateneo cientifico y literario) de Madrid. — L'auteur a prononcé en 1869 d'autres discours sur l'histoire des mathématiques mais ils n'ont pas été publiés.

Merino, M., Noticia necrológica de A. Aguilar.
Madrid. Academia de ciencias. Anuario 1883, 174—185. — Les notices nécrologiques de l'Anuario, dont je ne mentionne que celles

relatives aux mathématiciens, sont redigées par MERINO comme secrétaire de l'Académie. AGUILAR était son prédécesseur comme secrétaire et comme directeur de l'Observatoire astronomique.

Domenech, J., Breves consideraciones acerca del progreso del Algebra en los tiempos modernos.
Barcelona, Academia de ciencias, Acta de la sesion inaugural 1883, 35—44.*

1885.

Saavedra, E., Cuadratura del circulo.
Madrid, Academia de ciencias, Anuario 1885, 116—126. — Rapport sur certaines solutions présentées à l'Académie avec un résumé historique de la question.

Mundi, S., Una duda histórica sobre el teorema $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Crónica cientifica **8**, 1885, 433—435.

1886.

Merino, M., Sobre las tablas de logaritmos publicadas en España y de que hay ejemplares en la biblioteca de la Academia.
Madrid, Academia de ciencias, Anuario 1886, 265—281. — Cette Notice sera continuée dans l'Annuaire de 1890 (sous presse).

Merino, M., Noticia necrológica de Subercase.
Madrid, Academia de ciencias, Anuario 1886, 286—293.

Becerra, M., Historia y filosofia de las matemáticas puras y aplicadas. Madrid 1886.
4°, 97 p. — Discours de réception à l'Académie des sciences.

Saavedra, E. [Réponse à ce discours au nom de l'Académie, sur les femmes qui se sont distinguées dans les mathématiques.]
Insérée aux pages 101—108 de l'écrit précédent.

Pujazon, C., Sobre la duda historica $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Cronica cientifica **9**, 1886, 105—117.

---

* Cette Académie, fondée à Barcelone en 1764 et réformée en 1770, a eu assez d'influence sur les progrès scientifiques et industriels de Catalogne. Voici quelques travaux de ses archives se rapportant à l'histoire des mathématiques, dont je dois la connaissance au professeur à l'Université de Barcelone J. R. LUANCO, le savant commentateur de RAYMOND LULLE:

Gallarda, J., Memoria sobre la utilidad, origen y progresos de las Matemáticas puras. (Lue à la séance du 27 Juin 1798.)

Capalá, F., Memoria sobre un Analisis de la Aritmética de los infinitos, inventado por el Dr. Wallis, inglés, en el siglo XVII. (Lue à la séance du 20 Juin 1804.)

Mundi, S., Consideraciones sobre el progreso matemático. (Lues à la séance du 22 Octobre 1874.)

Romero, A., Historia é importancia de los estudios de la Geometria moderna. (Lue à la séance du 14 Février 1878.)

Echegaray, E., D. Lucio del Valle. El arte del ingeniero y el cultivo de las matemáticas en España.
La España del siglo XIX colección de conferencias históricas en el Ateneo de Madrid (Madrid 1886). 189—215. — A partir de la page 208 [illegible] question les sciences mathématiques.

Agapito, L. Los grandes geómetras.
Revista de Vizcaya (Bilbao) 3. 1886. 14—19. — Notice biographique [illegible]

1887.

Navarro, L. Errores en matemáticas. Salamanca 1887.
4°. [illegible] — Ouvrage critique et historique.

Merino, M. Noticia necrológica de F. P. Marquez.
[illegible] Academia de ciencias. Anuario 1887, 135—170.

1888.

Galdeano, Z. G. Crítica y síntesis del Algebra. Toledo 1888.
4°. 121 p. — Sur les idées fondamentales et l'histoire de l'Algèbre.

Arrillaga, F. de P. Ideas capitales que informan el Cálculo infinitesimal. Madrid 1888.
4°. 84 p. — Discours de réception à l'Académie des sciences. — Notice [illegible] sur le développement du Calcul infinitésimal.

Vicuña, G. Réponse à ce discours au nom de l'Académie des sciences, avec une bibliographie espagnole de l'analyse infinitésimale.
Dans le volume [illegible] du travail précédent.

Vicuña, G. Lanz y Betancourt. Bosquejo biblio-biográfico.
Madrid. Academia de ciencias. Revista 22. 1888. 20 p. — Étude sur les [illegible] cinématique industrielle et sur leur ouvrage [illegible] à Paris en 1808 avec des indications sur les mathématiciens espagnols de cette époque.

1889.

Clariana, L. Importancia de las funciones en general. Barcelona 1889.
4°. 45 p. — Discours pour l'inauguration du cours 1888—1889 à l'Académie des Sciences naturelles et Arts de Barcelone, imprimé en 1889 par ses élèves à l'Université. L'auteur y examine le développement de la théorie des fonctions algébriques à partir de JEAN BERNOULLI.

Clariana, L. L'esprit des mathématiques dans les temps modernes.
Congrès scientifique international des catholiques tenu à Paris du 8 Mars au 13 Avril 1888. 2. 1889. 501—513. — Travail remarquable critique et historique.

Mundi, S. Fundamentos e importancia de la Geometría proyectiva. Barcelona 1889.
4°. 42 p. — Discours lu à l'Université pour l'inauguration du cours 1889—1890. — Travail critique et historique sur le développement de la géométrie à partir de DESARGUES.

Alonso, A. V., Catálogo de los matemáticos españoles.
Revista Calasanciana (Madrid) 1889, 138—148. — Introduction historique au Catalogue que l'auteur promet de publier plus tard.

Reyna, T., Biografia del Exmo Sr mariscal de Campo D. Pedro A. de la Llave.
Memorial de artilleria. (Madrid) 1889.. 39 p.

Merino, M., Noticia necrológica de F. Perrier.
Madrid, Academia de ciencias, Anuario 1889, 200—212.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans le mémoire *De summis serierum reciprocarum* inséré dans les Commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ, t. VII: ad annos 1734 et 1735 (Petropoli 1740) p. 123—134, EULER a signalé et démontré pour la première fois la formule importante:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Une démonstration de cette formule, presque identique à celle d'EULER, fut publiée aussi, deux années plus tard, par JEAN BERNOULLI dans ses *Opera Omnia*, t. IV (Lausannae et Genevae 1742) p. 20—25. BERNOULLI ne fait pas mention du mémoire d'EULER, mais d'autre part il ne dit pas expressément qu'il a trouvé la formule lui-même. Pour cette raison, on l'a généralement attribuée à EULER,[1] qui, incontestablement, l'a publiée le premier.

Cependant, dans un ouvrage récemment publié: *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889), M. REIFF a attribué catégoriquement la découverte de la formule citée à JEAN BERNOULLI,[2] en admettant toutefois qu'EULER l'a trouvée plus tard sans avoir eu connaissance de la découverte de BERNOULLI.[3]

Je n'ai pu voir dans l'ouvrage de M. REIFF aucune raison de cette attribution, contraire, autant que je sache, à l'indication de tous les auteurs précédents. En tout cas, il est certain que M. REIFF s'y est trompé; en effet, il résulte de la correspondance entre JEAN BERNOULLI et EULER que celui-ci a trouvé le premier la valeur exacte de $\sum \frac{1}{x^2}$. Voici les renseignements particuliers que nous y trouvons sur la découverte de cette somme.

Vers le 1 mai 1736, EULER adressa à BERNOULLI une lettre, actuellement perdue, où il l'avertit qu'il avait trouvé la formule:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{cc}{6},$$

c désignant la circonférence du cercle dont le diamètre est 1.

A cette avertissement BERNOULLI ne répondit que le 2 avril 1737 par une lettre,[4] d'où j'extrais le passage suivant:

Percepi porro te invenisse modum summandi seriem fractionum

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$$

h. e.
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.,$$

cujus nempe denominatores procedunt ut quadrata numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, &c., id quod olim fratri meo JACOBO imperscrutabile fuit, sicuti ipse fatetur in tractatu suo de seriebus infinitis p. 254; invenisti namque summam illius seriei $= \frac{cc}{6}$ nominando scilicet diametrum circuli $= 1$ ejusque circumferentiam $= c$; volebat meus DANIEL fontem ejus indagare sed irrito successu, quamquam in postremis tuis litteris ad ipsum aliquid ni fallor de fundamento ei aperueris; cum primum vero mihi nominasset summam a te inventam $\frac{cc}{6}$ prætereaque nihil, indeque ego intellexissem summam seriei reduci ad quadraturam circuli, curiosus unde totum detexi mysterium, in subsidium vocato elegantissimo aliquo theoremate NEWTONI, quod sine demonstratione exstat in ejus Algebra p. 251 ... ubi traditur modus quo ex coëfficientibus terminorum datæ alicujus æquationis determinatur summa non tantum radicum, sed et ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum &c.

Pour persuader EULER de l'exactitude de sa méthode, BERNOULLI indique les valeurs de $\sum \frac{1}{x^4}$ et $\sum \frac{1}{x^6}$, qu'il avait trouvées par la même voie.

La réponse d'EULER à cette communication est datée le 27 août 1737;[5] quant à la méthode signalée par BERNOULLI, il remarque:

Summatio serierum reciprocarum potestatum parium quam scripsisti, apprime cum mea methodo congruit, quippe quæ theorematibus circa naturam coëfficientium versantibus nititur.

Après cela, EULER expose une autre méthode de démonstration, où l'on part de l'identité:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2,$$

et qui conduit au but plus tôt que la première. Dans une lettre du 6 novembre 1737,[6] BERNOULLI admet aussi que cette méthode est plus élégante que la sienne.

Il s'ensuit des passages que je viens de rapporter que:

1) EULER a trouvé le premier la formule $\sum \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ par deux méthodes différentes;

2) JEAN BERNOULLI, après avoir été informé de cette découverte, a retrouvé l'une des méthodes d'EULER;

3) par conséquent, la découverte de la formule doit être attribuée à EULER.

[1] Il y a sur la découverte de cette formule une monographie de J. MELDERCREUTZ: *De summatione seriei reciprocae e quadratis numerorum naturalium* (Holmiæ 1755 in-4°).

[2] Quant à l'époque de la découverte, M. REIFF n'en donne qu'une limite inférieure, ou plutot *deux* limites inférieures, différentes entre elles. En effet, il dit à la page 59: »Es ist später nach LEIBNIZ' Tode [c. à d. après 1716] JOH. BERNOULLI gelungen, diese Reihe zu summieren». Mais à la page suivante il remarque relativement à la note de JEAN BERNOULLI: *Summatio seriei* etc.: »Jedenfalls ist sie nach dem Tode JACOB BERNOULLIS entstanden, also nach 1705».

[3] REIFF, l. c. p. 94.

[4] Cette lettre a été publiée par FUSS dans la *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18e siècle* (S:t Pétersbourg 1843).

[5] Cette lettre inédite est gardée dans la bibliothéque de l'académie des sciences à Stockholm.

[6] Cette lettre a été publiée par moi dans *Trois lettres inédites de Jean 1er Bernoulli à Léonard Euler* (Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, 1880).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

W. W. R. Ball, A HISTORY OF THE STUDY OF MATHEMATICS AT CAMBRIDGE. Cambridge 1889. 8°, XVI + 264 p.

M. BALL n'a pas eu l'intention de rendre compte dans cet ouvrage des résultats scientifiques des études mathématiques à l'université de Cambridge. Il remarque lui-même dans la préface: »Les sept premiers chapitres sont consacrés à une énumération, en ordre chronologique, des plus éminents mathématiciens à Cambridge. En général, je me suis contenté de mentionner le sujet de leurs plus importants ouvrages et d'indiquer les méthodes dont ils se sont servis, mais je n'ai pas cherché à donner une analyse détaillée de leurs écrits. Ces chapitres portent nécessairement en quelque sorte le caractère d'un index».

Comme ces sept chapitres embrassent la partie principale du livre de M. BALL, il s'ensuit que cette partie est moins historique que biographique et bibliographique. Mais comme elle renferme un grand nombre d'indications qu'on ne trouve réunies dans aucun autre livre et de renvois à des monographies, elle pourra être très utile dans certaines recherches historiques. Quant aux 4 derniers chapitres, ils contiennent une notice historique sur l'enseignement à Cambridge en général et sur l'enseignement des mathématiques en particulier, ainsi qu'un aperçu de l'histoire de cette université. A la fin on trouve un excellent index contenant en même temps une table alphabétique des auteurs et une table analytique des matières.

Nous avons déjà mentionné que M. BALL a divisé la partie principale de son ouvrage en 7 chapitres. En voici les titres: I. *Mediæval mathematics.* II. *The mathematics of the renaissance.* III. *The commencement of modern mathematics.* IV. *The life and works of Newton.* V. *The rise of the Newtonian school.* VI. *The later Newtonian school.* VII. *The analytical school.* Parmi les mathématiciens sur lesquels l'auteur a donné des renseignements plus détaillés nous citerons RECORDE, BRIGGS, OUGHTRED, WALLIS, BARROW, WHISTON, COTES, WOODHOUSE et nos contemporains DE MORGAN, MAXWELL, GREEN; le chapitre sur NEWTON occupe seul 23 pages.

Dans les cas où nous avons pu les contrôler, nous avons en général trouvé exactes les indications de M. BALL. Parfois il a reproduit sans réserve des notices d'auteurs précédents qui ont dû être corrigées. Nous ne nous y arrêterons pas dans cette brève analyse et nous nous permettrons de signaler seulement en passant une telle indication. A la page 40, M. BALL re-

marque: »In 1668 he [PELL] issued in London a new edition of BRANKER's translation from the Dutch of RHONIUS's algebra, with the addition of considerable new matter; in this work the symbol $\div$ for division was first employed». Ici il faut lire »Highdutch» (allemand) au lieu de »Dutch» (néerlandais), il convient de faire observer que le nom exact de l'auteur dont il s'agit était RAHN, et il faut ajouter que le signe $\div$ a été employé déjà dans l'original allemand publié en 1659 sous le titre *Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst* (voir Biblioth. Mathem. 1887, p. 96).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

JORDANI NEMORARII GEOMETRIA VEL DE TRIANGULIS LIBRI IV. ZUM ERSTEN MALE NACH DER LESART DER HANDSCHRIFT DB. 86 DER KÖNIGL. ÖFFENTLICHEN BIBLIOTHEK ZU DRESDEN HERAUSGEGEBEN VON **M. Curtze.** (Mitteilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. VI.) Thorn, Lambeck 1887. 8°, (2) + XV + 50 p. + 5 pl.

Cette édition de la *Geometria* de NEMORARIUS est précédée d'une introduction contenant des notices biographiques et bibliographiques ainsi qu'un aperçu des quatre livres de l'ouvrage de NEMORARIUS. Au début, M. CURTZE fait observer que c'est le prince BONCOMPAGNI qui a démontré le premier l'identité entre le mathématicien JORDANUS NEMORARIUS et le *frater* JORDANUS DE SAXÔNIA, qui fut élu en 1222 général de l'ordre des Dominicains. Parmi les livres imprimés de NEMORARIUS signalés par M. CURTZE, quatre ont été édités avant nos jours, savoir: *Arithmetica libris X demonstrata* (Paris 1496, publiée par LEFÈVRE D'ETAPLES; nouv. éd. Paris 1514); *Algorismus demonstratus* (Nürnberg 1534, publié par SCHÖNER et attribué à REGIOMONTANUS jusqu'à notre siècle); *De ponderibus* (Nürnberg 1533, publié par APIANUS) dont une autre rédaction fut éditée en 1565 à Venise; *Planisphærium*, publié en 1507, 1536 et 1558 à la suite du *Planisphærium* de PTOLEMÆUS. A cette liste on pourrait ajouter, d'après la *Bibliographie générale de l'astronomie* par HOUZEAU et LANCASTER, une édition du *Planisphærium* parue a Nürnberg en 1531, et un ouvrage intitulé: *Coelestium rerum disciplina* imprimé en 1535. Parmi les autres ouvrages connus de NEMORARIUS, savoir *De numeris datis, Geometria, Tractatus de isoperimetris propositiones septem* et *De speculis,* le premier a été édité en 1879 par TREUTLEIN et le second est celui actuellement publié par M. CURTZE.

Le premier livre de la *Geometria* traite sur les côtés, les angles et l'aire du triangle, le second se rapporte à la division de lignes, de triangles et d'angles, enfin les deux derniers sont consacrés à des théorèmes et des problèmes relatifs au cercle. A la fin de son édition, M. CURTZE a publié le *liber de similibus arcubus*, qu'il semble porté à attribuer aussi à NEMORARIUS. Comme on sait, M. STEINSCHNEIDER attribue cet écrit à AHMED BEN JUSUF (voir Biblioth. Mathem. 1888, p. 114); ne serait-il pas possible que l'auteur en soit AHMED, mais que NEMORARIUS l'ait traduit en latin?

Pour l'édition de la *Geometria*, M. CURTZE a utilisé, outre le manuscrit indiqué sur le titre, une partie d'un autre manuscrit possédé par la bibliothèque de Bâle. L'édition est faite avec le même soin dont M. CURTZE a donné déjà tant de preuves.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Loria. I POLIGONI DI PONCELET. Torino 1889. 8°, 50 p.

Les recherches dont M. LORIA rend compte dans cette intéressante étude historique ont eu pour point de départ le problème suivant proposé par PONCELET en 1817: »Deux cercles, ou plus généralement deux sections coniques, sont donnés; construire un polygone de nombre donné de côtés qui soit inscrit à l'une et circonscrit à l'autre des deux courbes». Les premières recherches sur cette question furent faites par PONCELET lui-même, qui démontra en 1822 que le problème est en général irrésoluble, mais que, dans les cas où il peut être résolu, il y en a une infinité de solutions. Quelques années plus tard, JACOBI donna, à l'aide de fonctions elliptiques, une solution complète du problème: »Trouver la relation entre les rayons »et la distance des centres de deux cercles afin qu'on puisse »inscrire à l'un des cercles un polygone à *n* côtés qui soit en »même temps circonscrit à l'autre cercle». A partir de ce temps la question a attiré l'attention d'un grand nombre de géomètres, qui l'ont traitée par des méthodes différentes et dont M. LORIA expose dans son écrit les principaux résultats sous une forme très élégante.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von | journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1889: 4. - - [Analyse de l'année 1889:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 1, 1890, 157 -163. (A. FAVARO.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
2 (1886), 1889, 9- -12. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
34 (1889): 6; Supplement. -- 35 (1890): 1.

Baraniecki, M. A., Algoritmus, to jest nauka liczby polska rzecza wydana przez ksiedza Tomasza Klosa. 1538. Krakow 1889.
8°, XXIV + 56 p. — *L'algorismus* de T. KLOS réimprimé et précédé d'une introduction.

Bosso, D., Sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli.
Periodico di matem. 4, 1889, 144—145. — Note historique.

Bierens de Haan, D., Vierde Rapport van de Huygens-Commissie.
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Versl. 6, 1889. 9 p.

Bierens de Haan, Materialien für die Geschichte der Mathematischen Gesellschafts-Mitglieder in den Niederlanden.
Hamburg, Mathem. Gesellsch., Festschrift (Leipzig 1890). 1. 79—83.

Bloch, M., Die Zeitschriften der Mathematik.
Das Archiv (Berlin) 3 1890. 21 -22.

Бобынинъ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. [1:2 (1726—1745).] Москва 1886—1889.
8°, 115 [illegible] — BOBYNIN V. V. Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention [illegible] Tome 1, cahier 2 (1726—1745). — [illegible] «Fiziko-matematicheskia nauki» 2 (1886).

Bobynin, V., Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science.
[illegible] Moscou 1888. 124 [illegible]

Bubendey, J. F., Geschichte der Mathematischen Gesellschaft [illegible]
Hamburg, Mathem. Gesellsch. Festschrift (Leipzig 1890) 1. 8—78.
[illegible]

Cantor, M., Über einige Konstruktionen von Lionardo da Vinci.
Hamburg, Mathem. Gesellsch. Festschrift (Leipzig 1890) 2. 8—15.

Catalan, E., Réclamation de priorité [relative à un théorème de géométrie élémentaire].
Mathesis **9**, 1889, 250.

°**Chasles, M.**, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie. Troisième édition, conforme à la première. Paris 1889.
4°, (2) + 851 p. — [30 fr.]

Christensen, S. A., Om Ligninger i 10ende Bog af Euclids Elementer.
Tidsskr. for Mathem. **6**, (1888), 1889, 161—182. — Sur les équations dans le 10e livre des *Elementa*.

Christensen, S. A., Über Gleichungen vierten Grades im zehnten Buch der Elemente Euclid's.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 201—217. — Traduction du mémoire précédent.

Eneström, G., Emanuel Svedenborg såsom matematiker.
Stockholm, Vetenskapsakad., Bihang **15**: afd. I, n° 12, 1890. 29 p. — EMANUEL SVEDENBORG comme mathématicien.

°**Epping, J.**, Astronomisches aus Babylon oder das Wissen der Chaldäer über den gestirnten Himmel. Freiburg, Herder 1889.
8°, 4 + 190 p. + 7 pl. — [4 M.]

Fauquembergue, E., Note sur l'équation indéterminée
$$U^4 + V^4 = S^4 + W^4.$$
Mathesis **9**, 1889, 241—242. — Notice historique.

Favaro, A., Il Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni. (1868—1887.)
Biblioth. Mathem. 1889, 109—112.

Favaro, A., Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.
Biblioth. Mathem. 1889, 113—116.

Folie, F., J. C. Houzeau.
Bruxelles, Observatoire, Annuaire **57** (1890), 236—281. — Notice biographique, avec portrait.

°**Graves, R. P.**, Life of Sir William Hamilton, with selections from his poems, correspondance, and miscellaneous writings. Vol. III. Dublin 1889. 8°.

Heiberg, J. L., Neue Studien zu Archimedes.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Supplement 1—84.

°**Helm**, Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt. Leipzig 1887.
8°, 104 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 154. (P. ZECH.)

Holst, E., Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen.
Biblioth. Mathem. 1889, 97—103.

°**Jordan, C.**, Georges Halphen (1844—1889). Paris 1889. 4°.

Láska, W., Über Marcus Marci de Kronland.
Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 1—3.

Le Paige, C., La formule d'Ozanam est due à W. Snell.
Mathesis **10**, 1890, 34—36.

°**Mackay, J. S.**, Solutions of Euclid's problems, with a rule and one fixed aperture of the compasses, by the Italian geometers of the sixteenth century.
Edinburgh, Mathem. Soc., Proceedings **5**, 1887, 2—22.

M[ansion], **P.**, Crelle ou Brocard?
Mathesis **10**, 1890, 28—30. — Sur la découverte du point de Brocard.

МАЦОНЪ, Ѳ. Ю., Именованныя величины въ школьномъ преподаванiи и значенiе ихъ символовъ.
Vjestnik elem. matem. **6**, 1889, 45—60; **7**, 1889, 41—56, 81—91, 181—197, 201—218, 221—227. — Matzon, F. J., Notices historiques sur les idées fondamentales de l'algèbre et sur les symboles algébriques.

°**Muir, Th.**, The theory of determinants in the historical order of its development. I.
Edinburgh, Royal soc., Proceedings **13**, 1886, 547—590; **14**, 1887, 452—518.

Nagl, A., Der arithmetische Tractat des Radulph von Laon.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Supplement 85—133.

Nagl, A., Das Quadripartitum des Joannes de Muris und das praktische Rechnen im vierzehnten Jahrhundert.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Supplement 135—146.

Ovidio, E. d', Cenni biografici su Domenico Chelini.
Società Italiana delle scienze, Memorie di matem. **6**$_3$, 1887, LVIII—LXIV.

Ovidio, E. d', Cenni biografici su Barnaba Tortolini.
Società Italiana delle scienze, Memorie di matem. **6**$_3$, 1887, LXV—LXXII.

Ovidio, E. d', Biografia di Giusto Bellavitis.
Società Italiana delle scienze, Memorie di matem. **6**$_3$, 1887, LXXIII—LXXXV.

Ovidio, E. d', Cenni biografici su Giovanni Plana.
Società Italiana delle scienze, Memorie di matem. **6**$_3$, 1887, LXXXVI—C.

Ovidio, E. d', Uno sguardo alle origini ed allo sviluppo della matematica pura. Discorso letto il 4 novembre 1889 in occasione della solenne apertura degli studi nella r. università di Torino. Torino, Paravia 1889.
8°, 63 p.

°**Racki, F.**, Sivot i djela R. J. Boskovica. Agram 1888.
8°, 428 p. — Sur la vie et les ouvrages de R. J. Boskowisch. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 150—152. (E. Gelcich.)

°**Trávnicek, J.**, Das Problem der Kreismessung. I. Die Zeit vor Archimedes. Brünn 1889.
8°, 20 p. — [1.50 M.]

Treutlein, P., Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg. Braunschweig, Salle 1890.
8°, 32 p.

Wappler, E., Beitrag zur Geschichte der Mathematik.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Supplement 147—168 + facsim.

Question 28 [sur un principe indiqué par HANKEL pour les systèmes de numération].
Biblioth. Mathem. 1889, 120. (G. LORIA.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von M. HENOCH und E. LAMPE. Band 19 (1887). Berlin, Reimer 1889.
8°. — Les pages 1—44 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1887.

ALLMAN, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1889. 8°.
Zeitschr. für Matem. **35**, 1890; Hist. Abth. 4. (CANTOR.)

BALL, W. W. R., A short account of the history of mathematics. London, Macmillan 1888. 8°.
The Academy **34**, 1888, 339—340. (J. S. MACKAY.)

BALL, W. W. R., A history of the study of mathematics at Cambridge. Cambridge, Deighton 1889. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 5—6. (CANTOR.)

CARRARA, B., La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino 1889. 8°.
Period. di matem. **4**, 1889, 190—191. (F. VIAGGI.) — Mathesis **10**, 1890, 15—16. (P. M.)

EMMERICH, A., Der Brocardsche Winkel des Dreiecks. Eine geschichtliche Studie. Mülheim an d. Ruhr 1889. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 34—35. (CANTOR.)

FAVARO, A., Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna. Estratto dagli Atti e Memorie della r. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna 6_3. Bologna 1888. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 76—77. (CANTOR.)

FAVARO, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Esposizione e disegno. Firenze 1888. 4°.
Deutsche Litteraturz. **10**, 1889, 1129—1131. (E. WOHLWILL.)

LORIA, G., I poligoni di Poncelet. Torino 1889. 8°.
Jorn. de sc. mathem. **9**, 1889, 93—95. (G. T.)

NAPIER, J., The construction of the wonderful canon of logarithms. Translated from latin into english with notes and a catalogue of the various editions of Napeir's works by W. R. MACDONALD. Edinburgh, Blackwood 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1889, 116. (G. LORIA.)

REIFF, R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp 1889. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 8—10. (CANTOR.)

ZEUTHEN, H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. FISCHER-BENZON. Kopenhagen, Höst 1886. 8°.
Zeitschr. f. Oesterr. Gymnasialw. **40**, 1889, 348—352.

Mathematisches Abhandlungsregister. 1888. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889; Hist. Abth. 227—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1889, 117—120. — Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889, Hist. Abth. 225—226; **35**, 1890, Hist. Abth. 39—40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

29. Le manuscrit Cod. Reg. Suec. n° 1452 de la »Biblioteca Vaticana» à Rome contient une *Tabula magistri Petri Philomene de Dacia ad inveniendum propositionem cujusvis numeri*, où tous les produits depuis 1·1 jusqu'à 49·49 sont calculés et exprimés en nombres du système sexagésimale.

On demande s'il exsiste des tables de produits encore plus étendues, calculées au moyen âge. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1890.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 4. — NOUVELLE SÉRIE. 4.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles.

Par G. VICUÑA à Madrid.

Dans l'histoire des mathématiques en Espagne, le 16e siecle est le plus remarquable, surtout pour ce qui concerne la Cosmographie; vers ce temps plusieurs ouvrages espagnols furent traduits en d'autres langues ou reproduits à l'étranger en leur langue originale, la plus répandue alors dans le monde civilisé. Après la fin de ce siècle suit une période de décadence durant jusque vers le milieu de notre siècle et interrompue seulement par l'action scientifique de D. JORGE JUAN — l'éminent auteur de l'*Examen maritimo* (1771) — et de ses élèves.

Dans ce qui suit, je me permets de signaler quelques ouvrages mathématiques espagnols, la plupart appartenant au siècle scientifique dont je viens de parler et ayant un intérêt au point de vue historique.

Ciruelo, P., CURSUS QUATTUOR MATHEMATICARUM ARTIUM LIBERALIUM QUAS RECOLLEGIT ATQUE CORREXIT MAGISTER PETRUS CIRUELUS DAROCENSIS THEOLOGUS SIMUL & PHILOSOPHUS. [A la fin du livre:] 1516.

Folio, 94 feuillets non numérotés; caractères gothiques et sémigothiques. — Après la dédicace au Recteur et aux étudiants de l'Université d'Alcalà d'Henares, où CIRUELO était professeur, l'éditeur mentionne »Ejusdem Petri Cirueli darocensis parafrasis in Arithmetica speculativa divi Severini Boetii clarius et certius edita quam olim à Thoma Bravardino«; comme on sait le traité

d'Arithmétique de Bradwardin a été publié par Ciruelo en 1495 à Paris où celui-ci enseigna les mathématiques.

Pour la partie géométrique l'auteur suit principalement Campano et Bradwardin; il expose deux méthodes de carrer le cercle dont l'une est celle proposée par Carolus Bouillius (Charles de Bouvelles). En traitant la Perspective il en donne beaucoup de notices historiques et il reproduit un extrait des travaux d'Alhacen et d'Alchindi, dû à Jean archevêque de Canterbury. Dans le traité de la musique il marche sur les traces de Boëce et de Faber Stapulensis (Le Fevre d'Etaples).

Aurel, M., Libro primero de Arithmetica Algebratica... Valencia 1552.

4°, 108 f. — L'auteur nous avertit lui-même qu'il était allemand; néanmoins c'est sûr qu'il habitait Valence depuis plusieurs années, car il y avait fait imprimer en 1541 un *Tratado muy útil y provechoso para toda clase de tratantes.* Dans le 13^r chapitre il dit que Guillaume de Lunis fut le premier traducteur, de l'arabe en italien, de la règle d'Algèbre et d'Almucabala, c. à. d. restauratio et oppositio. D'après Libri (*Hist. des sc. math. en Italie* II, p. 45), Guillaume de Lunis vivait au 13^e siècle, mais postérieurement à Leonardo Pisano. Libri indique aussi (l. c. III, p. 146) que Lunis a été cité dans la *Summa de Arithmetica* de Ghaligai (1521); cet ouvrage a peut-être été la source de la notice qu' Aurel donne sur Lunis. Aurel affirme que son livre est le premier traité d'Algèbre écrit en espagnol.

En 1552 fut publiée aussi une édition de l'Arithmétique d'Ortega, avec des additions de Gonzalo Busto, et une de celles-ci (à la fin, 8 p.) contient 13 exemples de l'»arte mayor» (l'Algèbre). Pour les éditions de cette Arithmétique en plusieurs langues, depuis celle de 1512 à Seville, voyez la note de Mr. Perott *Sur une arithmétique espagnole du 16^me siècle.* (Bullett. [illegible] matem. 15 (1882), p. 163—160.)

Rocha, A., Arithmetica. Barcelona 1565.

[illegible] f. — C'est essentiellement une compilation; Rocha [illegible] auteurs anciens et modernes (dont 0 espagnols) qu'il [illegible]

Nuñez, P., Libro de Algebra en Aritmetica y Geometria. [illegible]

[illegible] f. — La dédicace (en portugais) au cardinal [illegible] 1564; l'auteur y dit que l'original a [illegible] ans; il donne un aperçu de l'histoire

de l'Algèbre jusqu'à Lucas de Burgo (Paccioli) et il ajoute que le reste du livre a été écrit en espagnol, parce que cette langue est plus connue que le portugais. — A la fin de la troisième partie, à partir du f. 323, il y a un chapitre intitulé »El autor de esta obra á los lectores», contenant des notices sur les ouvrages de Paccioli, Cardano et Tartaglia et sur la dispute entre ces deux derniers. Nuñez critique plusieurs des règles données par eux avec la même sagacité dont ce grand géomètre portugais a donné tant de preuves dans ses divers ouvrages.

Moya, J. P., Aritmetica practica y especulativa. Madrid 1598.

8°, 368 f. — Entre les nombreux ouvrages de ce fécond écrivain, celui-ci est le plus remarquable, sous notre point de vue; on en a fait un grand nombre d'éditions (j'en connais treize de 1609 à 1761). Ce traité qui est plus complet que la partie d'arithmétique de son *Tratado de matemáticas* (Alcalà 1573) contient plusieurs notices d'intérêt historique, notamment dans la 8e partie; ici, après avoir expliqué les systèmes de numération et les signes numéraux employés par les romains, les grecs, les hebreux, les chaldéens, les arabes et les allemands, l'auteur expose dans le chapitre VI la manière de compter sur les doigts. La 9e partie embrasse deux curieux dialogues sur l'importance de l'Arithmétique, avec des indications historiques. Dans le *Tratado de matemáticas* les dialogues ne sont pas insérés, mais (avec des variations) presque tout ce qui se rapporte à la numération (10e partie) et à la manière de compter sur les doigts (chapitre IX). Cette question là a été traitée par Mr. A. Marre dans un érudit article: *Manière de compter des anciens* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 1 (1868), p. 309 et suiv). Sur ce sujet nous avons en Espagne une source imprimée bien plus ancienne dans le livre *Sumario breve de la practica de la arithmetica* composé (d'après ce qu'on lit à la fin) à Saragosse par Juan Andres, en 1513, et imprimé à Valence en 1515. Au commencement il y a deux planches, qui font voir les 36 positions des doigts des deux mains, et puis l'explication de la manière de compter depuis 1 jusqu'à 10,000.

Rocamora, G., Sphera del universo. Madrid 1599.

4°, 271 f. — Il y a dans cet ouvrage un sonnet du grand poëte Lope de Vega. — Le premier chapitre commence par une dissertation sur les mathématiques et une notice sur les plus célèbres géomètres espagnols du 16e siècle.

Mariana, J., DE PONDERIBUS ET MENSURIS. Toletum 1599.
4°, 192 pages. — Une curieuse étude sur les poids et le mesures des hebreux, des grecs, des romains et des espagnols, faite par le fameux historien et jésuite.

Coppola, N., RESPUESTO DEL DOCTOR D. NICOLAS COPPOLA, NATURAL DE LA CIUDAD DE PALERMO EN EL REYNO DE SICILIA, PROFESOR DE MATHEMATICA CONTRA LOS PARECERES Y JUICIOS HECHOS DE SUS PROBLEMAS Y PARTICULARMENTE LAS MAL FUNDADAS CENSURAS DEL MAESTRE DE CAMPO D. SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO, DIRECTOR DE LA REAL ACADEMIA DE LOS MILITARES EN LOS PAISES BAJOS. Madrid 1692.
8°, 14 p. — Contient une polémique sur le problème de la trisection de l'angle, commencée dans deux brochures antérieures de l'auteur et continuée dans une quatrième. Dans celle dont nous avons cité le titre, plusieurs géomètres espagnols contemporains sont cités.

Omerique, A. H., ANALYSIS GEOMETRICA SIVE NOVA ET VERA METHODUS RESOLVENDI TAM PROBLEMATA GEOMETRICA, QUAM ARITHMETICAS QUESTIONES. Gadibus 1698.
4°, 444 p. — Il en a paru seulement la première partie, contenant l'application de l'Algèbre à la Géometrie plane; l'ouvrage a été cité avec éloge par NEWTON, d'après MONTUCLA, (*Histoire des mathématiques* 2[e] éd., II, p. 167). Il y a, pour plusieurs problèmes, des citations au marge des auteurs qui en ont donné des solutions, p. ex. le prince ROGER DE VENTIMIGLIA et le père jésuite CAÑAS, auteur d'une *Algebra speciosa* dont j'ignore l'année et le lieu d'impression.

Sur les bibliographies des sciences mathématiques.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Une bibliographie des sciences mathématiques est, de même que celle de chaque autre science, un instrument dont on a besoin dans des cas très différents. En effet le motif pour lequel une bibliographie est consulté peut être:

1° de déterminer les titres exacts et les détails bibliographiques d'écrits publiés, afin de pouvoir se les procurer par un libraire ou dans une bibliothèque;

2° d'apprendre quels sont les écrits publiés par un certain auteur dont on veut étudier l'action scientifique;

3° de suivre le développement de la science ou d'une de ses branches;

4° d'avoir un guide pour les études ou les recherches scientifiques relatives à une question particulière.

Et comme naturellement chaque ouvrage doit être adapté au but pour lequel il est destiné, il s'ensuit que le plan d'une bibliographie des sciences mathématiques ne peut être le même dans chacun des quatre cas mentionnés. Ainsi dans le premier cas il faut évidemment un ouvrage contenant les titres des livres et des mémoires publiés à part, rangés à peu près comme dans un catalogue ordinaire de la librairie. Dans le second cas il suffit d'ordonner les titres alphabétiquement d'après les noms des auteurs. Dans le troisième cas, au contraire, les écrits doivent être classés en ordre méthodique et chronologique. Enfin, dans le quatrième cas il est nécessaire d'adopter un ordre exclusivement méthodique avec de nombreuses subdivisions, et il convient de mentionner seulement les écrits les plus importants au point de vue des résultats ou des méthodes.

La plupart des bibliographies mathématiques publiées jusqu'à présent ont été rédigées principalement pour le cas que j'ai signalé en premier lieu. Tels sont p. ex. les ouvrages de BEUGHEM (1688), MURHARD (1797—1805), MÜLLER (1820), ROGG (1830), SOHNCKE (1854) et en quelque sorte aussi celui d'ERLECKE (1873). Parmi les autres, le *Biographisch-literarisches Handwörterbuch* (1863) de POGGENDORFF a essentiellement un but biographique, et le *Repertorium commentationum a societatibus literaris editorum* (Tome VII, 1808) de REUSS un but scientifique. Les bibliographies relatives à des pays particuliers publiées par

MM. RICCARDI, BIERENS DE HAAN et ZEBRAWSKI sont adaptées principalement à des recherches biographiques et historiques.

Bien que nous ayons ainsi un assez grand nombre d'ouvrages bibliographiques, ils ne suffisent pas pour satisfaire aux besoins des savants. De plus ils sont presque tous fort anciens; le *Repertorium* de REUSS p. ex. ne fait même aucune mention de la littérature de notre siècle. Par conséquent le besoin d'une nouvelle bibliographie mathématique est très pressant.

L'idéal d'une telle bibliographie est sans doute celle qui peut être également utile dans tous les cas dont j'ai parlé. Une telle bibliographie devrait donc embrasser: 1) une première partie contenant les titres de tous les écrits mathématiques des auteurs rangés en ordre alphabétique; 2) une seconde partie où ces mêmes écrits seraient classés d'après les matières en un assez grand nombre de sections p. ex. à l'instar du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, et dans chaque section rangés en ordre chronologique; 3) une troisième partie contenant seulement les écrits importants au point de vue scientifique, mais où l'on aurait poursuivi plus avant le classement des matières et où chaque subdivision présenterait les titres dans un ordre logique. Comme les résultats de l'activité scientifique des siècles passés se trouvent résumés très complétement dans les traités classiques de nos jours, cette troisième partie pouvait être restreinte à indiquer seulement les monographies publiées dans notre siècle.

Evidemment une telle bibliographie idéale ne peut être composée par une seule personne, car il est impossible de trouver aujourd'hui un mathématicien qui connaisse assez à fond toutes les branches de la science mathématique, pour pouvoir choisir les écrits qui doivent être mentionnés dans la troisième partie. D'autre part, la collaboration de plusieurs personnes amène nécessairement une considérable perte de temps et d'autres inconvénients, auxquels il sera difficile de rémédier.

Pour éviter les plus grandes difficultés, il serait sans doute convenable de répartir le travail de telle manière qu'une personne rédigeât seule les deux premières parties de la bibliographie des sciences mathématiques, et une société de savants se chargeât de la troisième, qui ne peut être menée à bonne fin que par un travail collectif. Et par la force des choses plutôt que par une convention formelle, cette répartition du travail est maintenant un fait accompli. En effet, nous pouvons espérer avoir dans peu de temps deux ouvrages bibliographiques pour les sciences mathématiques dont l'un, correspondant aux deux premières parties de la bibliographie idéale dont j'ai parlé, est rédigé par

M. G. Valentin à Berlin, et l'autre, qui contiendra un répertoire bibliographique de la littérature mathématique de notre siècle, est en préparation à l'instigation de la Société mathématique de France.

M. Valentin a commencé son travail en 1885, et il l'a poursuivi depuis presque sans interruption, de manière qu'il a copié en ce moment 70,000 titres, dont 52,000 se rapportent à des mémoires ou des notes insérées dans des recueils académiques ou des journaux. Pour avoir ces 52,000 titres, M. Valentin à dépouillé plus de 50,000 volumes. Son ouvrage contiendra tous les écrits mathématiques publiés depuis l'invention de la typographie jusqu'à nos jours, excepté les traités purement élémentaires, et il sera achevé probablement en 1895.

Vers le même temps que M. Valentin commençait son travail, la Société mathématique de France concevait le projet d'un répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Pour cette raison la Société publiait le 4 Mars 1885 une lettre circulaire (3 pages in-8°) avec le titre: »Projet de répertoire bibliographique». Dans cette lettre la Société fait observer qu'il »n'est pas un de nous qui n'ait eu à faire de pénibles recherches bibliographiques et l'on peut prévoir le moment où il sera absolument impossible d'entreprendre aucune étude sans avoir entre les mains des instruments nouveaux de travail.» A cet effet la société propose de composer un répertoire bibliographique des sciences mathématiques de la manière suivante:

1° On copie sur des cartes séparées les titres des articles qui doivent figurer au répertoire, ainsi que les noms d'auteurs et les indications bibliographiques nécessaires. Si le titre seul n'est pas suffisant pour faire connaître l'objet de l'article, on ajoute des indications supplémentaires, mais on les réduit à ce qui est strictement nécessaire pour compléter le titre en quelques mots.

2° On procède ensuite au classement des cartes en réunissant ensemble les articles qui se rapportent à une même question ou à des questions de même ordre.

3° Enfin ou s'occupe de la rédaction définitive et de l'impression du répertoire.

Pour mener ce travail à bonne fin, la Société invitait les les destinataires de la lettre d'y prendre part, et cette invitation ayant été accueillie favorablement par un grand nombre de savants, la Société publiait le 15 avril 1885 une nouvelle lettre circulaire contenant des indications plus détaillées sur la confection des fiches: p. ex. le titre de l'article devait être reproduit

dans la langue originale, mais avec une traduction française, s'il s'agissait d'une langue qui n'est pas comprise par la majorité des géomètres, c'est-à-dire d'une langue slave ou scandinave, du hollandais ou du magyar.

Dans le cours des années 1886 et 1887 furent réunies un certain nombre de fiches, et la Société dût s'occuper du classement de ces fiches. Mais il fallait fixer au préalable les bases d'une classification méthodique et rationnelle et, par une trosième lettre circulaire datée le 20 février 1887, la Société proposait de constituer une commission permanente pour ce but. Cette commission fut aussi constituée et doit avoir commencé ses travaux bientôt, car dès le 1 juin 1888 elle faisait paraître un projet de classification détaillée pour le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques (Paris, Gauthier-Villars, 67 pages in-8°). Ce projet fut soumis au jugement des mathématiciens qui avaient pris part aux travaux préparatoires; après avoir reçu leurs observations, la commission remania le projet en quelques points et en fit publier une nouvelle édition (Paris, Gauthier-Villars, 80 pages in-8°). Enfin la commission décidait de convoquer à Paris un Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, dans le but d'établir définitivement une classification détaillée de toutes les questions du domaine des sciences mathématiques. Ce congrès fut tenu du 16 au 19 juillet 1889 sous la présidence de M. H. POINCARÉ. Ici le projet de classification dont j'ai parlé fut adopté dans son ensemble mais avec de très nombreuses modifications de détails, et des résolutions générales relatives au travail du répertoire furent prises, dont je rapporte les suivantes:

1° Il y a lieu de publier un répertoire bibliographique des sciences mathématiques, destiné à épargner aux travailleurs de longues et pénibles recherches. Ce répertoire devra contenir les titres des mémoires relatifs aux mathématiques pures et appliquées publiés depuis 1800 jusqu'à 1889 inclusivement, ainsi que des travaux relatifs à l'histoire des mathématiques depuis 1600 jusqu'à 1889 inclusivement. Ces titres seront classés non par noms d'auteurs, mais d'après l'ordre logique des matières.

2° Il sera publié successivement des suppléments à ce répertoire; le premier sera consacré aux travaux publiés de 1889 exclusivement à 1899 inclusivement, et les suppléments suivants, aux périodes décennales qui suivront. Dans chaque supplément, les omissions découvertes dans

le répertoire ou dans les supplements précédents seront réparées.

3° Sont exclus du répertoire les ouvrages classiques ne contenant pas de résultats originaux et destinés aux élèves des divers établissements d'instruction ou aux candidats aux divers examens. Seront pareillement exclus les mémoires publiés dans des recueils spécialement destinés à ces candidats.

4° Les travaux relatifs aux mathématiques appliquées ne doivent être mentionnés au répertoire que s'ils intéressent les progrès des mathématiques pures.

6° Les titres des travaux écrits en d'autres langues que l'allemand, l'anglais, l'italien, l'espagnol, le latin seront suivis de leur traduction française.

10° Il est institué une commission permanente qui veillera à l'exécution des résolutions précédentes. Elle est composée de: membres français: MM. Poincaré, Désiré André, Humbert, d'Ocagne, Charles Henry; membres étrangers: MM. Catalan, Bierens de Haan, Glaisher, Gomes Teixeira, Holst, Valentin, Emile Weyr, Guccia, Eneström, Gram, Liguine, Stephanos. Si des vacances se produisent dans son sein, la commission se complétera par cooptation; elle est également autorisée à s'adjoindre de nouveaux membres en nombre quelconque.

Le procès-verbal sommaire du congrès et le plan de classification y adopté ont été publiés récemment (Paris, Imprimérie nationale 1889, 66 pages in-8°). La classification est sans doute très bonne; ce n'est que relativement à la division de la classe V (philosophie et histoire des sciences mathématiques) que je me permettrai de faire une remarque. Cette classe contient les sections suivantes:

1. *Considérations diverses sur la philosophie des mathématiques.* *a.* Méthodologie.
2. *Origine des mathématiques; Egypte; Chaldée.*
3. *Grèce.* *a.* Période hellène jusqu'à Euclide. — *b.* Période alexandrine, d'Euclide à Héron. — *c.* Période gréco-romaine, jusqu'à Constantin. — *d.* De Constantin à la chute de l'empire byzantin; mathématiques byzantines.
4. *Orient et Extrême-Orient.* *a.* Indous. — *b.* Chinois. — *c.* Arabes. — *d.* Juifs.
5. *Occident latin.* *a.* Romain. — *b.* Moyen âge.

6. *Renaissance, 16e siècle.* — 7. *17e siècle.* — 8. *18e siècle.* 9. *19e siècle.* — 10. *20e siècle.*

Ce classement ne me semble pas tout à fait satisfaisant. En effet il est difficile de voir dans quelle section on doit placer p. ex. les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1880) de M. CANTOR et des monographies telles que les *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni* (1878) de M. FAVARO. Il me semble donc nécessaire d'adopter pour les écrits d'histoire des mathématiques encore une série d'autres sections où le classement se rapporterait à la matière y traitée.

Avant de terminer, je me permets aussi de faire une autre observation. D'après ce qu'on peut voir par les lettres circulaires relatives au répertoire, la bibliographie ne doit signaler pour chaque écrit que 1) le nom d'auteur; 2) le titre; 3) les indications bibliographiques; 4) la traduction en français si la langue du titre est peu répandue; 5) une indication supplémentaire sur l'objet, si le titre n'est pas suffisant à cet effet. Mais il y a lieu de remarquer que le répertoire deviendrait sans doute d'un beaucoup plus grand usage s'il contenait aussi pour chaque écrit en quelques mots une notice sur les résultats obtenus ou sur les méthodes employées, à peu près comme dans le *Vademecum de l'astronome* par M. HOUZEAU (Bruxelles 1882). Assurément, de telles notices ne seraient pas impossibles à obtenir si l'on s'adressait pour ce but aux collaborateurs du répertoire, ou en cas de besoin à d'autres savants. Du reste il suffit que ces notices ne soient ajoutées que lors de la rédaction définitive du répertoire.

Il ne me reste plus qu'à exprimer l'espoir que la commission chargé de l'exécution du travail soit en état de l'achever dans le plus bref délai possible, afin que déjà la génération présente des mathématiciens puisse en profiter pour ses recherches.

Ecrit posthume de Descartes intitulé de solidorum elementis.

Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives.

Par E. DE JONQUIÈRES à Paris.

Ce texte, reproduit (sauf les mots complémentaires imprimés en italiques, et plusieurs rectifications évidentes et nécessaires dans la ponctuation et l'ortographe) d'après la version publiée en 1860 par M. le comte FOUCHER DE CAREIL, a pour origine la copie que LEIBNITZ a faite, de sa main, entre les années 1672 et 1676, à Paris, sur le manuscrit original de DESCARTES, qui lui avait été communiqué par l'éditeur CLERSELIER, son ami, à qui l'ambassadeur de France à Stockholm, CHANUT, l'avait renvoyé, avec d'autres manuscrits inédits de l'auteur, après la mort de DESCARTES. Le manuscrit original de DESCARTES a disparu depuis lors.[1]

Angulus solidus, tribus hedris inclusus, tres angulos diedros rectos habet octavamque sphæræ partem complectitur; Pariter hujus complementarius angulus easdem proprietates possidet. Ista autem reciproca derivatio non his angustis finibus circumscribitur.*[3] Angulus solidus est qui octavam sphæræ partem complectitur, etiamsi non constet ex his[4] angulis planis rectis; omnes autem anguli plani ex quibus circumscribitur simul juncti æquales sunt tribus rectis.

Sicut in figurâ planâ omnes anguli externi simul juncti æquales sunt quatuor rectis, ita in corpore solido omnes anguli solidi externi simul juncti æquales sunt octo solidis rectis; per angulum externum intelligo curvaturam seu inclinationem planorum ad invicem quam metiri oportet ex angulis planis angulum solidum comprehentibus. Nam illa pars quâ aggregatum ex omnibus angulis planis unum angulum solidum facientibus minus est quam quatuor anguli recti *planè*[5] designat angulum externum solidum.

Si quatuor anguli plani recti ducantur per numerum angulorum solidorum, et ex producto tollantur octo anguli recti

* Les mots imprimés en lettres italiques ont été ajoutés au texte primitif pour combler quelques lacunes[2] qui y sont indiquées par des points.

plani, remanet aggregatum ex omnibus angulis planis qui in superficiebus corporis solidi existunt.[6]

In pyramide sunt semper tot facies quot anguli. In columnâ [7] media pars numeri angulorum solidorum minor est binario quam numerus facierum. In pyramide duplicatâ media pars numeri facierum minor est binario quam numerus angulorum. Sunt et alia corpora in quibus licet duo extrema imaginari et plus zonas.

Sunt ad minimum triplo plures anguli plani quam solidi in uno corpore. Si tollatur binarius ex numero angulorum solidorum qui in corpore aliquo continetur, et residuum ducatur per binarium, fit maximus numerus facierum; si verò dividatur numerus angulorum per binarium (si quidem numerus sit par; sin minus, illi prius addenda erit unitas ut dividi possit), ac posteà quotienti [8] si addatur binarius, fit numerus minor facierum.

Est in maximâ *generalitate analogia, sive correlatio,* inter facies et angulos solidos.[9] Pyramides omnes æqualiter in sphærâ describuntur. Coni rectanguli, *nempè cujus angulus est rectus,* altitudo æquatur semidiametro basis; superficies convexa se habet ad basim ut $\sqrt{2}$ ad unitatem, quemadmodum lineæ simplices.

In demonstratione non plura esse quam 5 corpora regularia, quia si ponatur α pro numero angulorum et φ pro numero facierum, debet dividi posse $\frac{2\alpha - 4}{\varphi}$ et $\frac{2\varphi - 4}{\alpha}$ ità ut nulla occurrat fractio;[10] alioquin enim certum et evidens est corpus regulare esse non posse. Hæc autem evenire tantum potest si α sit 4 | 6 | 8 | 12 | 20 | et pariter φ sit 4 | 8 | 6 | 20 | 12 | , undè generantur 5 corpora regularia.

Rhomboïdes omnes et pyramides sphæram circumscribunt. Ut agnoscamus utrum aliquod corpus solidum possit in sphærâ describi, primò sciendum est omnes ejus facies necessariò in circulo describi posse, quapropter si tres anguli unius faciei æqualiter distant à centro sphæræ, rectum erit etiam alios omnes ejusdem faciei æqualiter à centro sphæræ distare, ac insuper et consequente angulos omnes vicinarum facierum qui simul concurrunt cum illis prioris faciei in iisdem angulis solidis.

Dato aggregato ex omnibus angulis planis qui in superficie alicujus corporis solidi existant, invenire quot in eodem corpore solidi anguli existant: addantur 8 numero dato et productum dividatur per 4, residuum erit numerus quæsitus, ubi si fractio occurrat, certum est nullum tale corpus esse posse.[11] Dato aggregato ex omnibus angulis planis et numero facierum, numerum angulorum planorum invenire: Ducatur numerus facierum

per 4, et productum addatur aggregato ex omnibus angulis planis, et totius media pars erit numerus angulorum planorum: v. g. aggregatum ex omnibus angulis planis est 72, numerus facierum 12 cujus quadruplum 48 additum cum 72 facit 120, cujus media pars est 60. Ergo in tali corpore sunt 60 anguli plani.

Sunt semper duplo plures anguli plani in superficie corporis solidi quam latera; unum enim latus semper commune est duobus faciebus.[12]

Si omnes facies dicantur æqualem numerum *angulorum* planorum continere, ergo numerus angulorum dividi poterit per numerum facierum sine fractione, et erit numerus angulorum unius faciei. Hinc facile cognoscetur, ex numero angulorum planorum et numero facierum solum cognitis, quot anguli in unâ facie esse debeant: v. g. si sint 5 facies et 18 anguli plani, ergo ex illis faciebus vel 2 erunt triangulares et 3 quadratæ, vel 3 triangulares una quadrata et *una* pentagona, vel denique una hexagona et 4 triangulares; sed quia[13] in eodem corpore sunt 6 anguli solidi, hinc non potest ullum tale corpus existere nisi cum sint *2 triangulares et 3 quadratæ facies.*

Triplicem adverto in angulis solidis æqualitatem aut inæqualitatem: æquales dicuntur numero angulorum planorum; comprehenduntur æquales item qui æqualem inclinationem continent, quo casu dicemus *æquales esse* angulos externos, sive inclinationis, et priores dicemus æquales arithmeticè; denique, maxime propriè, æquales dicuntur qui eamdem partem sphæræ comprehenduntur et dicentur capacitate æquales.[14]

Angulorum solidorum inclinatione æqualium de capacitate major est qui arithmeticè exsuperat. Omnium capacissimus est angulus coni.

Ponam semper pro numero angulorum solidorum a, et pro numero facierum φ, aggregatum ex omnibus angulis planis $= 4a - 8$, et numerus $\varphi = 2a - 4$ si numerentur tot facies quot possunt *formari* ex triangulo. Numerus item angulorum planorum est $6a - 12$, numerando scilicet unum angulum pro tertiâ parte duorum rectorum. Nunc si ponam $3a$ tribus angulis planis qui ad minimum requiruntur ut componant unum angulum angulorum solidorum, supersunt $3a - 12$, quæ summa addi debet singulis angulis solidis juxta *quæsitis*[15] ità ut æqualiter omni ex parte diffundantur.

Numerus verorum angulorum planorum est[16] $2\varphi + 2a - 4$, qui non debet esse major quam $6a - 12$; sed si minor est, expressus erit per $4a - 8$ *angulos rectos.*

Describi possunt et rhomboïdes in sphærâ, utrâcumque *qualitate,*[17] sed non æquilaterâ.

Omnium *generum* formabuntur solida per *non intermissam conjunctionem tetraedrorum, ita ut duo facies juxta apposita sint æquales, super addito semper angulo angulis jam existentibus, eodem modo quo formantur polygona per conjunctionem triangulorum, hoc posito quodque latus apponi lateri æquali jam* existenti, ac deinde totam figuram resolvi posse ex triangulo. Undè facile agnoscitur omnium polygonalium pondera haberi ex multiplicatione trigonalium per numeros 2, 3, 4, 5, 6 . . . etc., et ex producto si tollantur 1, 2, 3, 4, 5 . . . radices. Ut trigonale pondus, sive $\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}4$, ductum per 2 fit $\frac{2}{2}3 + \frac{2}{2}4$, unde sublatâ *radice* 14 fit 13 (*quadratum pondus*), item $\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}4$ *ductum* per 3, et ex producto tollendo 24, fit pondus pentagonale, etc.[18]

Trigonales		Quadrati		Pentagonales		Hexagonales		Etc.
R — *A*	*O*	*R* — *A*	*O*	*R* — *A*	*O*	*R* — *A*	*O*	
1 — 0	1	2 — 1	1	3 — 2	1	4 — 3	1	
2 — 0	3	4 — 1	4	6 — 2	5	8 — 3	6	
3 — 0	6	6 — 1	9	9 — 2	12	12 — 3	15	
4 — 0	10	8 — 1	16	12 — 2	22	16 — 3	28	
...	...	...	...	...	...	...	...	

Quinque corpora regularia, simpliciter ut per se spectantur, formantur per additum ensium gnomonis, ut superficies fuerant formatæ. Ita etiam regulariter fieri debent.

Tetraedronales		Octaedronales		Icosaedronales		Cubici		Dodecaedronales
F — *R* + *A*	*O*	*F* — *R* + *A*	*O*	*F* — *R* + *A*	*O*	*F* — *R* + *A*	*O*	*F* — *R* + *A*
1 — 0 + 0	1	4 — 4 + 1	1	15 — 20 + 6	1	3 — 3 + 1	1	9 — 18 + 10
3 — 0 + 0	4	12 — 8 + 1	6	45 — 40 + 6	12	12 — 6 + 1	8	45 — 36 + 10
6 — 0 + 0	10	24 — 12 + 1	19	90 — 60 + 6	48	27 — 9 + 1	27	108 — 54 + 10
10 — 0 + 0	20	40 — 16 + 1	44	150 — 80 + 6	124	48 — 12 + 1	64	198 — 72 + 10
						...	...	...

Quod si imaginaremus figuras istas ut mensurabiles, hinc unitates omnes intelligerentur esse ejusdem rationis ac figura

ipsa: nempè in triangulis unitates triangulares *utuntur*, pentagona metiuntur per unitatem pentagonam; Est tunc eadem *proportio*[19] plani ad radicem quæ est quadrati ad suam radicem, et solidi quæ est cubi; ut si radix sit 3, planum erit 9, solidum 27, etc.; quod etiam valet in circulo et sphærâ, aliisque omnibus; si enim unius circuli circumferentia sit triplex major alterâ, ejusdem area continebit noviès; undè animadvertis has progressiones nostræ matheseos 4, 3, 4, etc., non esse alligatas figuris (inesse quòd rari cubi *videntur*), sed generaliter per illas mensuræ species designari.[20]

Corporis quod constat 4 hexagonis et 4 triangulis latera sunt 18, anguli 12, facies 8. Igitur[21] hujus gnomon constat 4 hexagonis et 3 triangulis faciebus, minus 6 radicibus et plus 2 angulis (vide infra).

$F+$	F	$-R$	$+A$	O
3 +	2 —	6 +	2	1
9 +	12 —	12 +	2	12
18 +	30 —	18 +	2	44
30 +	56 —	24 +	2	108
45 +	90 —	30 +	2	215
63 +	132 —	36 +	2	376

Horum numerorum autem differentia ita definita priore loco.[22]

1		
	10	
11		11
	21	
32		11
	32	
64		11
	43	
107		11
	54	
161		

*

Termini algebrici æquales istis numeris figuratis inveniuntur ducendo exponentem faciei plus $\frac{1}{2}4$ per $\frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}$. Deinde *ducendo productum* per numerum facierum gnomonis, hocque toties faciendo quot sunt diversa genera facierum in dato corpore; deinde producto addendo vel tollendo numerum radicum ductum per $\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}4$, et numerum angulorum ductum per 14.[23]

* DESCARTES fait suivre ce premier exemple de formation d'un nombre polyédral semi-régulier, par six autres semblables, que je suis contraint d'omettre ici, faute d'espace. On en trouvera les résultats dans le tableau final, ci-après.

Ut si quærantur termini adæquales numeris figuratis qui representant corpus ex 20 triangulis et 12 pentagonis (*exempl[illegible] N:o 6*), quoniam gnomon hujus corporis constat ex 18 triangularibus faciebus et 10 pentagonis minus 48 radicibus et plus 21 angulis, primò addo $\frac{1}{2}4$ numero $\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}4$ qui est exponens faciei triangularis, et productum, nempè $\frac{1}{2}3 + 14$, duco per $\frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}$, fit $\frac{1}{6}4 + \frac{8}{6}3 + \frac{2}{6}4$, quod duco per 18 et fit $34 + 93 + 64$.

Deinde addo etiam $\frac{1}{2}4$ numero $\frac{3}{2}3 - \frac{1}{2}4$ qui est exponens faciei pentagonalis et fit $\frac{8}{2}3$, quod, ductum per $\frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}$, fit $\frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}3$, et deinde per 10 fit $54 + 53$, quod si jungatur cum numero præcedente fit $84 + 143 + 64$. Unde si tollatur numerus radicum 48 ductum per $\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}4$, nempè $243 + 244$ fit $84 - 103 - 184$, cui si addatur 214 propter 21 angulos, fit $84 - 103 + 34$, numerus algebricus quæsitus.

Denique pondera omnium 14 solidorum, prout imaginamus illa oriri ex progressionibus arithmeticis, sunt:

Corporis designatio	Pondera algebrica	Pondera geometrica	Geometriæ axes majores	Origo geometrica	
Numerus				*fit ex*	*cujus lat[illegible]*
tetraedronalis	$\frac{1}{6}4 + \frac{1}{2}3 + \frac{1}{3}4$	$\sqrt{\frac{1}{72}}\,4$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\,4$	cubo	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ [illegible]
octaedronalis	$\frac{2}{3}4 + \frac{1}{3}4$	$\sqrt{\frac{2}{9}}\,4$	$\sqrt{2}\,4$	tetraedro	[illegible]
cubicus.........	14	14	$\sqrt{3}\,4$		
icosaedronalis	$\frac{5}{2}4 - \frac{5}{2}3 + 14$	$\left(\sqrt{\frac{125}{144}} + \frac{5}{4}\right)4$	$\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}\,4$		
dodeca-edronalis......	$\frac{9}{2}4 - \frac{9}{2}3 + 14$	$\left(\frac{7}{4}\sqrt{5} + \frac{15}{4}\right)4$	$\frac{1}{2}(\sqrt{15} + \sqrt{3})\,4$		
Corpus ex					
4 △ et 4 hexag.	$\frac{11}{6}4 - \frac{1}{2}3 + \frac{1}{3}4$	$\sqrt{\frac{529}{72}}\,4$	$\sqrt{\frac{11}{2}}\,4$	tetraedro	[illegible]
8 △ et 6 □	$\frac{7}{3}4 - 23 + \frac{2}{3}4$	$\sqrt{\frac{50}{9}}\,4$	24	cubo	[illegible]
8 hexag. et 6 □	$\frac{17}{3}4 - 63 + \frac{4}{3}4$	$\sqrt{128}\,4$	$\sqrt{10}\,4$	octaedro	[illegible]

[illegible]poris [illegible]gnatio	Pondera algebrica	Pondera geometrica	Geometriæ axes majores	Origo geometrica	
[illegible]pus ex				*fit ex*	*cujus latus*
[illegible] △ et 6 [illegible]ng.	$\frac{31}{6}4 - \frac{9}{2}3 + \frac{1}{3}4$	$\left(\sqrt{\frac{392}{9}} + 7\right)4$	$\sqrt{7 + \sqrt{32}}\,4$	cubo	$(1 + \sqrt{2})\,4$
△ et 18 □	$\frac{37}{6}4 - \frac{15}{2}3 + \frac{7}{3}4$	$\sqrt{\frac{200}{9}}\,4$	$\sqrt{5 + \sqrt{8}}\,4$	cubo oct.	$(1 + \sqrt{2})\,4$ $\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)4$
[illegible] hexag. et [illegible] pentag.	$\frac{35}{2}4 - \frac{47}{2}3 + 74$	$\left(\sqrt{\frac{9245}{16}} + \frac{125}{4}\right)4$	$\sqrt{\frac{29}{2} + \frac{9\sqrt{5}}{2}}\,4$	icos.	34
[illegible] △ et 12 [illegible]ntag.	$84 - 103 + 34$	$\left(\frac{17}{6}\sqrt{5} + \frac{15}{2}\right)4$	$(1 + \sqrt{5})\,4$	icos. dodec.	24 $(\sqrt{5} - 1)\,4$
[illegible] △ et 12 [illegible]ecag.	$\frac{33}{2}4 - \frac{41}{2}3 + 54$	$\left(\frac{235}{12}\sqrt{5} + \frac{165}{4}\right)4$	$\sqrt{\frac{37}{2} + \frac{15\sqrt{5}}{2}}\,4$	dodec.	$\sqrt{5}\,4$
[illegible] △, 30 □ et 12 pentag.	$184 - 253 + 84$	$\left(\frac{29}{3}\sqrt{5} + 20\right)4$	$\sqrt{11 + \sqrt{80}}\,4$	icos. dodec.	$\left(\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)4$ $\left(\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right)4$

Supersunt 2 corpora: unum ex 6 octogonis, 8 hexagonis et 12 quadratis; aliud ex 30 quadratis, 12 decagonis et 20 hexagonis.[24]

[1] Voir à ce sujet les *Oeuvres inédites de* DESCARTES publiées par M. FOUCHER DE CAREIL (Paris 1859—1860). Voir aussi mes communications dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] t. **110**, 1890, pages 261, 315 et 677. Les notes explicatives sont un abrégé de celles que contiendra le Mémoire présenté à l'académie le 31 mars 1890; je supprime aussi la plupart des démonstrations qu'on y trouvera.

[2] Ces lacunes, peu nombreuses d'ailleurs, sont imputables, pour la plupart, à l'accident survenu à la caisse qui contenait les papiers de DESCARTES. On la laissa tomber dans la Seine en la débarquant du bateau qui l'apportait, et malgré les soins que l'on prit pour faire sécher les papiers, il s'ensuivit quelques détériorations. C'est dans cet état que LEIBNITZ les reçut plus tard, et les copia avec l'intention (non réalisée) des les publier à ses frais.

[3] Ces premières lignes n'existent pas dans le texte primitif, soit que DESCARTES ait jugé inutile (dans ces *notes* qui n'étaient point encore une rédaction définitive, mais de simples matériaux) de rappeler ces propositions bien connues, soit que, pour le même motif, LEIBNITZ, dont les loisirs étaient comptés, ait négligé de les copier. Elles sont d'ailleurs nécessaires pour l'intelligence de la phrase suivante (la première du texte), et sans elles le mot *his* qui précède »*angulis planis rectis*» resterait sans explication et n'aurait même aucun sens.

[4] Voir au sujet de ce mot *his* la fin du nota précédent. »*Constet ex his* . . .» a ici le sens de »dérive de ces...»

[5] Le texte dit *planumque* ou, plus probablement, *planeque*, mais le sens n'est pas douteux, il veut dire »manifestement». C'est sur le théorème, très général et très simple, énoncé dans cet alinéa, que DESCARTES fonde toute la polyédrométrie; il en déduit notamment, comme on le verra, les rélations *dites d'*EULER. Le mot *intelligo*, dont il se sert en définissant l'angle *externe* d'un polyèdre, semble indiquer qu'il s'attribuait la priorité de cette notion. Le fait qu' ALBERT GIRARD en a émis une semblable dans son ouvrage *Invention nouvelle en algèbre* (Amsterdam 1629), n'infirmerait d'ailleurs point cette priorité; car à cette date de 1629, DESCARTES fixait sa résidence à Amsterdam, *après avoir déjà séjourné antérieurement dans cette ville*, et tout prouve que les notes *de solidorum elementis* datent de la jeunesse de l'auteur.

[6] En d'autres termes, $\Sigma = 4S - 8$. C'est de ce théorème, retrouvé plus tard par EULER, que ce grand géomètre disait: »hæc propositio ita cum præcedente ($S + H = A + 2$) cohæret, ut si altera demonstrari posset, simul alterius demonstratio haberetur» (Novi Commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ 4 [ad annos 1752 et 1753], 1758, p. 162). On voit que DESCARTES avait déjà satisfait à ce desideratum, à l'insçu d'EULER.

[7] Prisme.

[8] Le texte dit *quoties*, ce qui est évidemment une faute de copie.

[9] DESCARTES connaissait bien cette corrélation polaire, et il en fait usage plus loin, au tableau final.

[10] Ces formules sont défigurées dans le texte par des fautes de copie qui les rendent inintelligibles. La démonstration de la proposition est des plus faciles.

[11] C'est une conséquence de la proposition ci-dessus, exprimée par la formule $\Sigma = 4S - 8$.

[12] Si A est le nombre des arêtes, F celui des faces et B celui des angles plans, on a, par cet alinéa et par le précédent: $\Sigma + 4F = 4B$ et $B = 2A$, d'où l'on conclut immédiatement la fameuse relation $F + S = A + 2$; ainsi que j'en ai fait la remarque dans les Comptes Rendus etc. t. **110**, 1890, p. 263. J'ignorais, en faisant cette communication, que M. Baltzer avait déjà fait le même rapprochement, et conclu en ces termes (que je traduis): »D'après cela, il est hors de doute qu'outre tant de brillantes découvertes qui glorifient son nom, celle du théorème fondamental de la polyédrométrie lui appartient aussi, et qu' Euler doit désormais en partager l'honneur avec son grand précurseur, le fondateur de l'Analyse moderne (V. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1861, p. 1043—1046). On va voir que Descartes fait plus, et qu'il énonce formellement et explicitement la relation $F + S = A + 2$, ce que M. Baltzer n'avait pas remarqué.

[13] Ce »*quia in eodem corpore*» est une application de la relation $F + S = A + 2$.

[14] Ces définitions semblent avoir principalement pour objet de permettre une grande concision dans l'énoncé de la proposition qui suit. Descartes omet l'égalité par superposition, qui est par trop évidente. La seconde espèce d'égalité, implique l'égalité de la somme des angles plans, de telle sorte que l'un des angles solides peut être transformé dans l'autre, en découpant ses faces et les rajustant ensemble telles qu'elles sont dans ce dernier.

[15] Le texte imprimé dit, par erreur de copie, *quœstionis*. L'égalité de répartition, dont il est ici question, ne peut convenir qu'au cas, où tous les angles solides sont composés de la même manière.

[16] Voici donc l'énoncé *explicite* de la relation $F + S = A + 2$, en désignant α par S et F par φ.

[17] Le texte porte *quantitatis*, qui doit être une faute de copie. Les rhomboïdes dont il s'agit ici, ne sont pas les mêmes que ceux dont il a été question ci-dessus.

[18] C'est, comme on le voit, dans cet alinéa que se présentent les plus nombreuses lacunes. On y trouve aussi de nombreuses fautes de copie, qu'il a fallu d'abord corriger pour qu'il devînt intelligible. »*Polygonalia pondera*» sig-

nifie »les valeurs des nombres polygones»; ainsi »*trigonale pondus*» veut dire »le nombre triangulaire», et ainsi des autres dont il s'agit dans le premier tableau. Il a fallu, en outre, deviner que les chiffres **3** et **4**, qu'on rencontre dans les formules telles que $\frac{1}{2}\mathbf{3} + \frac{1}{2}\mathbf{4}$, puis **14** et **13** ou **24**, y représentent le carré m^2 et la première puissance m de l'indéterminée algébrique m ou enfin $2m$, respectivement. Ainsi $\frac{1}{2}\mathbf{3} + \frac{1}{2}\mathbf{4}$ signifie $\frac{m^2+m}{2}$, ce qui est bien la valeur du »nombre triangulaire». Pareillement, **14** signifie m, **13** signifie m^2 etc.; mais DESCARTES, qui voulait sans doute garder provisoirement son secret, ne donne pas la moindre explication au sujet de cette notation énigmatique. Dans la reproduction du texte ci-dessus, ces chiffres 3 et 4 sont imprimés demi-grasses. Passant à l'examen des tableaux qui suivent, si l'on considère d'abord le premier, on y voit le mode de formation, connu, des »nombres triangulaires, carrés, pentagones, hexagones» etc. (dont les valeurs se trouvent, respectivement, dans la colonne O), en prenant pour point de départ de la formation de chacun d'eux les deux nombres $+R$ et $-A$ qui constituent son *gnomon*, c'est-à-dire qui sont les *index* des deux premières colonnes. Pour s'expliquer l'emploi des initiales R et A des mots latins *Radices* et *Anguli*, autrement dit ici, *côtés* et *sommets* (ou angles), il m'a fallu reconnaître d'abord que relativement au *premier* polygone géométrique, dans chaque espèce, si l'on prend un de ses sommets pour origine (centre d'homothétie de tous ceux de même espèce qui suivent), R exprime le nombre des côtés qui ne passent pas par l'origine, et A le nombre des sommets qui ne sont pas situés sur les deux côtés issus de ce sommet. Ainsi pour l'hexagone, il y a 4 côtés ne passant point par l'origine et 3 sommets étrangers aux deux côtés issus de cette origine. Ces deux nombres $+4$ et -3 forment ensemble le gnomon de la table du nombre hexagone, et il est aisé de se rendre compte géométriquement pourquoi le second de ces nombres est soustractif, tandis que le premier est additif.

Pour les polyèdres réguliers et les »nombres polyédraux» qui s'y rattachent (dont on n'avait, avant DESCARTES, étudié que les nombres tétraédraux ou pyramidaux), le gnomon se compose de trois nombres au lieu

deux, désignés dans le 2[d] tableau par les lettres F (faces), R (racines) et A (angles). L'étude de la question (dont DESCARTES ne dit absolument rien) m'a fait reconnaître que le nombre $+F$ est celui des faces auxquelles l'origine n'appartient pas; $-R$, toujours négatif, est le nombre des arêtes étrangères aux faces contiguës à l'origine. J'en donne la raison géométrique et la démonstration dans le Mémoire annoncé; elles ne sauraient trouver place ici. La colonne O contient, comme dans le premier tableau, les valeurs numériques successives des nombres polyédraux, comme on le reconnaît à première vue dans le tableau des nombres cubiques. La colonne F a, avec les nombres polygones correspondants, une relation que le lecteur apercevra aisément.

19 Le texte imprimé dit, par erreur, *propositio*.

20 Le sens de ces deux dernières lignes est le suivant: »D'où l'on voit que ces suites, fonctions de 𝟰, 𝟯, 𝟰, etc. d'après notre notation (c'est à dire de m, m^2, m^3, etc.), n'ont pas des liens nécessaires avec les figures géométriques dont elles portent les noms (car les cubes qu'on y rencontre y sont une exception trop rare pour infirmer cette règle), mais peuvent néanmoins être désignés, d'une façon générale, par ces diverses espèces de mesures.»

21 Ce mot *igitur* pourrait faire croire que DESCARTES fait connaître quelque part le mode de formation des *gnomons*, mais il n'en est rien; il est resté énigmatique sur ce point, comme sur le reste.

22 Cette table des différences 1[ère], 2[e], 3[e], a été, par erreur, reportée à la page suivante dans le texte primitif, bien qu'elle se rapporte au premier exemple. En revanche, on y a mis, à cet endroit, une autre table relative au septième exemple.

23 Cette Règle générale peut se traduire ainsi: »les formules algébriques de ces nombres figurés s'obtiennent en multipliant la formule relative au nombre polygone de l'une des faces, après y avoir ajouté $\frac{m}{2}$, par $\frac{m^2+m}{2}$; puis, en multipliant ce produit par le nombre des faces de cette espèce qui se trouvent dans le gnomon, en ayant soin de renouveler la même opération autant de fois qu'il y a d'espèces différentes de faces dans le corps donné; enfin il faut retrancher du produit total le nombre

des *Racines* multiplié par $\frac{m^2+m}{2}$, et y ajouter le nombre des *Angles* multiplié par m. »

Dans l'application que DESCARTES fait de cette règle au polyèdre semi-régulier composé de 20 triangles et 12 pentagones, il faut avoir soin de remplacer le chiffre terminal 3, chaque fois qu'il se présente, par m^2 et le chiffre terminal 4, tantôt par m^3, tantôt par m; car il a, selon la position qu'il occupe, cette double signification. Ainsi, pour la formule finale écrite par DESCARTES ci-dessus, on doit lire $8m^3 - 10m^2 + 3m$. On trouvera dans mon Mémoire la démonstration de cette Règle fort simple, déduite des considérations géométriques, très élégantes, exposées brièvement ci-dessus.

Dans le tableau qui suit, il faut faire la même substitution des lettres m, m^2, m^3, aux chiffres terminaux 4, 3, 4 de la 2ᵉ colonne; puis celle de a^3 (a étant l'arête du polyèdre) au même chiffre 4, dans la colonne 3ème qui donne, en fonction de a^3, le volume géométrique du solide; et enfin celle de a au chiffre 4 dans les colonnes 4ᵉ et 5ᵉ, où l'on trouve l'expression, en fonction de l'arête a, du diamètre de la sphère circonscrite, et le mode de dérivation de chaque polyèdre en prenant pour pour point de départ l'un des cinq polyèdres réguliers convexes. Un assez grand nombre de fautes de copie se sont glissées dans les formules de ce tableau, telles que les donne le texte primitif. Je les ai rectifiées toutes, après une vérification attentive de tous les calculs. Il en est même de quelques uns dans la 2ᵉ colonne, que la copie imprimée n'a pas reproduits, ou que DESCARTES s'était dispensé d'écrire.

[24] Ces deux polyèdres, joints au neuf qui figurent sur le tableau à la suite des cinq polyèdres réguliers, forment onze des treize polyèdres semi-réguliers convexes, *dits d'*ARCHIMÈDE, parce que PAPPUS attribue à ce grand géomètre l'honneur de leur découverte, bien qu'il n'en reste aucune trace dans les oeuvres qui nous ont été conservées de lui. KEPLER les a mentionnés, à son tour, dans son ouvrage *Harmonices mundi libri V* (Lincii 1619, in-fol.), en même temps que deux des polyèdres réguliers étoilés, *dits de* POINSOT. Ils l'ont été plus tard par GERGONNE et LIDONNE; mais ils ont été surtout étudiés, de nos jours, par MM. CATALAN et BADOUREAU par ...

méthodes différentes, dans deux importants et savants mémoires publiés, l'un dans le 41[e] cahier du Journal de l'école polytechnique, à la date du 3 décembre 1862, t. **24**, pages 1—72; l'autre, portant le titre de *Mémoire sur les figures isoscèles*, dans le 49[e] cahier du même recueil, 1881, (t. **30**, pages 47—172), où ils font le sujet du premier chapitre (p. 51—85). On voit que DESCARTES avait fait aussi une étude aprofondie et fort exacte de onze d'entre eux. Les formules qu'il donne pour exprimer leurs volumes et leurs axes majeurs sont présentées (en ce qui concerne les polyèdres réguliers) sous une forme parfois plus simple que celle dont on fait aujourd'hui usage, mais qui s'y ramène d'ailleurs aisément.

De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX.

Scripsit PETRUS RICCARDI Mutinensis.

Postquam doctissimo viro ANTONIO FAVARO in Athenaeo Patavino scientias mathematicas profitenti, de mea *Biblioteca matematica italiana* in hacce Ephemeride an. 1889 (pag. 115) cum summo favore, benevolentiae causa, disserere placuit, bonum existimo breviter referre ea quae in recenti conventu (d. 23 Feb. 1890) Regiae Academiae Bononiensis scientiarum Instituti exposui de propositione novae *Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX*.

Hoc opus, cujus specimen clarissimis sodalibus Academiae tradidi, comprehendere deberet, demonstratione satis ampla titulorum, scripta omnia mathematica typis excusa ab authoribus italicis hujus seculi.

In praefatione speciminis sermonem habui de principiis quibus hoc opus innixum foret ad scientiae finem tangendum: videlicet ostendendi scripta in omnes mathematicae scientiae partes proximis temporibus typis vulgata.

Primum igitur erit *Catalogus* continens scripta mathematica per materias distributa et ordine chronologico digesta. Deinde *Elenchus* operum per argumenta sive subjecta, alphabetice ordinata et numeribus Catalogi relata. Tertio *Index* sive syllabus nominum auctorum, cum indicatione commentariorum eorum vitam recensentium; et cum numeratione eorum operum eodem Catalogo pariter relata.

Ad hoc opus instruendum, praeter caeteras gravissimae binae difficultates, ut patet, sese objiciunt. Prima nempe praenoscendi scripta omnia mathematica in lucem edita, sive seorsim, sive in miscellaneis italicis aut extraneis inserta. Altera vero secernendi scripta quae, affinitatis argumenti gratia, comprehendere liceat in Bibliotheca mathematica hujus seculi.

Haec breviter propositio mea *Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX*.

Utinam ad hoc opus perficiendum, saluti nostrae ita consulere possemus, ut dignitati scientiae et patriae consulere exoptamus.

Mutinae, die V Martii, MDCCCXC.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

ALGORITMUS, TO JEST NAUKA LICZBY, POLSKA RZECZA WYDANA PRZEZ KSIEDZA TOMASZA KLOSA. 1538. WYDAL **M. A. Baraniecki.** Krakow 1889. 8°, XXIV + 56 p.

Cet *Algoritmus* est le premier traité d'arithmétique publié en polonais; ayant été remplacé plus tard par d'autres traités polonais ou latins, il tomba en oubli et devint une rareté bibliographique. C'est M. BARANIECKI qui dans son Arithmétique (1884) nous en a donné la première description.

Il ne nous reste actuellement que trois exemplaires de ce livre, dont deux sont gardés à Cracovie et le troisième a été récemment retrouvé à Wilno. Tous les trois sont incomplets, mais heureusement ils se complètent mutuellement, et en comparant les trois exemplaires M. BARANIECKI en a pu restituer le texte original.

Dans ce petit traité, comme dans la plupart des livres arithmétiques publiés vers le milieu de XVI[e] siècle, nous trouvons exposé le système décimale de numération avec les chiffres indiens et la représentation des nombres »sur les lignes», c'est à dire sur une tablette à calculer (le mot *Abacus* n'y figure pas). Le traité de KLOS contient aussi des tables de multiplication, les quatre règles d'arithmétique pour les nombres entiers, règle des trois, un chapitre sur les fractions et diverses applications aux questions commerciales. L'auteur énonce les règles sans s'inquiéter de leur démonstration, et il les applique immédiatement aux exemples et aux problèmes, écrivant les données et les résultats en chiffres indiens, mais faisant les calculs »sur les lignes» sans en expliquer le procédé. Dans quelques problèmes il applique néanmoins les règles de l'arithmétique indienne pour simplifier les opérations; ce qui démontre que cette méthode ne lui était pas tout à fait inconnue.

Dans la préface, M. BARANIECKI donne des renseignements sur le contenu du livre ainsi que sur la langue et sur les mesures y employées. Quant à son opinion que l'*Algoritmus* de KLOS soit purement un traité d'*Abacus*, je ne la partage pas; en effet, comme j'ai dit plus haut, on y voit des traces de l'arithmétique décimale algorithmique.

L'édition de M. BARANIECKI est très soigneusement faite, le texte est restitué très correctement et les passages peu intelligibles sont commentées dans les notes.

Varsovie. S. DICKSTEIN.

B. Carrara. La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino, Paravia 1889. 8°, 30 p.

Die vom Verfasser als die Newtonsche bezeichnete Methode zur näherungsweisen Ausziehung der Quadratwurzel, bei welcher, unter $\sim$ soviel wie »approximativ gleich» verstanden,

$$a_1 \sim \sqrt{n} \equiv \sqrt{a^2 + p} = a + \frac{p}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{n}{a}\right);$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right); \quad \ldots; \quad a_m = \frac{1}{2}\left(a_{m-1} + \frac{n}{a_{m-1}}\right)$$

gesetzt wird, ist nicht erst von Newton erfunden, sondern geht, den gleichzeitig und mit gegenseitiger Unabhängigkeit angestellten Ermittlungen Favaro's und des Unterzeichneten zufolge, bis auf die deutschen und italienischen Algebraiker aus dem Beginne des XVI. Jahrhunderts zurück. Die Annäherung ist, wie hier gezeigt wird, eine sehr rasche; für $\sqrt{2} \equiv \sqrt{1^2 + 1}$ hat man z. B.

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{17}{12}, \quad a_3 = \frac{577}{408}, \quad a_4 = \frac{665857}{470832},$$

und dieser letzte Wert ist bereits nur um ganz wenig grösser, als die vorgelegte Wurzel. Dass das beschriebene Verfahren im wesentlichen auf eine Kettenbruchentwicklung hinauslief, d. h. dass zwischen den Näherungsbrüchen des Kettenbruches

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \cdots}}}$$

und den »Newtonschen» Näherungswerten jene Beziehung obwaltet, für welche Seidel den Namen der »Äquivalenz» in Vorschlag gebracht, und mit welcher auch der Unterzeichnete sich mehrfach beschäftigt hat, war ebenfalls eine bekannte Sache (s. u. a. die Beweise Alexejeffs und des Referenten im Bulletin de la société mathématique de France $\mathbf{5}_2$, 1881, und in den Mémoires de la société des sciences de Bordeaux $\mathbf{5}_2$, 1882). Neu aber und verdienstlich ist der hier geführte Nachweis, dass auch die Lagrange'sche Kettenbruchdarstellung, von welcher der Verf. zuvor eine übersichtliche Charakteristik gibt, dem so rasch konvergierenden Verfahren von oben äquivalent, d. h. dass je ein bestimmter Näherungswert der einen einem Näherungswerte der anderen Entwicklung

[redacted]

gleich ist. Das Gesetz, nach welchem sich diese Uebereinstimmung richtet, ist ein verhältnismässig einfaches, eine nahe liegende Verallgemeinerung desjenigen, welches in den soeben namhaft gemachten Aufsätzen verifiziert, thatsächlich aber zuerst, soweit unser Wissen reicht, an einem allerdings etwas specielleren Falle von MORET-BLANC erkannt worden ist. Die vom Berichterstatter früher (Mathem. Annalen, **7**, 1873, S. 267) noch als offen hingestellte Frage, ob zwischen den beiden an sich so verschiedenen Kettenbruchentwicklungen einunddderselben Irrationalzahl,

$$\sqrt{n} \equiv \sqrt{a^2 + p} = a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \dots}}}$$

und

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2a + (\sqrt{n} - a)}}}}}$$

eine Beziehung bestehe, ist jetzt endgiltig dahin beantwortet, dass durch das Näherungsverfahren von NEWTON, richtiger von TARTAGLIA, eine solche Verwandtschaft in Form von Äquivalenz — zu gunsten welches Wortes der Verf. wohl auch die doch nicht ganz sinngemässe »Koinzidenz» fallen zu lassen bereit sein wird — vermittelt erscheint. Und darin glauben wir eine wirkliche Bereicherung der algebraischen Analysis erblicken zu dürfen, aber auch die gute Lehre ziehen wir aus dem Schriftchen: Man vernachlässige nicht die Geschichte der Mathematik!

München. S. GÜNTHER.

Th. Muir. THE THEORY OF DETERMINANTS IN THE HISTORICAL ORDER OF ITS DEVELOPEMENT. PART I. DETERMINANTS IN GENERAL. LEIBNITZ (1693) TO CAYLEY (1841). London, Macmillan and C°. 1890. 8°, XI + 278 p.

La teoria dei determinanti occupa un posto *sui generis* nello scibile matematico. Nata dalla necessità di rendere più agevoli alcune operazioni algebriche complicate o più perspicui i risultati di certi lunghi calcoli, essa rappresentò sempre nella scienza nostra la parte di collaboratrice modesta ma efficace; combattuta e tenuta quasi in dispregio da molti che non trovavano in essa se non un puro formalismo, essa apparve, per

converso, ad altri dotata di attrattive così potenti che la ritennero degna di assorbire tutta la loro attività scientifica. Ora, quasi come premio degli innumerevoli ed importanti servigi resi, essa ha ottenuto un posto stabile nella matematica ed è sicura di venire chiamata in ajuto ogniqualvolta si voglia risolvere qualche problema algebrico con celerità ed eleganza.

Anche riguardo alle raccolte di notizie su l'origine e lo sviluppo di tale teoria, questa manifesta una fisonomia sua propria: infatti, mentre per altre dottrine più antiche e importanti tali raccolte fanno completamente difetto, le migliori fra le trattazioni della teoria dei determinanti (cito ad esempio quella classica del Baltzer), ne contengono ampie notizie storico-bibliografiche o schizzi della storia: nè mancano monografie aventi per iscopo di indicare l'evoluzione successiva di essa teoria, nè infine cataloghi delle scritture che ad essa si connettono. Ciò che finora mancava era una esposizione critico-comparativa completa ed esatta di tutti i contributi dati dai varii autori alla creazione e allo svolgimento della teoria. Il farla presentava non lievi difficoltà, giacchè, appunto per la suscettibilità dei determinanti di venire applicati in isvariatissime questioni, un gran numero delle proposizioni che li concernono s'incontrano in lavori che a prima giunta sembrerebbero estranei ad essi: e questa osservazione, la quale depone a favore del merito di chi si accinse a formarla, è eziandio argomento di gran peso per dimostrare l'utilità di essa.

Tale compito difficile e utile si è proposto il Sig. Muir nell'opera alla cui prima parte è consacrato questo articolo.

Questa parte comprende le opere scritte a partire dal momento in cui Leibnitz ne adombrò la teoria in una celebre lettera al Marchese de l'Hôpital (28 Aprile 1693) fino al momento (1841) in cui cominciò ad occuparsene Cayley. Fra gli autori di esse alcuni sono matematici famosi (Bézout, Binet, Cauchy, Cramer, Gauss, Gergonne, Jacobi, Lagrange, Laplace, Leibnitz, Monge, Sylvester, Vandermonde, Wronski), mentre altri sono meno noti o erano totalmente sconosciuti (Catalan, Crawford, Desnanot, Drinkwater, Garnier, Grunert, Hindenburg, Hirsch, Lebesgue, Mainardi, Minding, Prasse, Reiss, Richelot, Rothe, Scherk, Schweins). Prescindendo da due — il Mainardi e il Wronski, la cui influenza fu d'altronde assai meschina — tutti questi scienziati ebbero culla in Francia, in Germania, o in Inghilterra; e mentre nel periodo 1693—1812 i corifei in questa come nelle altre discipline matematiche appartengono alla Francia, alla Germania

per contrapposto appartengono coloro che con maggior successo se ne occuparono negli anni 1812—1841.

Quanto fecero questi scienziati; in che cosa differiscono i loro studii, vuoi nel punto di partenza, vuoi nei ragionamenti adoperati, nelle denominazioni scelte, nelle notazioni escogitate, nelle conclusioni ottenute; quali e quanti punti comuni ebbero le trajettorie scientifiche da essi descritte: tutto questo si determina agevolmente coll'ajuto degli indici e dei quadri riassuntivi che accompagnano il lavoro del Sig. Muir. I quali lo rendono ancora più profittevole e lo raccomandano anche come opera di semplice consultazione, mentre la forma chiara ed esatta in cui è scritto nonchè i molti altri meriti intrinseci, l'additano come opera meritevole di studio.

Un articolo bibliografico su una produzione qual' è quella del Sig. Muir non può finir meglio che coll' espressione di un desiderio e di un augurio: il desiderio di vederla presto compiuta, l'augurio che essa trovi accesso nelle biblioteche di tutti colori i quali fanno propria la massima: *Nulla eruditionis pars potest accurate cognosci sine eiusdem historia.*

Genova, 20 Aprile 1890. Gino Loria.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von ‖ journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.

1890: 1. — [Analyse de l'année 1888:] Fiziko-matem. naouki 1880, 228—232. (V. Bobynin.) — [Analyse de l'année 1889:] Das Archiv (Berlin) **3**, 1890, 88—89. (A. Gutzmer.) — [Notice sur la nouvelle série du journal:] *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **110**, 1890, 873. (E. de Jonquières.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1889: 3 — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.

35 (1890): 2. — [Analyse de l'année 1888:] Fiziko-matem. naouki 1889, 227—228. (V. Bobynin.)

Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, tenu à Paris du 16 au 19 juillet 1889. Procès-verbal sommaire. Paris 1889.
8°, 66 p.

Curtze, M., Kommentar zu dem Tractatus de numeris datis des Jordanus Nemorarius. Buch I und II. (Sonderabdruck aus dem Osterprogramm 1890 des königl. Gymnasiums zu Thorn.) Thorn 1890.
4°, (2) + 19 p. — Ces 19 pages ne se rapportent qu'au premier livre du *Tractatus de numeris datis*.

Dickstein, S., Wiadomosc bibliograficzna o badaniach historyczno-matematycsnych w Polsce.
| Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa) **2**, 1890. 20 + (1) p. — Traduction, avec des additions, de la *Notice bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne* (Biblioth. Mathem. 1889, 43—51).

Eneström, G., Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques.
Biblioth. Mathem. 1890, 1—10.

Eneström, G., Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés.
Biblioth. Mathem. 1890, 22—24.

Favaro, A., Rarità bibliografiche Galileiane. I. II. Di una rara edizione tedesca e di una rarissima traduzione francese del Sidereus Nuncius. III. Sopra una traduzione inglese di alcune opere di Galileo.
| Rivista delle biblioteche (Firenze) n° 18—19, 1889. 13 p.

Favaro, A., Intorno alla licenza di stampa del Sidereus Nuncius di Galileo Galilei.
| Rivista delle biblioteche (Firenze) n° 18—19, 1889. 8 p.

Favaro, A., Intorno ai servigi straordinarii prestati da Galileo Galilei alla Republica Veneta.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1**$_7$, 1890, 91—109.

Favaro, A., Ulteriori ragguagli sulla pubblicazione dei manoscritti di Leonardo da Vinci.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1**$_7$, 1890, 251—276.

Favaro, A., Relazione della giunta del r. Istituto Veneto; deputata all' esame dei lavori presentati al concorso della fondazione Tomasoni sul tema: Storia del metodo sperimentale in Italia.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1**$_7$, 1890, 319—343.

Favaro, A., Serie quinta di scampoli Galileiani.
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie **6**, 1890. 39 p.

Hellmann, G., Die Anfänge der meteorologischen Beobachtungen und Instrumente.
| Himmel und Erde (Berlin) **2**, 1890. 24 p. + 1 pl.

[redacted]

Jonquières, E. de, Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **110**, 1890, 110—115, 169—173. — Note critique et historique.

Jonquières, E. de, Note sur un mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **110**, 1890, 261—266, 315—317.

Jonquières, E. de, Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes: De solidorum elementis, la traduction et le commentaire de cet ouvrage.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **110**, 1890, 677—680.

Ocagne, M. d', C. W. Borchardt et son oeuvre.
| *Bruxelles,* Soc. d. sc., Revue des questions scientifiques 1890. 11 p.

Picard, E., Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **110**, 1890, 489—497.

Rudio, F., Das Problem von der Quadratur des Zirkels.
| *Zürich,* Naturf. Gesellsch., Vierteljahrschrift 1890. 51 p. — Notice historique.

Steinschneider, M., Über eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea.
Biblioth. Mathem. 1890, 11—12.

°**Tannery, P.,** Pascal et Lalouvère.
| *Bordeaux,* Soc. des sc., Mémoires 1890. 30 p.

Weber, H., Paul du Bois Reymond.
Mathem. Ann. **35**, 1890, 457—469.

Vicuña, G., Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques.
Biblioth. Mathem. 1890, 13—21.

Vigarié, E., Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle.
| Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Paris) 1889. 25 p.

°**Wolf, R.,** Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. Band I: 1. Zürich 1890.
8°, 16 + 384 p. — [8 M.]

Question 29 [sur des tables de produits calculées au moyen âge].
Biblioth. Mathem. 1890, 32. (G. ENESTRÖM.)

BALL, W. W. R., A history of the study of mathematics at Cambridge. Cambridge, Deighton 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1890, 25—26. (G. ENESTRÖM.) — Bullet. d. sc. mathém. **14**$_2$, 1890, 89—94. (B. B.)

CURTZE, M., Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV. Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift Db. 86. der konigl. offentlichen Bibliothek zu Dresden herausgegeben. Thorn 1887.
Biblioth. Mathem. 1890. 26—27. (G. ENESTRÖM.)

LORIA, G., I poligoni di Poncelet. Torino 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1890. 27. (G. ENESTRÖM.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1890 28—32. — Fiziko-matem. naouki 1889. 233—245. — Zeitschr. für Mathem. 35. 1890; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

30. Dans plusieurs traités de cosmographie publiés au 16ᵉ siècle (voir p. ex. APIANUS, *Cosmographicus liber*, Landshut 1524, p. 39) on donne, pour déterminer la distance entre deux lieux sur la surface de la terre, une règle équivalant à la formule suivante (ou l, l' sont les longitudes, φ, φ' les latitudes des deux lieux):

$$\text{la distance} = \sqrt{(l - l')^2 \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) + (\varphi - \varphi')^2}.$$

Quel est le premier auteur qui ait indiqué cette règle?
(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1890.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 4. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 4.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Die Sammlung von Handschriften, welche AMPLONIUS *de Berka* gegen Ende des XIV. Jahrhunderts anlegte, und die sich jetzt in Erfurt befindet, gehört, nach ihrem mannigfaltigem Inhalte, ihrem Umfange und dem Alter der Mss., zu den bedeutendsten und lehrreichsten. Einzelnes war durch gelegentliche Mitteilungen und Ausgaben verschiedener Gelehrter, wie z. B. V. ROSE, bekannt geworden, und eine vollständige Beschreibung derselben war ein wirkliches Desideratum. Erst 1887 erschien *Beschreibendes Verzeichnis der amplonianischen Handschriften-Sammlung zu Erfurt im Auftrage und auf Kosten des K. Preussichen Unterrichtsministerium bearbeitet etc. von* WILHELM SCHUM. (Berlin, Weidmansche Buchhandlung, LVIII + 1010 Seiten.)

Ich beabsichtige einzelne Bemerkungen über Handschriften dieser Sammlung auf dem Gebiete der Mathematik hier niederzulegen, nicht eine Kritik des Werkes zu geben, muss aber jenen speciellen Bemerkungen einige allgemeine vorausschicken.

Der Verfasser des Verzeichnisses giebt über die Sammlung selbst und seine Beschreibung in dem »Vorworte» weitläufige Auskunft, so weitläufig, dass nicht jedem Benutzer zugemutet werden kann, die, an und für sich interessante »Geschichte» der Sammlung und ihrer Beschreibung durchlesen. Für meine Bemerkungen ist folgende Stelle hervorzuheben: »Für die Be-

zeichnung des Textes und ihrer Verfasser erschien es mir bei den aus dem ältesten Bestand erhaltenen Handschriften angezeigt, die wörtlichen Angaben des Catalogs von 1412 als Überschriften aufzunehmen». Das hier genannte, nach Wissenschaften eingeteilte Verzeichniss ist in den Beilagen, S. 785—867, vollständig mitgeteilt, so dass eine Controlie darüber, was jenem Verzeichniss entnommen sei (und das ist nicht der geringere Teil) wohl möglich ist. Wer aber den Catalog, respective den Index, benutzt, ohne von der angeführten Stelle des Vorwortes Kentniss genommen zu haben, der wird leicht in den Irrtum geraten, die Notizen des AMPLONIUS auf Rechnung der Mss. selbst zu setzen. Welche Bedeutung ein solcher Irrtum für die Bibliographie gewinnen kann, bedarf keiner Auseinandersetzung.

Herr SCHUM hat sich die grösste Mühe gegeben, ein Bild der Mss. zu entwerfen bis auf die kleinsten Kleinigkeiten der Schrift, u. s. w. Mit derselben Genauigkeit verzeichnet er auch Anfänge und Schlüsse, Epigraphe etc. mit steter Hinweisung auf Dubletten und gewährt dadurch dem Benutzer sichre Anhaltspunkte. Bei der Mannigfaltigkeit der Gegenstände ist aber eine Kentniss aller betreffenden Literaturen in einer Person unmöglich, und bei dem Umfange des Werkes war für kritische und literaturhistorische Bemerkungen, Hinweisungen auf andere Cataloge, kein Platz. Selbst eine Vergleichung mit den Editionen der beschriebenen Werke war dem Verfasser schwer zuzumuten, obwohl die Bedeutung eines Ms. oft nur im Verhältnis zur Publication besteht. Es wird also eine Nachlese von Ergänzungen und Berichtigungen von verschiedenen Seiten zu erwarten sein. Die nachfolgenden Bemerkungen beschränken sich für dieses Mal auf *arabische* Mathematiker, Astronomen und Astrologen nebst ihren Übersetzern nach der Reihenfolge des *Index*, wobei zu bemerken ist dass unter letzteren in der Regel nur die Mss. angeführt sind, in welchen der Namen des Übersetzers vorkommt, so dass man jedes Mal auch das Schlagwort des Autors vergleichen muss.

Es wäre hier noch ein Wort über die *Orthographie* der arabischen Namen zu sagen, welche in den Mss. selbst häufig wechselt, so dass eine Kentniss der Autoren selber dazu gehört, um aus den vielfachen Corruptionen die mindest schlechte als Schlagwort zu wählen; doch überlasse ich dieses Thema den einzelnen Fällen.

Der Index giebt nur die Nummer des Codex, nicht die der Bestandteile (es sind manchmal über 40) und der Seitenzahl; ich werde in der Regel diesem zeitraubenden Mangel

helfen; die Bestandtheile bezeichne ich mit Hochziffern. Die odices sind nach den 4 Formaten geordnet und beginnt danach ne neue Zählung, so dass das Format stets anzugeben ist.

Ich werde in vielen Fällen nur eine kurze Hinweisung f Quellen geben, in einigen jedoch unabgeschlossene Unterchungen zu einem Resultate zu führen suchen, die inhaltliche *deutung* der Schriften selten berühren. Der grösste Theil der er aufzuführenden Araber ist bereits behandelt in meiner Preishrift (S. 543—595) über *die hebräischen Übersetzungen des ittelalters*. Da aber dieses Buch nicht vor 1891 ausgegeben rd, so habe ich Verweisungen darauf hier unterlassen.

ABHALI (p. 872): *Tractatus de significationibus omnibus entiae astronomicae*. Anf.: »Dixit ABHALI: iste est liber in io exposui omnes»; Fol. 395^{33} f. 220—225 (S. 281) nur 6 ., also nur der Anfang eines gedruckten Werkes, worüber ehr unter ALBENAHAIT.

ABRAHAM JUDAEUS (p. 872). Dieser Artikel vermengt toren und Übersetzer und ist teilweise eine Doublette des rangehenden Art. ABEN ESRA.

Der Übersetzer des Buches *de Electionibus*, Oct. 83^2 (S. 0) in Barcelona 1134 ist ABRAHAM BAR CHIJJA (genannt SASORDA);[1]) der arabische Autor ist nicht ALI ABENRAGEL, aus ssen Buche die *Nativitates* in 83^1 gezogen sein sollen (s. unter esem), sondern ALI FILIUS ACHAMET (s. unter diesem und LBENAHAIT).

Die anderen Titel aus Ms. Oct. 89 (S. 747) sind die trologischen Schriften des ABRAHAM IBN ESRA (gest. 1167) d grössten Teils in der (indirekten) *gedruckten* Übersetzung s PETRUS APONENSIS, doch nicht ohne besonderes Interesse.[2])

Ich bemerke zunächst, dass das Ms. vollständig identisch heint mit Ms. Wien 5442^9 ff. (weniger genau beschrieben), wo m Namen ABRAHAM's die Bezeichnung »Additor» gesetzt ist - ohne Zweifel hat JOHANN DE WASIA aus einem solchen Ms. ese Bezeichnung an den Rand des Ms. Amplon., das ihm gert hat, zu n. 5 und 7 gesetzt; ich habe vermuthet, dass »adtor» aus »magister *adjutorii*» entstanden ist; dieses Wort im itel der ed. 1507 ist eine Übersetzung des Namen ESRA anzös. »*de aide*»). Mir sind aber einige Stücke in diesem ss. *verdächtig*, weil ich sie weder in den mir bekannten sehr hlreichen Mss. des Originals, noch in den sonst bekannten teinischen Mss., so wie in der vollständigen Ed. 1507 wiederkennen kann, wie Ampl. n. 3, W. 9 *de Interrogationibus*, dessen

Eingangsformel sich auf hebräische Reime zurückführen läss, welche meistens den Copisten angehören. Hingegen schein *de Interrogationibus* A. 4, W. 10 »ab alio editus« aus PETRUS, A. 5, W. 11 *de Electionibus*, kenne ich nicht, A. 6, W. 12 *de Electionibus* ist gedruckt u. bei SCHUM für »*hora* habet posse» zu lesen »*homo*». A. 7, W. 13 *de Nativitatibus*, wiederum mit einer Formel (s. oben A. 3) beginnend, erkenne ich nicht. A. 8, W. 14 *de Revolutionibus*, nach der Formel anfangend (bei SCHUM) »Cum sol revertitur ad gradum» ist ohne Zweifel ein *Theil* einer Schrift ABRAHAM's; denn dieser Anfang stimmt wörtlich mit dem hebräischen Mss. Bodl. in NEUBAUER's *Catalog* n. 2028[3] (p. 696: »astronomical rules»); ich habe aber in meinen *Études sur Zarkali* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 587; p. 121 des Sonderabdr.) bemerkt, dass dieses hebräische Stück zu den wörtlichen Auszügen gehöre, welche LEVI BEN ABRAHAM (um 1300) aus den Schriften des IBN ESRA gemacht hat (vgl. meinen Art. LEVI, in ERSCH und GRUBERS *Encyclopädie* Sect. II Bd. **37**, S. 297). — A. 9, W. 14 giebt sich als Excerpt aus einer nicht genannten Schrift, nämlich ein Exempel einer *Nativitas* (Horoscop), anf. »Domus prima, quia vero Mercurius», Ende in W.: »irascitur parentibus» in A. »semper erit, in alio audes curare»; das scheint schon ein Zusatz. Ich erinnere mich nicht, ein bestimmtes exemplificirendes Horoscop in den Schriften ABRAHAM's gefunden zu haben. Dagegen kennt man jetzt mehrere specielle Horoscope desselben, wovon eines auch zwischen den eigentlichen Abhandlungen vorkommt, doch finde ich obigen Anfang nicht in denselben.[3])

ALBATANI (p. 873), genauer AL-BATTANI, bekannt als BATEGNIUS (gest. 929), dessen *de stellarum numeris* das allein bekannte gedruckte Werk. Hier wird in Fol. 383[1] (S. 269), Qu. 356[1] (S. 597) ein *Commentar zum Almagest* aufgeführt; anf. »Omnium recte philosophantium verisimilibus conjecturis». Der Verfasser heisst nur »GEBER», und ich vermuthe dass hier irgend ein Vorwort zu dem gedruckten (aber höchst seltenen) astronomischen Werke des GIABIR BEN AFLAH vorangehe; dieses Werk enthält nämlich sicher Ms. Fol. 382 (S. 268), welches überschrieben ist: GEBER *astronomi Flores ex* PTOLOMAEI *libro cui Almagesti* etc. Auch *de Planetis et ascendente* Qu. 352[2] (S. 591), anf. »Dixit *Sadan* audivi *Albumazar*» ist offenbar irrtümlich dem ALBATEGNI in einer »späteren» Überschrift beigelegt. Es ist das an SCHADSÂN gerichtete *Memoriale* oder *Colloquium* von ABU MA'ASCHAR, worüber s. meine Nachweisungen in Zeitschr. der deutschen morgenl. Ges. **24**, 1870, 415, Noten z

BALDI, *Vite di matematici arabi* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1872; p. 15, 94 des Sonderabdrucks); im Catalog der arab. Mss. des British Museum, p. 624 Col. 2 (Excerpt) ist »Schad*sin*» uncorrect.

ALBENAHAIT (p. 624); dieser Namen ist in Ms. Qu. 372^{11} (s. 624) zu einem Excerpt aus MESEHALLA in der Überschrift hinzugefügt. Gemeint ist ohne Zweifel derselbe Autor, der oben ABHALI genannt wird, und dessen Persönlichkeit ich schon vor 20 Jahren festgestellt habe.[4]) ABU ALI JA'HJA AL-KHAJJÂT (eigentlich Näher, Flicker, in einer lateinischen Übersetzung *sarcinator* und *sutor*, schwerlich für *sartor*, s. weiter unten) war ein Schüler des MASCHALLAH; man darf ABU ALI nicht mit ALI verwechseln, wie es Herr SCHUM thut, indem er mehrere Mss. deren Identität mit »ABHALI» er erkannt hat, unter ALI ABENRAGEL aufführt. »*Liber* ALBOHALI (sic) *de judiciis nativitatum*», anfangend: »Iste est liber in quo exposui et *congessi* omnes significationes super nativitates de scientia judiciorum stellarum, quae non *debent* ignorari ab aliquo artefice etc.», erschien durch SCHONER (Nürnberg 1546) und wenig verändert 1549; es ist auch in vielen Mss. zu finden, wo der, im Druck fehlende Beinamen vielfach verstümmelt ist. Zu den Beispielen bei WÜSTENFELD, l. c. p. 42 kommt: *alfayhach* (Ms. Wien 5337^{22}, *tabulae* IV, 104), *Alcanah* in Ms. Libri n. 25 (p. 8 des Catalogs), *Alfahat* in Ms. Paris 7413^{13} (p. 353), *Alihait* (Ms. Digby 47) und *Albenait* im *liber novem judicum* (s. weiter unten). Eine französische Übersetzung des *Livre de* ALBOHALY *des natures* etc. enthält Ms. Voss 10 fol. (*Catal. Lugd. Bat.* ed. 1714, p. 358, im *Catalog. Mss. Angliae* II p. 69 n. 2668 als »de la signification des planètes»).[5]) Ein Ms. des arabischen Originals ist mir nicht bekannt. — Dieses Buch der Nativitäten enthält demnach sicher Ms. Ampl. Fol. 395^{23} (s. oben ABHALI) und 374^{12} (S. 626). Zweifelhaft sind Excerpte in Ms. Oct. 83^{1} (S. 740), wo SCHUM ausdrücklich auf 395^{23} verweist, obwohl das Ms. ABENRAGEL angiebt, dessen Werk in tract. IV, V ebenfalls Nativitäten behandelt; ebenso Duod. 18^{6} (S. 775), wo wieder Auszüge aus Fol. 374 vermutet werden.

Das gedruckte Werk, welches zu den ältesten arabischen seiner Art gehört, umfasst das ganze Gebiet in 50 Kapiteln, deren Index auf den sehr kurzen Eingang folgt. Vor dem 46. Kap. wird bemerkt, dass diese letzten Kapitel aus einem andern als dem zu Grunde gelegten sehr alten Ms. (welches dem König MATTHIAS von Ungarn gehört hatte) hinzugefügt seien, das Urteil über die Echtheit derselben dem Leser überlassen bleibe.

Hinter Kap. 50 folgt noch, ohne Nummer ein Kap. »de cautela in judiciis observanda». Kap. 46 »de domino horae» beginnt mit einem Citat aus HERMES. Ende des Ganzen: »Sic enim et certius et foelicius multo judicabis», so dass Ampl. Fol. 374 nicht vollständig scheint. Man hat vielleicht das Ganze auch in Bücher (Tractate) eingeteilt. Ms. Paris 7346[8] wird als »liber secundus de dignitatibus nati» bezeichnet; Kap. 30 der Ed. ist überschrieben: »de dignitate et opere nati, ac de significatis decimae domus». Das führt uns auf eine weitere Kategorie für die Bestimmung der Mss., namentlich der unvollständigen, nämlich die *Übersetzung* selbst.

Die Edition und alle bisher bekannten Mss. derselben, mit Ausnahme eines einzigen, nennen den Übersetzer nicht, so dass noch WÜSTENFELD (l. c.) das Buch unter PLATO VON TIVOLI aufführt. Nur in Bezug auf den Autor verweist er auf ein Verzeichniss von Übersetzungen, das er unter JOHANNES HISPALENSIS mitgeteilt hat (p. 37), und das allerdings für die Autorschaft nichts beweist.[6] Allein V. ROSE hat schon in der Zeitschrift Hermes, **8**, 1873, S. 332 bemerkt, dass ALBOHALI, nach COXE's Catalog der Laud'schen Sammlung (p. 424 n. 594[15]) auch von JOHANNES TOLETANUS (= JOH. HISPALENSIS) im Juli 1153 übersetzt worden (s. Zeitschrift für Mathem. **16**, 1871, 358). Nun stimmt aber jenes Ms., wie einige andere bei WÜSTENFELD, mit unbedeutenden Varianten, mit der Edition. Diese spätere Übersetzung hat offenbar die, nur 20 Jahre ältere verdrängt. — Von einer Übersetzung des PLATO VON TIVOLI gab zuerst BONCOMPAGNI in seiner Monographie über PLATO (p. 40) eine Notiz nach Excerpten in ms. Digby 57[17], zu welchen ich eine Ergänzung im Serapeum 1858 (S. 35, Anm. 3) hinzufügte. MACRAY in seinem *Catalogus* (1883 p. 61) bemerkt ausdrücklich, dass diese Übersetzung nicht die gedruckte sei. Vollständige Exemplare mit dem Datum Barcelona 530 Arabum, 1447 Alex. (1136) bieten die Mss. Digby 47[18] (MACRAY p. 43): »Abluali (sic) Alchait», 51[18] (p. 48): »Abuali *Alchaiat*» übers. *sutor*, Ms. Libri 25 (s. oben). Cf. »Abnabalgharat i. e. consutor» bei ZAEL, *de electionibus*, cap. 7, f. 120, col. 4, ed. 1519 (hinter *Quadripartitum* des PTOLEMAEUS). Das Datum 425 H. (= 1033) für die Abfassung des Buches ist wohl das der Copie, woraus PLATO übersetzte. Der Anfang lautet hier in Digby 47 und 51: »Firmavi in hoc libro.» Das Original hatte vielleicht die II IV Form von [illegible], welche *stabilivit* und *confirmavit* be-n. — Auch MACRAY verzeichnet im Index (p. 257, 261) ABEN-AIAT nach den Auszügen in den »*Novem judices*».[7])

ALBIKATIN (p. 874) *de inveniendis azimuth* etc. Qu. 369[47]
. 621): »Excerpta ex scriptis *Mazlem et* Albicatin (sic); offen-
r für einen Autor: MOSLEM, genannt ABU'L KASIM; s. unten
ter »MAZELEM».

ALBUMAZAR (p. 874), richtiger ALBUMASAR, d. i. der be-
mteste Astrolog ABU MAASCHAR (gest. a. 885 | 6, angebl.
o Jahre alt). Seine 3 Hauptwerke: *Introductio, De magnis*
junctionibus und *Flores* sind öfter gedruckt, und kleinere
cke mit verschiedenen Titeln sind in vielen anderen Cata-
en nicht erkannt. Das ist ohne Autopsie der Mss. schwer
hzuholen. Ein solches Stück ist wohl gleich das erste bei
IUM, *de astronomia secundum Hermetem et Egiptios* Qu. 381[1]
368); was das Ausrufungszeichen hinter *Hermetem* bedeuten
, ist schwer zu erraten. HERMES und ABIDEMON (AGATHO-
EMON) werden in der *Introductio* mehrmals citirt. Von diesem
che giebt es wiederum 2 gänzlich verschiedene Überzetzungen,
ht blos abweichende Recensionen, wie WÜSTENFELD (l. c. p.
) annimmt. Die unedirte des JOH. HISPALENSIS, gewöhnlich
»Introductorium *majus*» bezeichnet, enthält Ms. Qu. 361[1] (S.
o); die andere ist eine gekürzte mit Einschaltungen des Über-
zers und zwar gedruckte, identisch mit Ms. Qu. 363[5] (S. 608),
ausdrücklich HERMANNUS SECUNDUS (d. i. DALMATA) als
ersetzer genannt ist; wie ich schon in den Noten zu BALDI
ite etc. p. 28) darauf hingewiesen, dass der Übersetzer in
r Vorrede sich »mi Hermanne» anreden lässt.

Ms. Qu. 395[20] (p. 659) nennt unrichtig den Verfasser
es medicinischen Werkes *Albumazar*, anstatt *abu Zale*, welcher
amen bis jetzt ungedeutet blieb. Ich habe mich ganz kürzlich
erzeugt, dass er ABU SALT bedeutet.

Hingegen ist eine Schrift des ABU MA'ASCHER irrtümlich
em ALBATEGNI beigelegt, s. unter diesem.

[1]) Zeitschrift für Mathem. **12**, 1867, 22 (Art. ABRAHAM JUDAEUS); **16**, 1871, 370; Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **25**, 1871, 393; siehe unten unter ALI.

[2]) S. meine Abhandlung: ABRAHAM IBN ESRA. Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **3**, 1880, S. 126.

[3]) Eines vom J. 1160, gewöhnlich unter den Schriften (s. *Abraham ibn Esra* S. 127; *Catal. der Michael'schen Biblioth.* [1847], S. 318), ist 1886 in Warschau hinter einem astrologischen Auszug aus PTOLEMAEUS von JEHUDA B. SALOMO KOHEN abgedruckt, ohne den Verfasser anzugeben.

Über andere Horoscope s. *Abraham ibn Esra*, S. 68 (wo die Bedeutung für die Biographie erörtert ist); AD. NEUBAUER im Letterbode **7**, 1882, S. 96, wo das Datum chronologische Schwierigkeiten bietet, die hier zu weit führen würden.

4) Zeitschr. der deutschen morgenl. Ges. **18**, 1864, 192; **24**, 1870, 352; **25**, 1871, 417; meine Noten zu BALDI (*Vite* etc. p. 60); Zeitschr. f. Mathem. **10**, 1865, 463; **16**, 1871, 358, 373; Magazin f. die Wissenschaft des Judenthums **3**, 1876, S. 200, wo ich einen Artikel über ABU ALI versprach, über welchen s. *Fihrist* I, 276, II, 131; bei HAMMER, *Literaturgesch. der Araber* IV, 318 n. 2436; HAGI KHALFA VII, 1039 n. 1466, wonach VII, 1090 n. 1490 zu berichtigen. GRÄSSE's *Literärgeschichte* V, 935, confundirt ihn mit ABENRAGEL; WÜSTENFELD, *Die Übersetzungen arabischer Werke*, S. 41 kennt meine Nachweisungen nicht.

5) Im Index des *Catal. Mss. Angl.* unter ABUHALY, »sive Abuzale« 3632; ABUZALE (ist ABU SALT, s. weiter unten), n. 8717 ist Disputatio »Abucalis« (d. i ABU THALIB). ABU ALI ALHATEMI oder ALKATENI, *de computo*, welcher in der Medicäischen Typographie gedruckt werden sollte (LABBEUS, *Nova Biblioth.* p. 251; LIBRI, *Histoire des sc. mathém. en Italie* I, 237), habe ich noch nicht aufgefunden. Die, einem ALI untergeschobene Geomantic bei WÜSTENFELD (l. c. S. 42) ist auch mit NICOLAUS CATANUS, *Geomantischer Schöpfenstuhl* (Freystadt 1715) gedruckt.

6) Ich habe dieses Verzeichniss schon in Zeitschr. der deutschen morgenl. Ges. **18**, 1864, 180 benutzt, was WÜSTENFELD entgangen ist.

7) Diese, schon im XIII. Jahrh. existirende Sammlung (s. meine Noten zu BALDI, *Vite* etc. p. 59) enthält ohne Zweifel Ms. Digby 149[11] (p. 149) im Index p. 261 unterschieden von Nummer 58[5] (p. 62); aus derselben Sammlung sind wohl auch verschiedene Stücke in Ms. Amplon. Qu. 372 (p. 624), welche hinter »Extracta ex libro 9 judiciorum« noch besonders aufgeführt sind, also im Index als besondere Schriften figuriren.

Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung.

Von S. GÜNTHER in München.

Die Geschichte des als »Jakobsstab« oder »Baculus seu Radius Astronomicus» bezeichneten Instrumentes, mit welcher sich der Schreiber dieser Zeilen schon einmal vor längerer Zeit in der Bibliotheca Mathematica beschäftigte, bedarf noch immer in hohem Masse der Aufhellung. Der Verf. hat diese Notwendigkeit besonders gefühlt, als er unlängst den Verdiensten des bekannten Seefahrers MARTIN BEHAIM seine Aufmerksamkeit zuzuwenden hatte; in der hierauf bezüglichen Studie jedoch[1] konnte er, da sich dieselbe an ein grösseres Publikum richtete, nicht tiefer in die Sache eingehen. Dies soll jetzt nachgeholt werden, und zwar sind es wesentlich zwei Fragen, welche zwar noch keineswegs endgiltig zu lösen sind, aber doch ihrer Lösung um ein gutes Stück nähergebracht werden können. Die Fragestellung selbst kann in folgender Weise präzisiert werden:

I. Wer hat den Jakobsstab zuerst erfunden, resp. zuerst zu astronomischen Beobachtungen verwendet?

II. Ist es wirklich M. BEHAIM gewesen, der dieses Instrument in die Nautik einführte, d. h. Beobachtungen der Mittagshöhe der Sonne mit demselben vorzunehmen lehrte?

Bis vor kurzem war BREUSINGS[2] Behauptung, dass REGIOMONTAN zuerst mit dem Radius astronomicus Sternabstände gemessen habe, nicht erschüttert; selbst die vom Verf. urgierte[3] Thatsache, dass in einem zwischen den Jahren 1445 und 1450 entstandenen Kodex der Münchener k. Hof- und Staatsbibliothek eine unzweideutige Beschreibung des Werkzeuges enthalten sei, reichte nicht hin, jene Behauptung als solche zu widerlegen, weil an gedachtem Orte ausschliesslich von geodätischen, nicht jedoch auch von astronomischen Anwendungen des Baculus die Rede ist. Indessen wurde es mehr und mehr klar, dass der Jakobsstab in Wirklichkeit zu Beginn des XVI. Jahrhunderts eine in wissenschaftlichen Kreisen ganz bekannte Sache war; die Schrift über die Kometen, worin REGIOMONTAN sein Beobachtungsverfahren beschrieb, war erst viel später aus seinem litterarischem Nachlasse herausgegeben worden, und noch ehe diess

geschah, war der Jakobsstab schon von verschiedenen Schriftstellern, so von Gregor Reysch* und Johann Werner,** zum Gegenstande mehr oder weniger eingehender Erörterung gemacht worden. Wollte man auch beim letztgenannten annehmen, er sei unmittelbar von Joh. Müller beeinflust gewesen, so würde im anderen Falle diese Möglichket doch wohl unbedingt zu verneinen sein. Der südwestdeutsche Mönch musste seine Kenntnis anderswoher haben, und wir hoffen im folgenden auch einen Fingerzeig geben zu können, welches seine Quelle gewesen ist.

Steinschneider[7] hat anlässlich der glücklichen Konjektur, welche er bezüglich der Etymologie des Wortes Jakobsstab veröffentlichte, gelegentlich auch eines so betitelten Instrumentes des spanischen Juden Levi ben Gerson aus dem XIV. Jahrhundert Erwähnung gethan, das jedoch von demjenigen Regiomontans verschieden gewesen sei. Völlig unabhängig, ja sogar der Zeit nach etwas früher, hatte Petz[8] den Nachweis geführt, dass Regiomontan die betreffende Schrift des Levi gekannt haben müsse, wie sich dies aus dem handschriftlich auf uns gekommenen Kataloge der von dem berühmten Mathematiker und seinem Freunde Walther zusammengebrachten, nachmals allerdings in unverantwortlicher Weise verschleuderten Büchersammlung ganz unzweifelhaft ergibt. Daraufhin müssen wir dem Regiomontan den ihm von Breusing (s. o.) beigelegten Ruhmestitel wieder nehmen, denn es wird sich herausstellen, dass die Art, wie Müller und wie Levi ben Gerson ihr Ziel zu erreichen suchten, bis auf ganz unwesentliche Äusserlichkeiten die nämliche ist. Nun, der gefeierte Mann hat der Verdienste so viele, dass er recht wohl eines abgeben kann, welches man ihm mit Unrecht zuschrieb, umsomehr, als er auf dasselbe niemals selbst irgendwelchen Anspruch erhoben hat. Wir müssen immer daran denken, dass die Pflicht, genau zu zitieren, eine Errungenschaft der neueren Zeit ist, eine Pflicht, welche nahezu vollständig ausserhalb des Gedankenkreises eines mittelalterlichen Schriftstellers lag.

---

* Die Beschreibung findet sich, woran anscheinend zuerst der Verf. erinnerte, in dem bekannten Sammelverke *Margaritha Philosophica*, welches im Jahre 1504 herauskam, und zwar in lib. VI, tract. 2. Aus diesem Werke ist, wie Eneström dargelegt hat, auch die Notiz über den Baculus geometricus excerpirt, die früher dem schwedischen Bischof Peder Månsson beigelegt wurde.[5]

** Werner war es sogar, der an der Vorrichtung eine beträchtliche Verbesserung anbrachte und die Teilstriche am Hauptstabe nicht mehr gleichabständig, sondern im solchen Entfernungen sich folgen liess, dass direkt der zugehörige Winkel abgelesen werden konnte.[6]

LEVI BEN GERSON, aus Bagnolos in Katalonien gebürtig und aus diesem Grunde auch vielfach als »*Leo Israelita de Baneolis*« bezeichnet, war seinem Biographen ZEDLER[9] zufolge in erster Linie Theolog und Philosoph, doch griff er auch, gemäss der Zeitsitte, zum öfteren über seinen eigentlichen Beruf hinaus und verfasste u. a. auch das uns hier interessierende Werkchen, welches niemals gedruckt wurde und auch nur in wenigen Abschriften sich erhalten zu haben scheint. Diejenige, welche uns vorlag, gehört der oben bereits genannten, an litterarischen Merkwürdigkeiten überaus reichen Münchener Bibliothek an; sie stammt freilich erst aus dem Jahre 1610, aber ein älteres Original lag der Kopie ganz sicher zu grunde, und wir haben nicht den mindesten Grund, anzunehmen, dass der Abschreiber an seiner Vorlage irgend etwas geändert habe. Ein Ingolstadter Jesuitenschüler hatte sich während seiner Studienzeit einen dicken Sammelband (Cod. lat. Mon. 8089) angelegt, worin er eine ganze Anzahl von Abschriften, die sich auf die verschiedensten wissenschaftlichen Gegenstände beziehen, vereinigte. Fünfzehn Bestandteile zählt die vom Schreiber selbst angefertigte Inhaltsübersicht auf, und von diesen sind neun mathematischer Natur. Der Traktat des LEVI BEN GERSON erscheint an dritter Stelle unter nachstehendem Titel: »Geometricae Conclusiones, Propositiones, et Structura *Baculi Jacob*, ejusque usus, ex libro manu scripto«. Er umfasst 88 enge geschriebene Quartseiten (fol. 83—127) und ist mit sehr hübsch ausgeführten Federzeichnungen versehen. Im ganzen zählt die Schrift 17 Kapitel,* nicht gerechnet eine Einleitung, welche mit wenigen Worten über den Inhalt eines jeden Abschnittes berichtet. Zum Schlusse dieses Vorberichtes heisst es: »Et hic tractatus fuit translatus de Hebraeo in Latinum anno Christi 1342. Pontificatu domini CLEMENTIS Papae VI. a. I.** Descriptus vero hoc anno 1610. 15 Junii«.

Der Traktat kann als eine Einleitung in die beobachtende und rechnende Astronomie gekennzeichnet werden, wie dies am besten aus den Kapitelüberschriften erhellt. Wir geben dieselben nachstehend wieder:

Cap. I. Epistola dedicatoria. — Cap. II. Stabiliuntur quaedam principia. — Cap. III. De Divisione Orbium, et Sphaerarum; Item quid dicatur arcus? quid Sinus, et quid Sa-

* Bei der Numerierung ist dem Abschreiber ein kleines Versehen insofern begegnet, als Kapitel IV zweimal bei ihm vorkommt; natürlich wurde dieser Irrtum oben verbessert.

** D. h. im ersten Regierungsjahre des Papstes, der in der That auch im Jahre 1342 die Mitra empfangen hat.

gitta? — Cap. IV. Declaratio Tabularum Sinuum.* — Cap. V. Semidiametrum Solis, et Lunae beneficio radiorum per fenestras domorum intrantium cognoscere. — Cap. VI. Inquiritur Centrum Visus, stellarumque distantia, qua ratione beneficio instrumenti indagetur. — Cap. VII. De Structura baculi, quo centrum visus indagatur. — Cap. VIII. De Structura *Bacculi Jacob,* ejusque divisione. — Cap. IX. Usus hujus instrumenti ad distantias Stellarum. — Cap. X. Duarum stellarum latitudine cognita, qualis longitudo cognoscatur. — Cap. XI. Duarum stellarum latitudine una habita, quomodo longitudo cognoscatur. — Cap. XII. Ambarum stellarum latitudine non habita arcum longitudinis indagare. — Cap. XIII. Altitudinem Solis, Lunae, et aliorum Siderum, eorum Diametrum, et loca; latitudinem cujuslibet stellae; item horas diurnas, et nocturnas beneficio hujus instrumenti indagare. — Cap. XIV. Cautelae quaedam adhibentur, ne Error committatur in usu hujus instrumenti. — Cap. XV. Instrumentum** componere, quo vera loca omnium planetarum sine tabulis aequationum inveniantur. — Cap. XVI. Explanatio quorundam terminorum tabulas, et Planetarum centra, argumenta atque medios motus invenire. — Cap. XVII. De Usu Instrumenti supra traditi, et semissarum utilitate.

Dies der Inhalt unseres Büchleins, dem es gewiss nicht an Interesse gebricht. Wir können an diesem Orte selbstredend diesem Inhalte nicht näher treten, welcher uns LEVI BEN GERSON als einen denkenden und selbstthätigen Gelehrten kennen lehrt, sondern wir fragen einzig danach, wie denn der Jakobsstab, dessen sich jener bedient, beschaffen war. Zu dem Ende reproduzieren wir den Anfang des siebenten Kapitels.

»Fiat baculus unus cum superficiebus planis, et rectis in uno capite illius ponatur una tabula quae aequaliter sit cornuta cujus alterutrum cornu experientiae tempore sit in alterutrum oculum collectum, et fiant in hoc tabulae diversarum quantitatum

---

* Die Art der Einrichtung dieser Sinustafeln, welche für die Geschichte der mittelalterlichen Trigonometrie eine ganz entschiedene Bedeutung besitzen, weicht darin von der späteren ab, dass auf derselben Zeile der Winkel und der Supplementwinkel, welchen ja ein und derselbe Sinus zukommt, neben einander stehen; das Intervall, nach welchem die Argumente fortschreiten, beträgt 15 Minuten, und die Sinus selbst sind im Sexagesimalmasse angegeben, so dass auf den Sinus totus $60^\circ\, 0^{I}\, 0^{II}$ entfallen. Ein beliebig herausgegriffenes Beispiel ist dieses:

$$\text{arc} = 55^\circ\, 45'.\ \text{arc} = 124^\circ\, 15'.\ \sin = 49^\circ\, 37^{I}\, 3^{II} = \frac{49}{60} + \frac{37}{60^2} + \frac{3}{60^3}.$$

** Dieses Instrument ist das bekannte Planisphaer, welches Aufgaben der sphaerischen Trigonometrie graphisch aufzulösen gestattet.

perforatae in medio, superficies rectas habentes, per quae foramina intrare possit baculus ante dictus, et sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi, et duae earum simul ponantur in baculo uno latere inaequalis,* ita quod minor sit propinquior oculo, et ambae super baculum faciant angulos rectos, et sint parallelae. Et linea a Centro oculi procedentes tangant utramque extremitatem utriusque tabulae, et terminentur ad Coelum . . .» Die Beschreibung ist einleuchtend genug, um zu sehen, dass das Prinzip der Winkelmessung genau derselbe ist, welches dem Jakobsstabe der späteren Zeit zugrunde liegt; an und für sich wäre natürlich ein einziges verschiebbares Täfelchen ausreichend, und das zweite hat nur den Zweck einer schärferen Kontrolle zu erfüllen. Wir stellen uns den sphärischen Distanzmesser des LEVI BEN GERSON so vor, wie ihn unsere Figur zur Anschauung bringt.



O ist das Auge des Beobachters, A und B sind die beiden Täfelchen, welche wir uns resp. mit den Fortsätzen C_1, C_2 und D_1, D_2 versehen denken; nur in diesem Sinne vermögen wir das nicht näher erklärte Wort »cornutus» zu interpretieren. Die Entfernungen AO und BO, welche dann erreicht sind, wenn das Auge O bezüglich über C_1 und D_1 weg den Stern S_1, über C_2 und D_2 weg den Stern S_2 erblickt, können an dem geteilten Längsstabe abgelesen werden, die Strecken AC_1 und BD_1 sind einfürallemal bekannt, und so hatte LEVI, der ja mit Tangenten noch nicht zu rechnen verstand, für $\wedge S_1OS_2 = \alpha$ die beiden sich wechselseitig stützenden Formeln

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC_1}{\sqrt{\overline{AC}_1^2 + \overline{AO}^2}} = \frac{BD_1}{\sqrt{\overline{BD}_1^2 + \overline{BO}^2}}$$

erhalten. Abgesehen von Äusserlichkeiten** also ist zwischen der Messungsmethode des LEVI und des REGIOMONTANUS kein Unterschied, wie wir dies oben schon andeuteten, und wir dürfen sonach mit Fug und Recht die folgende These aufstellen:

LEVI BEN GERSON *ist, soweit wir bisjetzt urteilen können,*

---

* Offenbar Schreibfehler statt »inaequales».

** Die Sitte, sich nicht mit einem einzigen verschiebbaren Querstäbchen zu begnügen, sondern deren mehrere anzuwenden, erhielt sich Jahrhunderte lang. Eine von PESCHEL [18] nach JAN JANSONIUS mitgeteilte, allerdings schlecht ausgeführte Zeichnung eines mit dem Gradstocke Beobachtenden lässt mit Rücksicht auf die oben gegebenen Darlegungen vielleicht noch eine andere Deutung zu, als man sie ihr bisher zu geben geneigt war.

[redacted]

der Erfinder oder doch der erste in der Litteratur auftretende Beschreiber des Jakobsstabes, und REGIOMONTAN, *der nachweislich im Besitze der Schrift* LEVIS *war, entnahm derselben die Kenntnis des Messungsverfahrens, welches er in seinem Kometenwerke mit Glück und Erfolg verwertete.*

Zweifellos wusste der letztere auch bereits, dass man bei gehöriger Übung mit diesem Instrumente weit genauer Meridianhöhen der Sonne nehmen könne, als mit irgend einem anderen der damals im Gebrauche stehenden Beobachtungswerkzeuge, und es ist durchaus glaubhaft, dass er während des Nürnberger Aufenthaltes seinen Nachbar BEHAIM in der Kunst unterwies, welche diesem später so vorteilhaft werden sollte. Mit BREUSING (s. o.) nimmt man jetzt fast allgemein an, dass BEHAIM in Lissabon sich Ansehen verschaffte, indem es den Jakobsstab (»ballestilha»), der im Süden Europas noch nicht bekannt war,* in die portugiesische Marine einführte. Allerdings musste man dies blos aus indirekten Kennzeichen erschliessen, denn die Zeitgenossen schienen darüber gänzlich zu schweigen, und einzig der einer etwas späteren Epoche angehörige Historiker BARROS berührt die Verdienste BEHAIMS, jedoch ebenfalls in nichts weniger denn klarer Darstellung. Wenn nun aber, so kann man einwerfen, die Lusitanier schon in den achtziger Jahren des XV. Jahrhunderts mit dem Jakobsstabe vertraut waren, wie ist es zu erklären, dass die doch ganz unter den gleichen Bedingungen lebenden Spanier eines so bedeutsamen Hilfsmittels noch vierzig Jahre später entbehren mussten? Letzteres aber wird durch den Umstand bezeugt, dass das von GELCICH [11] mitgeteilte Verzeichnis aller der Instrumente, welche MAGALHAËNS auf seine Weltreise mitnahm, trotz seiner Reichhaltigkeit nichts vom Jakobsstabe weiss. »Hat sich also», so meint unser Gewährsmann, »auch der Jakobsstab schon zu den Zeiten MARTIN BEHAIMS in Portugal Eingang verschafft, so scheinf es doch eine Weile gedauert zu haben, bevor derselbe allgemeine Verwendung fand.» Dieser Schluss ist ein unzweifelhaft berechtigter,** und wir können uns nur denken, dass die damals zumal unter den Seevölkern zur höchsten Entfaltung gelangte Sucht, nautische und kommerzielle

---

* Es ist sehr merkwürdig, dass die Erfindung eines Spaniers (s. o.) erst auf dem weiten Umwege über Nürnberg und Antwerpen wieder nach der iberischen Halbinsel zurückkehrte.

** Auch A. SCHÜCK hat kürzlich in der wohlwollenden Besprechung, welche er der eingangs genannten Schrift des Verf. über BEHAIM in der ...rift **Hansa** angedeihen liess, ganz dem gleichen Bedenken Ausdruck

Fortschritte zum Nutzen des eigenen Staates zu monopolisieren, die Portugiesen zu engherzigster Geheimhaltung des neuen Verfahrens vermocht hat. Erst viel später — besonders 1568 — kommt in den Akten des Indienamtes zu Sevilla (»Casa de Contratacion«) der Kreuzstab als etwas bekanntes vor, und da hatte man sich diese Kenntnis eben aus Deutschland oder Italien, nicht aber aus dem politisch verfeindeten Portugal verschafft.

Dafür nun, dass Behaim wirklich neue Messinstrumente seinem Adoptivvaterlande zugänglich und durch diese That zugleich sein Glück gemacht habe, sind wir eine neue zeitgenössische Quelle — die erste dieser Art — anzuführen in der Lage, von der bislang noch niemals Notiz genommen worden ist. Wiederum leisten uns die Schätze der Münchener Bibliothek ihre Aushilfe. Unter den Inkunabeln derselben befindet sich nämlich (Inc. Mon. 1551 m. 4°) eine im Jahre 1493, also zu Lebzeiten Behaims, in Lissabon oder Coimbra gedruckte Übersetzung des damaligen astronomischen Normalbuches, der *Sphaera materialis* des Sacrobosco,* und dieser ist anhangsweise eine kurze Nachricht über die Entdeckerleistungen der Portugiesen, vorab unter König João II, beigefügt. Wir können hier den in mancher Hinsicht beachtenswerten Abschnitt nicht eingehender behandeln, wir wollen vielmehr nur die auf Behaim bezüglichen Sätze herausheben. Zuerst wird mit grosser Ehrfurcht des deutschen Kaisers Maximilian I. gedacht, und dann fährt der Berichterstatter fort wie folgt: »e teras tam ben sete apraz pa este caminho por companheiro de putado do nosso rey *Maximiliano* ho senhor *martinho boemio* singular mente pa esto acabar: e outro muy muytos marinheiros sabedores que navegarã ha largũr do mar tornãdo caminho das ilhas dos açores per sua industria *per quadrãte chilidro e astrolabio e outros ingenhos.*« Der offenbar sachkundige Schriftsteller weiss also, dass der Quadrant, das Astrolabium und der »Zylinder« Behaim zu seinen Entdeckungsfahrten befähigt haben; die beiden erstgenannten Instrumente nun aber waren seit der Zeit des Infanten Enrique, »des Seefahrers«, unentbehrliche Inventarstücke eines jeden in See gehenden Fahrzeuges, und so bleibt nur der Zylinder als das Eigentum des deutschen Einwanderers. Soll man sich denken, dass der Baculus Behaims eine cylindrische und noch nicht die allerdings schon von Levi ben Gerson vorgeschriebene und

* *Tractado da Spera do mundo tyrada de latim em liguo agem com ha carta que huũ gramde doutorale man mando uao rey de purtugall dom Johan el segũdo.* Beigebunden ist ein zweites, *Regimento do astrolabio e do quadrante* betiteltes Schriftchen.

später allgemein üblich gewordene parallelepipedische Form gehabt habe? Oder wollte der Übersetzer mit den Worten »und durch andere Instrumente« auf den Jakobsstab anspielen? Wir wissen es nicht mit Sicherheit, aber wenn wir daran denken, wie ganz ungemein schwankend* die Bezeichnungen für mathematische und astronomische Instrumente im Renaissancezeitalter waren, so dürfen wir aus der angezogenen Stelle wohl den Schluss ziehen, dass der Gradstock sich unter den durch BEHAIM den Portugiesen übermittelten Neuerungen befunden hat. Alles in allem:

Die portugiesische Bearbeitung des SACROBOSCO *verstärkt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der That* MARTIN BEHAIM *die Seeleute Portugals in der Handhabung des Jakobsstabes unterwies, mit welcher ihn früher* REGIOMONTANUS, *der selbst wieder sein Wissen aus* LEVI BEN GERSON *schöpfte, bekannt gemacht hatte.*

[1] GÜNTHER, *Martin Behaim* (Bamberg 1890). S. 16 ff. S. 62 ff.
[2] BREUSING, *Zur Geschichte der Geographie.* Zeitschr. der Gesellsch. für Erdkunde zu Berlin, **4**, 1869, S. 97 ff.
[3] GÜNTHER, *Die Erfindung des Baculus Geometricus.* Bibliotheca Mathematica 1885, Sp. 137 ff.
[4] GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter.* (Berlin 1887.) S. 248.
[5] ENESTRÖM, *Sur trois petits traités mathématiques attribués à Peder Månsson.* Biblioth. Mathem. 1888, S. 17—18.
[6] GÜNTHER, *Johann Werner von Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physikalischen Erdkunde.* (Halle 1878.)
[7] STEINSCHNEIDER, *Miscellen zur Geschichte der Mathematik.* Biblioth. Mathem. 1889, S. 36 ff.
[8] PETZ, *Mitteilungen des Vereines für Geschichte Nürnbergs* 7. Heft. S. 123.
[9] ZEDLER, *Universallexikon,* 17. Band. (Halle-Leipzig 1738.) Sp. 614 ff.
[10] PESCHEL-RUGE, *Geschichte der Erdkunde bis auf C. Ritter und A. von Humboldt.* (München 1877.) S. 387.
[11] GELCICH, *Columbus-Studien.* Zeitschr. d. Ges. f. Erdk. zu Berlin, **22**, 1887, S. 471.
[12] WEISSENBORN, *Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates.* Biblioth. Mathem. 1888, S. 3

* Dieser Umstand ist auch von WEISSENBORN[12] als ein sehr störend vermerkt worden.

Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi.

Nota di ANTONIO FAVARO a Padova.

Di PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, mio concittadino e predecessore, io mi sono a lungo occupato parecchi anni or sono, essendomi studiato di raccogliere in un lavoro,[1] relativamente voluminoso, tutto ciò che mi fu dato di trovare intorno all'attività che egli ebbe a spiegare nei più svariati rami dello scibile umano.

Ma, anche dopo pubblicato quel mio primo lavoro, non abbandonai del tutto lo studio di questo interessantissimo argomento, ed or non ha molto, sembrandomi che le ulteriori ricerche mi avessero condotto a risultati, la conoscenza dei quali non sarebbe tornata sgradita agli studiosi, ne feci argomento ad una appendice.[2] A complemento della quale faccio ora seguire la presente nota.

Prima però d'entrare direttamente nell'argomento che mi propongo di svolgere, voglio tener parola d'un documento testè rinvenuto,[3] e che riesce a schiarimento e conferma di un particolare biografico concernente il Nostro.

Già fin dal mio primo lavoro, essendomi sforzato di ricostituire l'albero genealogico della nobile famiglia padovana dei BELDOMANDI, ero rimasto incerto, a motivo della scarsezza dei documenti, nel decidere se il nostro PROSDOCIMO fosse stato figlio d'un ENRICO DI TOMMASO, o piuttosto d'un TOMMASINO DI BELDOMANDO,[4] ed un documento posteriormente rinvenuto risolveva i dubbii, dicendolo »Magister PROSDOCIMUS scholaris artium filius ser TOMASINI DE BELDOMANDO.[5] Questo documento, dato del 15 Luglio 1402 era un atto, col quale PROSDOCIMO, con tutta probabilità maggiore tra i figli di TOMMASINO, faceva una procura ad un certo »ANTONIO» per poter entrare in possesso d'una eredità ch' egli ed i fratelli avevano avuta da un »maestro ENRICO fisico dottore in medicina»; e l'altro documento ultimamente trovato è appunto il testamento[6] di questo »HENRICUS DE BELDOMANDIS physicus q^{m} d^{ni} THOMASINI DE BELDOMANDIS de Padua nunc civis et habitator Venetiarum in confinio S^{ae} Trinitatis». Con questo atto del 25 Maggio 1396 »mente sana sed non corpore», nomina per esecutrice testamentaria ed erede universale la moglie TOTADONA, a condizione però che, dopo la morte di lei, la detta eredità passi

ai suoi nipoti, ch' egli indica genericamente come »filii THOMASINI q^m D^ni BELDOMANDI DE BELDOMANDIS», specificando a parte soltanto una »AGNES filia THOMASINI». Alla data della procura suaccennata saranno i fratelli BELDOMANDI entrati in possesso dell' eredità, in seguito alla morte della TOTADONA, vedova del loro zio ENRICO. Ed ora veniamo senz' altro alla scrittura sull' astrolabio.

Già in quel mio primo lavoro avevo avuto motivo di registrare i titoli di tre lavori del nostro PROSDOCIMO intorno all'astrolabio;[7] ma null' altro che i titoli desunti da fonti diverse, i quali erano i seguenti:

a) *Prosdocimi de Beldemandis Patavi, compositio astrolabii.*

b) *Canones operativi et Compositivi Astrolabij Prosdocimi de Beldemando,*

c) *Prosdocimi de Beldamandis Astrolabium,*

dei quali non sapremmo nemmeno dire se costituiscano effettivamente tre lavori distinti, inclinando anzi noi a credere che il terzo titolo serva ad indicare il lavoro costituito da una delle due altre scritture. La esistenza delle quali era stata a noi rivelata dal TOMASINI, che, nella occasione ch'egli ebbe di stendere un catalogo dei manoscritti esistenti in Padova al suo tempo, espressamente le notò.[8] Passarono poi col codice che le conteneva nelle collezioni Saibante e Gianfilippi di Verona,[9] e, nella occasione in cui queste furono vendute, fu il codice stesso insieme con altri acquistato da GUGLIELMO LIBRI, che lo vendette a Lord BERTRAM ASHBURNHAM nel 1847,[10] dal quale finalmente insieme con una parte della collezione a cui apparteneva, lo acquistò nel 1884 il Governo italiano[11] e lo depositò nella Biblioteca Laurenziana, dove attualmente si trova.

Quivi dunque noi ebbimo tutto l'agio di studiare il codice che contiene parecchie scritture, tutte sotto qualche rispetto pregevoli;[12] ma, per evitare il pericolo delle troppo facili digressioni, ci terremo ad occuparci soltanto delle scritture del nostro PROSDOCIMO concernenti l'astrolabio.

La prima occupa le car. 217—255 ed è intitolata: *Compositio et operatio astrolabii secundum novam compositionem;* l[a] seconda occupa le car. 256—283 ed è intitolata: *Composi[tio] astrolabij et operatio secundum novam et veterem compositionem.* N[el] l'indice poi premesso al volume, e scritto sul recto della pri[ma] guardia, si legge in carattere del tempo: *Canones operativi compositivi astrolabij prosdocimi de beldemando,* col qual titolo so[no] considerate ambedue le scritture, ed attribuite a PROSDOCI[MO] DE' BELDOMANDI.

A questo punto eravamo rimasti colle nostre ricerche, nè credevamo che ci si sarebbe offerta occasione di ritornarvi sopra, quando il Dottore Luigi Birkenmajer, docente nella Università di Cracovia, ci comunicava che nella Biblioteca Jagellona di quella città si trovava un trattato dell'astrolabio a stampa, attribuito a Prosdocimo de' Beldomandi. Questo annunzio ci indusse a riprendere i nostri studi in argomento, ed ora ci facciamo ad esporne il risultato.

Il trattato in questione fa parte di un volume miscellaneo in-4° appartenuto[13] ad un tempo a Pietro Myszkowski, già scolaro nello Studio di Padova intorno all' anno 1530, che coprì cariche eminenti nel Regno di Polonia e morì investito della dignità di vescovo di Cracovia nell'anno 1591 ed in età di anni 86. Lo stesso volume pervenne poi in possesso di Giovanni Brozek, questo pure scolaro dello Studio di Padova intorno all' anno 1620 e fu da lui stesso legato alla Biblioteca dell' Università di Cracovia, alla quale, come testè avvertimmo, attualmente appartiene. Ambedue i possessori or ora menzionati fregiarono questo volume di note manoscritte: e singolarmente importante per noi è quella apposta dal Myszkowski al terzo dei trattati contenuti nell' anzidetto volume miscellaneo e la quale ci dice essere »Prosdocimi de Beldemandis Patavi» questo così intitolato: *Astrolabij quo primi mo | bilis motus deprehen | duntur Canones.* | Instrumentum Astrolabij etiam Impressum | est Venetijs in officina Petri Liechten- | stein Coloniensis Germani anno 1512. | *** | ** | *»

Ciò premesso, la prima cosa da farsi era quella di confrontare le scritture che nel codice sono espressamente attribuite a Prosdocimo de' Beldomandi con quelle stampate anonime ed attribuite al medesimo autore dal Myszkowski, ed il risultato di tale confronto è il seguente.

Delle 30 carte costituenti l'opuscolo[14] le prime quattordici (cioè quindici, computando il frontespizio) contengono ciò che si legge nel codice da car. 217 *recto* a car. 247 *recto* col. I lin. 10, ad eccezione della introduzione aggiunta nello stampato e la quale dice:

> In opus et instrumentum astronomicum Astrolabium vel Planispherium appellatum Canones incipiunt felicibus astris.
>
> Sphera solida que et astrolabium sphericum appellatur cum sit astronomice scientie instrumentum excellentius et praeceteris accomodatius. Quia tamen eius tum propter magnitudinem tum ob magnam impensam ad conficiendam non datur facile copia. Ne igitur studiosi sideralis scientie

suo frustrentur usu loco illius astrolabium accipere consulti sunt comodissime. Quod quidem post spheram solidam ad astronomicam practicam nobilius existit et praeceteris aptius est expertum. Astrolabium enim grece dicitur acceptio stellarum latine, eo quo per ipsum accipitur cognitio multorum que ex motibus et quantitatibus et sitibus corporum celestium queruntur. Et est instrumentum figure circularis multiplicibus circulis et lineis descriptum valens ad astronomie et ad geometrie operationes. Quod etiam a ptolemeo planispherium appellatur. Cum sit quasi sphere extensio super planum ut patet diligenter eum intuenti. Sed cum . . . .

Ci affrettiamo tuttavia a soggiungere che lo stampato non costituisce una fedelissima riproduzione del manoscritto, anzi qua e là si riscontrano notevoli varianti per le quali la stampa apparisce talvolta migliorata e talvolta peggiorata in confronto del codice, il quale noi stimeremmo ad ogni modo scrittura di amanuense e di tale anche non perito nelle materie che andava trascrivendo; noteremo di più ch'esso codice offre correzioni ed aggiunte di mano alquanto posteriore in ordine di tempo, e delle quali lo stampato non ha traccia.

Notare singolarmente tutte queste varietà, le quali in generale si riferiscono assai più alla forma che non alla sostanza, ci sembrerebbe soverchio; avvertiremo soltanto che l'ultimo capitolo finisce nel codice colle parole seguenti: »Per hunc etiam modum scire poteris annum revolutionis uniuscuiusque nativitatis»; nello stampato in luogo di »uniuscuiusque» si legge »cuiusque» e sono aggiunte queste altre: »Vel cuiuscunnque alterius rei habentis principium.

A partire tuttavia da questo punto esiste una profonda diversità fra il codice e lo stampato. Il primo infatti contiene ancora i seguenti capitoli non illustrati da alcuna figura:

»De quadrante astrolabij et primo de eius inscriptione.»

»Ad cognoscendum umbram rectam et versam per solem.»

»De noticia umbrarum et scalarum per quas mensuratur.»

»Ad mensurandum umbram versam per umbram rectam et e converso.»

»Ad mensurandum alio modo umbram versam per rectam et e converso.»

»Ad mensurandum altitudinem alicuius rei per eius umbram.»

»Ad mensurandum altitudinem solis per umbram alicuius rei elevate.»

»Ad mensurandum altitudinem accessibilem cuiuslibet rei per solem.»

»Ad mensurandum altitudinem accessibilem sine acceptione solis.»

»Ad mensurandum altitudinem alicuius rei inaccessibilis.»

»Ad mensurandum longitudines in plano.»

Il secondo, col titolo di »Partis secunde huius de mensurationibus rerum tractatulus», contiene un trattatello abbastanza diffuso, nel quale vengono esposti varii metodi per la misura delle lunghezze, delle aree e dei solidi, aggiuntevi numerose figure.

Per ciò che si riferisce pertanto alla prima parte dello stampato, cioè ai »Canones in opus instrumentum astronomicum Astrolabium vel Planispherium appellatum», nessun dubbio che essi siano da attribuirsi a PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, quantunque nello stampato stesso non si legga il nome dell' autore; la coincidenza coi capitoli corrispondenti del codice, nel quale il trattato stesso è intitolato: »Compositio et operatio astrolabij secundum novam compositionem», ed è attribuito appunto al nostro BELDOMANDI, non lascia il benchè minimo dubbio a questo proposito.

Il dottore BIRKENMAJER, nel comunicarci la notizia, la quale porse occasione alla presente nota, scriveva: »Quoad meam super pondus huius testimonii opinionem, non dubito quin PETRUS notitiam dictae determinationis ex optimis professorum Universitatis Patavinae informationibus (illius FEDERICI DELPHINI »Astrologi celeberrimi» *forsitan*) hauserit, neque miratum censeo traditiones nec non memoriam vitae scriptorumque clarissimi viri saeculo post mortem eius († 1428) elapso in Universitate Patavina adhuc vixisse». A chiarire pienamente l'attendibilità d'una tale ipotesi, basterà che noi aggiungiamo, avere il codice Ashburnhamiano del quale stiamo occupandoci, effettivamente altravolta appartenuto a FEDERICO DELFINO, come ce lo apprende una nota autografa,[15] che si legge nel verso dell' ultima carta, e la quale dice: »Hic liber est mei federici delphini, quem donavit mihi dominus bartolomeus cherubinus[16] phisicus socius meus.»

Ma, per la conoscenza che noi abbiamo dell' indole delle scritture di PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, saremmo indotti a tenere, che non siano pure da attribuirsi a lui le cose contenute nella seconda parte del trattato a stampa, del quale stiamo occupandoci; d'altronde si avverta che lo stesso MYSZKOWSKI appose la annotazione sua, non già sul frontespizio comune ad ambedue le parti del trattato, ma bensì al principio del primo che in-

dubbiamente risulta essere opera del nostro PROSDOCIMO, e quindi si può tenere che pur egli volesse con ciò indicare che ad esso soltanto si riferiva l'indicazione da lui fornita.

Ciò ammesso, di chi sarà dunque la seconda parte dell'opuscolo sul quale l'attenzione nostra venne richiamata?

Avvertiamo anzitutto essere l'opuscolo in questione estremamente raro, e presentare altresì alcune particolarità degne di tutta l'attenzione dei bibliografi. I più reputati tra i quali, incominciando dal DENIS (se pur non si tennero a ripetere la costui affermazione) ne videro e descrissero un esemplare privo di qualsisia nota di stampa, affermandolo uscito »fortasse ex officina Ratdoltiana aut Cerdoniana»;[17] il BRUNET, descrivendone egli pure un esemplare »absque nota» aggiunge: »Edit. qui paraît avoir été impr. chez Erhard Ratdolt à Venise vers 1490».[18] Ed invero i caratteri gotici adoperati nella stampa di quest' opuscolo ci sembrano appartenere assai più agli ultimi anni del secolo decimoquinto che non ai primi del decimosesto, come indicherebbe la data che si legge sul frontespizio. Ma, senza voler pregiudicare menomamente la questione, la quale poniamo ai bibliografi, noi vogliamo esporre il dubbio che questa data del 1512 debba tenersi senz' altro in via assoluta riferibile all' anno in cui fu stampato l'opuscolo, perciocchè è detto: »Instrumentum Astrolabij etiam Impressum est Venetijs in officina Petri Liechtenstein Coloniensis Germani anno 1512» e col titolo di »Instrumentum Astrolabij» noi crediamo possa intendersi una descrizione dell' astrolabio, quale si ha per modo d'esempio, e dello stesso PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI nel medesimo codice Ashburnhamiano, col titolo: »*Compositio astrolabij et operatio secundum novam vel veterem compositionem.*» Noi stimiamo cioè non sia da escludersi che nella surriferita indicazione debba vedersi piuttosto l'annunzio di un' altra pubblicazione che non la nota di stampa di questa. Nè ci nascondiamo conseguenza immediata di tale ipotesi essere l'attribuire l'opuscolo in questione ad un' epoca posteriore all' anno 1512, e quindi ancor più lontana dal tempo al quale appartengono i caratteri adoperati nella stampa di esso; se, a porgere una spiegazione più facilmente accettabile di questa anomalia, non si prestasse il supporre che la nota tipografica, o piuttosto l'annunzio, posteriore all' anno 1512, sia stato posteriormente aggiunto nel frontespizio dell'opuscolo in questione.

E qui giova notare che per la stampa d'un »Astrolabium, instrumentum ipsum cum canonibus suis» aveva ottenuto dalla pubblica Veneta privilegio di stampa GIANLUCILIO SANTRITTER

da Heilbronn, addì 14 Novembre 1498,[19] e che le *Ephemerides sive Almanach perpetuus*, pubblicate da Gianlucilio Santritter colla menzione del privilegio compreso nel documento stesso concernente l'*Astrolabium*, comparvero nel 1498 coi tipi dello stesso Pietro Liechtenstein.

Il quale Pietro Liechtenstein tuttavia non fu soltanto tipografo, ma altresì scrittore, od almeno compilatore, di cose astronomiche. Lo deduciamo dal seguente documento che ci piace di testualmente riprodurre dall' originale nell' Archivio di Stato di Venezia:[20]

Serenissimo Principe, Illustrissima et excelsa Signoria, supplica il fedelissimo servo di Vostra Sublimità Piero liechtestein maestro et impressor de libri.

Cum sit che havendo lui za molti anni con ogni diligentia et grandissima spesa fatto inquirir et cerchar in diverse parte del mondo di trovar opere nove et dignissime in astronomia, et parte composite per lui supplicante, utile et molto necessarie a quelli si dilettano de tal virtù, lequal desideroso, ad comune utilità de tutti et sua stamparle; ritrovandose per tal cosa al presente molto indebitato, et dubitando che date fuora tal opere per altri, li sia fatto concorrentia, per la quale lui saria ruinato et penitus disfatto. Hinc est chel ricorre a Vostra Illustrissima Signoria, supplicando quella per solita sua clementia se degni di gratia speciale concederli che stampar possi ditte infrascritte opere, con condition formale per Vostra Sublimità dechiarita che niuno non ardisca, presumi, nè possi stampar nè far stampar ditte opere per anni XV da poi che dal ditto supplicante sarano stampate in le terre et luogi di Vostra Signoria, nec etiam se altrove fuora del dominio veneto le stampassero, possino esser vendute nel detto dominio, sotto pena a chi contrafarà di ducati trecento et perder le opere contra tal ordine stampate. le qual opere siano di esso supplicante, la pena pecuniaria veramente uno terzo sia de l'arsenal vostro, l'altro terzo del accussador, per la cui accusa se habbia la verità et l'altro terzo sia de quel magistrato farà la execution. Intendendo che ogni magistrato debbi et possi far la execution dove si ritroverà tal contrafacenti acciò mediante la gratia della Serenità Vostra esso supplicante conseguir possi il frutto delle iuste sue fatiche, come è di mente della prefata Illustrissima Signoria Vostra Cujus ecc.

Le opere da esser stampate

Almagestum Claudii Ptholomei pheludiensis alexandrini non mai più stampato.

Tabule alphonsi cum novis additionibus. Compilatio leupoldi mai più stampato.

Introductorium alchabitij cum revolutionibus et additionibus.

Compilatio tabularum Petri liechtestein non mai più stampato.

Quo supradicto supplicanti concedatur quantum petit. Die XIIIJ Januarii 1514 (m. v.)

Consil.

Petrus Leonus.	Joannes Trivisanus.
Franciscus Foscarus.	Nicolaus Bernardo.
	Hieronimus de Ka da pesaro.

Per la qual cosa, lasciando impregiudicate tutte le questioni bibliografiche, che, a proposito di questo interessante e rarissimo opuscolo, potrebbero venir sollevate, e richiamando anzi sopra di esse la attenzione degli specialisti, pare non sia totalmente da escludersi che la seconda parte di esso, la quale non può in alcun modo essere attribuita a PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, possa, almeno in qualche misura, essere opera dello stesso PIETRO LIECHTENSTEIN. È questa del rimanente una semplicissima ipotesi, alla quale non intendiamo di attribuire alcun valore, pienamente sodisfatti se dalla presente nostra nota potranno aversi per dimostrate queste due conseguenze:

1°. Il trattato anonimo sull' Astrolabio contenuto nel-l'opuscolo a stampa e sul quale ci siamo intrattenuti, è opera di PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI.

2°. Il ben noto stampatore PIETRO LIECHTENSTEIN è da risguardarsi non solo come impressore, ma altresì come autore o compilatore di cose astronomiche.

[1] FAVARO, *Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi matematico padovano del secolo XV.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879), 1—74, 115—251.

[2] FAVARO, *Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi matematico padovano del secolo XV.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18** (1885), 405—423.

[3] Della comunicazione di questo documento vado debitore alla squisita gentilezza del ch^{mo} prof. ENRICO BERTANZA.

[4] Favaro, *Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879), pag. 9.

[5] Favaro, *Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18** (1885), pag. 420.

[6] Archivio di Stato in Venezia. Sezione Notarile. Atti Marco Raffanelli. Busta 858. Registro C. LXXXX.

[7] Favaro, *Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12** (1879) pag. 215.

[8] Tomasini, *Bibliothecae Patavinae publicae et privatae* ecc. (Utini, Schirattus 1639) pag. 110 numerata per errore 112, col. II.

[9] *Catalogue de Manuscrits provenant des Collections Saibante et Gianfilippi de Verone.* Dont la vente se fera le lundi 23 janvier 1843 et jours suivants, ecc. pag. 37—38.

[10] *Catalogue of the Manuscripts at Ashburnham place.* Part the first comprising a collection formed by Professor Libri. (London, Hodgson) pag. 31.

[11] *Relazione alla Camera dei Deputati e disegno di legge per l'acquisto di codici appartenenti alla Biblioteca Ashburnham descritti nell' annesso catalogo.* (Roma, tip. della Camera dei Deputati, 1884) pag. 17.

[12] Una particolareggiata descrizione di questo codice abbiamo data nella nostra *Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi matematico padovano del secolo XV.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18** (1885), pag. 411—414.

[13] Questo risulta da una annotazione del Brozek nei termini seguenti: »Liber iste fuit illustrissimi Domini Petri Myszkowski Episcopi Cracoviensis et notae in hoc libro manu ipsius sunt notatae cum adhuc variis scientiis daret operam in Studio Patavino. — M. Joannes Broscius Curzeloviensis possidet 1619.»

[14] Non essendoci riuscito di ottenere a prestito l'esemplare della Biblioteca Jagellona (segnato »Mathesis 308» e contenuto nell' anzidetto volume miscellaneo contraddistinto colla segnatura »R. XIX. 14»), ci siamo serviti di quello posseduto dalla Biblioteca Marciana di Venezia, interamente conforme al primo e segnato col n° 70775.

[15] Di questa medesima mano ci sembrano essere anche le correzioni ed aggiunte delle quali abbiamo tenuto parola.

— Intorno a FEDERICO DELFINO o DOLFIN, lettore di matematica nello Studio di Padova, veggasi ciò che ebbimo occasione di scrivere a pag. 58—60 del nostro lavoro intitolato: *Le matematiche nello Studio di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI* (Padova, Randi 1880).

[16] Non pare che l'appellativo »Socius» sia da intendersi qui nel senso di »collega», poichè nessun CHERUBINI figura intorno a questo tempo come lettore in alcuna delle due Università dello Studio padovano.

[17] DENIS, *Annalium typographicorum V. A. Michelis Maittaire Supplementum.* Pars II (Viennae, J. de Kurzbeck 1789) pag. 497, n° 4263. — PANZER, *Annales typographici ab artis inventae origine ad annum MD post Maittarii, Denisii, aliorumque doctissimorum virorum curas in ordinem redacti, emendati et aucti.* Vol. III (Norimbergae, I. E. Zeh 1795) pag. 490, n° 2755. — HAIN, *Repertorium bibliographicum in quo libri omnes ab arte typographiae inventa usque ad annum MD typis expressi* ecc. Vol. I. Pars I (Stuttgartiae et Tubingae, Cotta 1826) pag. 238, n° 1898.

[18] BRUNET, *Manuel du libraire et de l'amateur des livres,* ecc. Cinquième édition. Tome Premier (Paris 1860) col. 532—533.

[19] FULIN, *Documenti per servire alla storia della tipografia veneziana.* Archivio Veneto (Venezia) **12**, 1882, pag. 135.

[20] Notatorio 25. Collegio I. R°. 1512—1514, car. 104 recto. — Colla nota in margine: »Non data in tempore».

Sur les écrits d'histoire des mathématiques publiés en Portugal.

Par F. Gomes Teixeira à Porto.

Ayant été invité par M. Eneström à rédiger pour son journal une petite notice sur les écrits d'historie des mathématiques publiés en Portugal, je donne ici un aperçu rapide de ces écrits, en tant qu'ils me soient connus; comme les auteurs des notes sembables déjà insérées dans la Bibliotheca Mathematica, je me limite aux mathématiques pures.

Parmi les ouvrages d'histoire des mathématiques parus en Portugal, il y en a deux dont il faut faire mention en premier lieu, parce qu'ils nous permettent d'étudier complétement l'histoire de cette science en Portugal. Le premier de ces ouvrages est l'*Ensaio historico sobre a origem e progressos das mathematicas em Portugal, por* Francisco de Borja Garção-Stockler (Paris 1819; VII + 168 p. in-8°). L'auteur y traite aux pages 1—75 l'histoire des mathématiques en Portugal depuis la fondation de la monarchie portugaise jusqu'en 1819; les pages 76—168 contiennent une série de 36 notes, où quelques points mentionnés dans le texte sont développés et éclaircis. Le second ouvrage dont il s'agit, est la *Memoria historica da faculdade de mathematica nos cem annos decorridos desde a reforma da universidade em 1772 até o presente pelo conselheiro* Francisco de Castro Freire (Coimbra 1872; 192 p. in-8°). Cet important travail fut publié à l'occasion du premier centenaire de la réformation de l'université de Coimbra en 1772. Dans l'introduction (p. 7—19), l'auteur considère la période depuis la fondation de la monarchie jusqu'en 1772; après cela il traite plus en détail (p. 20—118) la période 1772—1872. A la fin il y deux appendices contenant 1) une liste des professeurs à l'université 1772—1872 et 2) une bibliographie des écrits mathématiques publiés en Portugal dans le même temps. L'exposition de l'histoire des mathématiques en Portugal est étroitement liée à à celle de l'histoire de la faculté des mathématiques à Coimbra, qui est en effet l'objet principal de l'ouvrage.

Je vais maintenant indiquer en ordre chronologique les titres des autres écrits publiés en Portugal sur l'histoire des mathématiques.

F. DE BORJA GARÇÃO STOCKLER: *Elogio historico de J. le Rond d'Alembert.* Memorias da academia das sciencias de Lisboa 1, 1797, 531—577.

A. RIBEIRO DOS SANTOS: *Memoria da vida e escriptos de Pedro Nunes.* Memorias de litteratura da academia das sciencias de Lisboa 7, 1806, 250—283.

A. RIBEIRO DOS SANTOS: *Memoria da vida e escriptos de Don Francisco de Mellò.* Mem. de litter. da acad. das sc. de Lisboa 7, 1806, 237—249. — Ce géomètre portugais naquit en 1490 et mourut en 1536.

A. RIBEIRO DOS SANTOS: *Memorias historicas sobre alguns mathematicos portuguezes e estrangeiros domiciliados em Portugal.* Mem. de litter. da acad. das sc. de Lisboa 8, 1812, 148—229.

F. A. MARTINS: *José Monteiro da Rocha.* Instituto de Coimbra 6, 1858. — Biographie d'un mathématicien portugais né en 1734, mort en 1819.

G. RIBEIRO D'ALMEIDA: *Curso de mathematica; ou exposição methodica da arte de calcular. Historia d'esta sciencia.* Coimbra 1860.

A. J. TEIXEIRA: *Estudos sobre a doutrina da proportionalidade, especialmente sobre a definição 5ª do livro 5° d'Euclides.* Coimbra 1865. — Commentaire aux *Elementa* contenant plusieurs notices historiques et bibliographiques sur cet ouvrage.

D. A. DA SILVA: *Lettre à M. Moigno.* Cosmos (Paris) 1877, 26 mars. Jornal de sciencias mathematicas (Coimbra) 1, 1877. — Réclamation de priorité relative à quelques théorèmes de mécanique rationnelle.

R. R. DE SOUSA PINTO: *Noticia sobre Leverrier.* Jorn. de sc. mathem. 1, 1877, 86—89. — Notice nécrologique.

F. G. TEIXEIRA: *Noticia sobre Bellavitis.* Jorn. de sc. mathem. 2, 1880. — Notice nécrologique.

F. G. TEIXEIRA: *Prelecção sobre a origem e sobre os principios do calculo infinitesimal feita aos alumnos da universidade de Coimbra.* Jorn. de sc. mathem. 3, 1881, 21—45.

A. MARRE: *Lettre à M. le président de l'académie des sciences de Lisbonne.* Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes (Lisboa) 38, 1884. — Notice sur la vie et les travaux de RENÉ FRANÇOIS DE SLUZE.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

P. Treutlein. DAS GESCHICHTLICHE ELEMENT IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHTE DER HÖHEREN LEHRANSTALTEN. Braunschweig, Salle 1890. 8°, 32 p.

Cette petite brochure contient un discours prononcé en 1889 au congrès des naturalistes allemands à Heidelberg. Après avoir fait observer que l'étude de l'histoire des mathématiques est d'une grande importance pour l'instruction supérieure, M. TREUTLEIN démontre que cette étude est aussi nécessaire pour l'instruction moyenne, parce qu'à son aide on peut lier l'enseignement des mathématiques à celui des autres sciences, et parce que l'histoire des mathématiques est une partie de l'histoire de la culture intellectuelle des hommes. D'autre part, des notices historiques non seulement mettent les élèves en état de mieux comprendre les methodes et les théorèmes de mathématiques, mais elles leur en rendent l'enseignement plus intéressant, ce que M. TREUTLEIN prouve par des exemples très bien choisis.

Nous nous permettons de recommander la brochure de M. TREUTLEIN aux amis de l'histoire des mathématiques et aux instituteurs de mathématiques.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1890: 2. — [Analyse de l'année 1888:] Fiziko-matem. naouki 1889, 269—272. (V. BOBYNIN.) — [Notice sur la nouvelle série du journal:] *Roma*, Accad. dei Lincei, Rendiconti **6**: 1, 1890, 475. (E. NARDUCCI.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1889: 4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

35 (1890): 3.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая виблiографiя. [2:2 (1775—1786).] Москва 1890.

8°, (2) + 159 p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences

mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimerie jusqu'à ce jour. Tome 2, cahier 2. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» 1890.

БОБЫНИНЪ, В. В., Нилсъ-Генрикъ Абелъ. Очеркъ его жизни и дѣятельности.

Fiziko-matem. naouki 1889. 48—59. 146—154. 209—226. 240—268. — BOBYNIN, V. V., Notice sur la vie et les ouvrages de N.-H. ABEL.

Eneström, G., Sur les bibliographies des sciences mathématiques.

Biblioth. Mathem. 1890. 37—42.

ЭНЕШТРЁМЪ, Г., Двѣ историческія замѣтки о числѣ π.

Vjestnik elem. matem. 8. 1890. 186—187. — ENESTRÖM, G. Deux remarques historiques sur le nombre π.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume I. Firenze 1890.

4°, 423 + (2) p. — Édition publiée sous la direction de M. A. FAVARO.

Günther, S., Martin Behaim. Bamberg, Buchnersche Verlagsbuchhandlung 1890.

8°, (2) + 86 p. + 6 pl. — [1.40 M.] — Publié comme tome 13 du recueil »Bayerische Bibliothek». — Cet écrit contient quelques notices historiques sur le »Baculus geometricus».

Heiberg, J. L., Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter.

Zeitschr. für Mathem. 35. 1890; Hist. Abth. 41—58. 81—100.

Jonquières, E. de, Écrit posthume de Descartes intitulé »de solidorum elementis». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives.

Biblioth. Mathem. 1890. 43—55.

Künssberg, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. II. Teil. (Programm zum Jahresbericht der vierkursigen königl. Realschule Dinkelsbühl pro 1890.) Dinkelsbühl 1890.

8°, 61 p. + 1 pl.

Loria, G., Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico.

[Torino, Accad. d. sc., Memorie 40$_2$. 79 p. + 2 pl. — [Analyse:] Torino, Accad. d. sc., Atti 25, 1890, 208—209. (C. SEGRE.)

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. Leibnitz (1693) to Cayley (1841). London, Macmillan 1890.

8°, XI + 278 p. — [Analyse:] Biblioth. Mathem. 1890, 59—61. (G. LORIA.)

Nix, L. M. L., Das fünfte Buch des Apollonius von Perga. In der arabischen Übersetzung des Thabit Ibn Corrah, ins Deutsche übertragen und mit einer Einleitung versehen. Leipzig 1890.

8°, 48 p. — [2 M.]

ПОПРУЖЕНКО, М., Объ отношеніи окружности къ діаметру и о квадратурѣ круга.
Vjestnik elem. matem. 8, 1890, 121—130. — POPROUCHENKO, M., Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur la quadrature du cercle. — Note historique.

Poulain, A., Sur trois théorèmes de Budan.
| Journ. de mathém. spéciales 1890. 12 p.

°**Poulain, A.**, Coup d'oeil sur l'histoire des mathématiques. Paris 1890.
8°, 347 p.

Riccardi, P., De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX.
Biblioth. Mathem. 1890, 56. — [Note sur le même sujet, en italien:] | *Bologna*, Accad. d. sc. dell' Istituto, Rendiconto 1890. 2 p.

Rosenberger, F., Die Geschichte der Physik in Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften sowie der allgemeinen Geschichte. Dritter Theil: Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren. Zweite Abtheilung. Braunschweig, Vieweg 1890.
8°, XII p. + p. 319—826.

Vicuña, G., Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles.
Biblioth. Mathem. 1890, 33—36.

Wronski, H., Loi téléologique du hasard. Réimpression de trois pièces rarissimes (1833), précédée d'un autobiographie et d'un inventaire de l'oeuvre. Paris 1890.
8°, (4) + 85 + (1) p.

Question 30 [sur une formule de trigonométrie sphérique].
Biblioth. Mathem. 1890, 64. (G. ENESTRÖM.)

BARANIECKI, M. A., Algoritmus, to jest nauka liczby polska rzecza wydana przez kriedza Tomasza Klosa. Krakow 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1890, 57. (S. DICKSTEIN.)

CARRARA, B., La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino, Paravia 1889. 8°.
Biblioth. Mathem. 1890, 58—59. (S. GÜNTHER.)

ENESTRÖM, G., Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. (Biblioth. Mathem. 1890.)
Jorn. de sc. mathem. 9, 1890, 151. (G. T.)

HUYGENS, CHR., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome II. Correspondance 1657—1659. La Haye, Nijhoff 1889. 4°.
Liter. Centralbl. 1890, 114—115. (—z—R.)

REIFF, R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp 1889. 8°.
Liter. Centralbl. 1890, 52. (—R.) — Deutsche Litteraturz. 11, 1890, 280. (M. CURTZE.)

TREUTLEIN, P., Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg. Braunschweig, Salle 1890. 8°.
Periodico di matem. 5, 1890, 59—61. (G. LORIA.) — Deutsche Litteraturz. 11, 1890, 460—461. (M. CURTZE.)

VOSS, A., Zur Erinnerung an Axel Harnack. Leipzig 1888. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 14_2, 1890, 87. (J. T.)

ZWERGER, M., Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet. München, Lindauer 1889. 8°.
Liter. Centralbl. 1890, 20. (—R.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1889. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. 35, 1889; Hist. Abth. 107—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1890, 61—64. — Fiziko-matem. naouki 1889, 273—292. — Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 103—106.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

31. COSSALI et LIBRI font mention d'un mathématicien italien nommé GUGLIELMO DE LUNIS, probablement du 13^e^ siècle. On demande une notice sur la vie et les travaux de ce mathématicien, et en particulier sur la traduction faite par lui d'un traité d'algèbre arabe, dont il existe un copie manuscrite dans la bibliothèque ancienne de S. Marc à Florence. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1890.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1890. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 4. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 4.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Bibliographische Notiz über die mathematisch-historischen Studien in der Schweiz.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Es ist keine leichte Sache, die Grenzen zu ziehen, innerhalb deren eine solche Arbeit sich bewegen soll; es frägt sich in erster Linie, ob nur die reine Mathematik, oder ob auch Astronomie, Mechanik, Physik in den Kreis der Betrachtung zu ziehen seien; im weitern ob auch kleinere rein biographische Notizen (Nekrologe) berücksichtigt werden sollen; ob ferner Ausgaben und Commentare älterer Mathematiker unter die mathematisch-historischen Arbeiten zu rechnen seien, und ob endlich nur die innerhalb der betreffenden Landesgrenzen erschienenen Schriften und nicht auch die von im Auslande lebenden Landesangehörigen verfassten Arbeiten aufzunehmen seien. Was die erste Frage anbetrifft, so gaben mir die Artikel, die bis jetzt in dieser Zeitschrift über dieses Gebiet veröffentlicht worden sind, Wegleitung; gleich jenen werde ich also nur die reine Mathematik berücksichtigen. Biographische Notizen habe ich nur dann aufgenommen, wenn sie sich auf bedeutende Namen von europäischer Berühmtheit bezogen, oder wenn sie auf die Besprechung der wissenschaftlichen Arbeiten eintraten. Ferner habe ich auch die wenigen mathematisch-historischen Abhandlungen, die im Auslande von Schweizern verfasst und veröffentlicht wurden, aufgeführt.

Was das Studium der Geschichte der mathematischen Wissenschaften in der Schweiz betrifft, so gilt im Allgemeinen das-

selbe, was von andern Ländern zu sagen, und auch in dieser Zeitschrift bereits ausgesprochen worden ist: dieses Studium ist ein relativ neueres; erst in der 2. Hälfte dieses Jahrhunderts ist auf diesem Gebiete intensiver und zielbewusster gearbeitet worden. Doch erlaube ich mir zu bemerken, dass viele Schweizer des 16. Jahrhunderts thatsächlich das mathematisch-historische Studium gefördert haben, vorzugsweise durch Ausgaben griechischer Mathematiker. So besorgte S. GRYNAEUS die ersten griechischen Ausgaben von den Elementen (Basel 1533) und dem Almagest (Basel 1538), TH. GECHAUFF (VENATORIUS) die erste Originalausgabe von ARCHIMEDES' Werken (Basel 1544). XYLANDER (HOLZMANN) gab die Schriften von PSELLUS (Basel 1556) und DIOPHANTUS (Basel 1575, nur lateinische Übersetzung) aus und übersetzte die sechs ersten Bücher EUKLID's ins deutsche (Basel 1562). K. DASYPODIUS, ein Schweizer aus Frauenfeld gebürtig, hatte den Plan gefasst, eine möglichst vollständige Sammlung der griechischen Mathematiker nach und nach herauszugeben und hatte zu diesem Zwecke eine grosse Zahl von Manuscripten gesammelt, allein das Unternehmen kam nicht, oder nur zu einem ganz kleinen Theile zur Ausführung; 1572 erschien in Strassburg seine Ausgabe von *Propositiones logisticae Barlaami libri VI*, und von EUKLIDS Elementen verfasste er eine Reihe von Schulausgaben (s. WOLF, *Biographien zur Culturgeschichte der Schweiz* III, 1859). Hier mag auch noch angeführt werden, dass S. MÜNSTER die Arithmetik des RABBI ELIJA (Basel 1546) veröffentlichte, und dass K. GESNER in seiner *Bibliotheca universalis* (Zürich 1545) werthvolle Nachrichten über Leben und Schriften älterer Mathematiker gegeben hat. — Es mag vielleicht Manchem auffallen, dass das Zeitalter der grossen schweizerischen Mathematiker, die Zeit der BERNOULLI und der EULER, in einer Bibliographie der Geschichte der Mathematik nur einen sehr geringen Platz in Anspruch nimmt; allein der Grund liegt nahe; die ausserordentlich zahlreichen Entdeckungen dieser Gelehrten auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, besonders auf dem damals sich rasch entwickelnden neuen Felde der Infinitesimalrechnung, und ihr umfangreicher Briefwechsel mit den verschiedensten Gelehrten Europa's liessen ihnen keine Zeit zu historischen Studien: das Neue drängte sich im Vergleich zum Alten zu sehr hervor. Immerhin finden sich in ihren Schriften vielerorts Stellen, die auf Arbeiten älterer Mathematiker zurückweisen, es werden APOLLONIUS, ARCHIMEDES, PAPPUS citiert, es wird auf FERMAT, DESCARTES, NEWTON, und Andere verwiesen, Probleme derselben

werden gelöst, oder andere Beweise zu älteren Theoremen gegeben; ich glaubte aber, solche Abhandlungen (mit wenigen Ausnahmen) nicht in die Bibliographie aufnehmen zu dürfen.

Derjenige Gelehrte, der eigentlich das Studium der Geschichte der mathematischen Wissenschaften in der Schweiz inauguriert hat, ist Prof. RUDOLF WOLF in Zürich. Ihm verdankt man neben einigen bedeutenden, grösseren historischen Arbeiten (die unten aufgeführt werden) eine ausserordentliche Zahl von literarischen, biographischen, wissenschaftlichen Notizen zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften, die sich allerdings zum grösseren Theile auf schweizerische Gelehrte beziehen. Es war nicht möglich, in dieser Bibliographie alle diese Notizen einzeln anzuführen, der Rahmen dieser Zeitschrift wäre zu eng dafür gewesen; es sei daher hier zusammenfassend erwähnt, dass sich solche historische Notizen (meistens und später immer unter dem Titel: *Notizen zur schweizerischen Kulturgeschichte*) in sämtlichen Jahrgängen der Mittheilungen der naturforsch. Gesellschaft in Bern von 1844—1856 vorfinden, und ebenso in sämtlichen Jahrgängen der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von 1856—1890. Gleicherweise enthalten sein *Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie, Astronomie* (1869, 1872), und sein jetzt in 2 Bänden erscheinendes *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur* (1890), eine Fülle von historisch-literarischen Angaben, die dem Geschichtsschreiber dieser Wissenschaften ein unentbehrliches Hülfsmittel sind. Auch seine *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* I—IV, (Zürich 1858—1862) und seine *Geschichte der Astronomie* (1877) bilden eine reiche Fundgrube werthvollen Materials zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

Was die Förderung dieses Studiums durch unsere Universitäten anbetrifft, so müssen wir leider gestehen, dass wir hierin hinter einigen andern Ländern Europa's noch wesentlich zurückstehen. In Basel und Genf wurden bis jetzt gar keine Vorlesungen in dieser Richtung gehalten, in Zürich las bis jetzt nur Prof. RUD. WOLF über »Geschichte der Astronomie» und in Bern Prof. J. H. GRAF über »Geschichte der Kartographie der Schweiz». Der letztere wird übrigens von nun an auch andere mathematisch-historische Vorlesungen ankündigen. Dass das Studium der Geschichte der Wissenschaften eine nothwendige Ergänzung zu demjenigen der Wissenschaft selbst und ein wesentlicher Faktor zum bessern Verständniss dieser letzteren ist, wird doch immer mehr als Wahrheit erkannt und gewürdigt.

Beweis dafür ist die Thatsache, dass heutzutage selten mehr eine bedeutendere mathematische Facharbeit ohne historische Einleitung oder Verweisungen veröffentlicht wird.

1569.

Ramus, P., Arithmeticae libri II et geometriae libri XXVII. Basileae 1569. 4°.

Ramus, P., Scholarum mathematicarum libri XXXI. Basileae 1569. 4°.
Beide Bücher, besonders die *Scholae* und die *Geometria*, enthalten zahlreiche historische Excurse; die *Scholae* sind eigentlich eine Kritik der mathematischen Leistungen der Alten, vor Allem des EUKLIDES.

1583.

Freigius, J. Th., Quaestiones geometricae et stereometricae in Euclidis et Rami στοιχείωσιν, in quibus Logica veterum mathematicorum illustratur et demonstratur, etc. Basileae 1583. 8°.
Enthält in der Vorrede und im Texte viele historische Andeutungen.

1724.

Bernoulli, Joh. [II], Dissertatio: Utrum Galli praestant Anglis inventorum physicorum et mathematicorum laude. Basileae 1724.

1733.

Gessner, J., Oratio de praeclaris Helvetiorum meritis in mathesi. Tiguri 1733.
Diese Schrift ist verloren gegangen.

1749.

Euler, L., De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.
Berlin, Acad. d. sc., Mémoires (Classe de mathématiques) 5 (1749), 1751, 139—179.

König, J., Mémoire sur la véritable raison du défaut de la règle de Cardan dans le cas irréductible des équations du troisième degré et de sa bonté dans les autres.
Berlin, Acad. d. sc., Mémoires (Classe de mathém.) 5 (1749), 175 180—188.

1750.

Cramer, G., Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. 4°.
Die Vorrede enthält historische Notizen über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Curven.

[redacted]

1763.

Euler, L., Adnotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem.
S:t Pétersbourg, Acad. d. sciences, Novi commentarii **8**, 1763, 157—168.

1774.

Lambert, J. H., Die freie Perspective. I—II. Zweite Ausgabe. Zürich 1774. 8°.
Dieselbe enthält unter »Anmerkungen und Zusätze zu § 3» p. 5—31 eine Geschichte der Perspective. Auch LAMBERTS übrige Schriften, wie seine *Photometria* (Augsburg 1760) und seine *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung* I—IV (Berlin 1765 —1772) enthalten vielfach historische Notizen und Citate.

1783.

Fuss, N., Éloge de Léonard Euler. S:t Pétersbourg 1783. 8°.

1786.

Fuss, N., Lobrede auf Herren Leonard Euler. Basel 1786. 8°.

1787.

Bernoulli, Daniel [II], Vita Danielis Bernoullii [I].
Nova Acta helvet. phys.-math.-anatom.-botan.-medica, **1** (Basil. 1787), 1—32.

1789.

Lhuilier, S., Polygonométrie ou de la nature des figures rectilignes, et abrégé d'isopérimétrie élémentaire. Genève 1789. 4°.
Am Schlusse der »Polygonométrie» befindet sich eine »Digression sur les lieux plans d'Apollonius et sur les Porismes».

1796.

Girtanner, J., Untersuchungen über Cardan's und Bombellis Regeln. St. Gallen 1796. 8°.

1809.

Lhuilier, S., Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géométriques. Paris et Genève 1809. 4°.
Enthält in der Vorrede und im 1. Capitel eine Reihe von Bemerkungen über die Geschichte der Geometrie, so über APOLLONIUS' ebene Örter und über die Porismen.

1817.

Gautier, A., Essai historique sur le problème des trois corps. Paris 1817. 4°.

1823.

Choisy, J. D., Essai historique sur le problème des maximums. Genève 1823. 4°.

Fragments de lettres de divers savants contemporains de Newton. Biblioth. univers. de Genève; Sciences et arts **22**, 1823, 245—258; **23**, 1823, 3—11, 81—89.

1829.

Huber, D., J. H. Lambert nach seinem Leben und Wirken. Basel 1829. 8°.

1833.

Mémoire sur les travaux et les écrits de M. Legendre. Biblioth. univers. de Genève; Sciences et arts **52**, 1833, 45—82.

1843.

Fuss, P. H., Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle. I—II. Pétersbourg 1843. 8°.

1845.

Fuss, P. H., Notice sur la découverte d'ouvrages inédits d'Eul *S:t Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin **3**, 1845, 74—79; **7**, 18 337—368.

1853.

Kopp, Ch., Note sur l'histoire des règles à calcul. *Neuchatel*, Soc. d. sc., Bulletin **3**, 1853, 120—122.

1859.

Gautier, A., Sur les travaux récents des géomètres et des astronomes relatifs à la théorie des mouvements de la lune. Archives des sciences phys. et natur. (Génève) Nouvelle Pér. **5**, 1859. 201—219.

1860.

Merian, P., Die Mathematiker Bernoulli. Basel 1860. 4°, 61 S.

1861.

Durège, H., Bessel's Leben und Wirken. Zürich 1861. 8°, 32 S.

Zähringer, H., Die Hülfsquellen des Rechnens. Eine historische Skizze. Luzern 1861. 4°. — Programm der Kantonschule in Luzern.

1863.

Kinkelin, H., Das Buch der drei Brüder (Mohammed, Ahmed und Hasan ben Musa ben Schakir).
Basel, Naturforsch. Gesellsch., Verhandlungen **3**, 1863, 511—515.

1864.

Piccard, M., Choix des lettres numérales chez les Romains.
Lausanne, Soc. vaudoise des sciences nat., Bulletin **7**, 1864, 141—146.

1869.

Wolf, R., Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 1—2. Zürich 1869—1872.
8°. — Enthält eine grosse Zahl historischer Notizen und Literaturangaben.

Wolf, R., Matériaux divers pour l'histoire des mathématiques.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **2**, 1869, 313—342.

1872.

Amberg, B., Die verschiedenen Numerationssysteme. Math.-histor. Skizze. Zug 1872.
4°. — Program der kantonalen Industrieschule und des städtischen Gymnasiums in Zug.

Suter, H., Geschichte der mathematischen Wissenschaften. I: Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. II: Vom Anfang des XVII. bis gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Zürich 1872—1875.
8°. — I: II + 192 S. + 2 Taf. II: VI + 380 S. + 1 Taf. — Die zweite Auflage des ersten Theiles erschien 1873 (VI + 196 S. + 2 Taf.).

Übersetzungen:

A mathematikai tudományok története. Elsö resz. Forditotta Lederer Sandor. Budapest 1874.
8°, VIII + 165 S. + 2 Taf.

Исторія математическихъ наукъ. Перев. съ измѣн. и доп. съ нѣм. А. Мануйловъ. I. Кишиневъ 1876.
8°, IV + 180 S. + 2 Taf.

Wolf, R., Joh. Kepler und Jost Bürgi. Zürich 1872. 8°.

1873.

Geiser, C. F., Zur Erinnerung an Jakob Steiner.
Schweiz. naturforsch. Gesellschaft, Verhandlungen **56** (Schaffhausen 1873), 215—251.

Kinkelin, H., Der Calculus Victorii.
Basel, Naturforsch. Gesellsch., Verhandlungen **5**, 1873, 147—158.

Burkhardt, F., Pitiscus, Thesaurus mathematicus.
Basel, Naturforsch. Gesellsch., Verhandlungen 5, 1873, 159–161.

1877.

Vielle, A., Les Bernoulli. Discours. Neuchatel 1877.
4°. — Programme de l'académie de Neuchatel 1877.

Wolf, R., Geschichte der Astronomie. München 1877.
8°. — Sechszehnter Band der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. Herausgegeben durch die historische Commission bei der kgl. bayerschen Academie der Wissenschaften. — Wird hier aufgenommen, weil dieselbe eine grosse Anzahl von auf die reine Mathematik sich beziehenden historischen Notizen und Literaturangaben enthält.

1880.

Isely, L., La géométrie de la sphère et l'hexagramme mystique. (Traité historique.)
Neuchatel, Soc. des sciences nat., Bulletin 12, 1880, 533—550.

1882.

Fiedler, W., Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden.
Zürich, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschrift 27, 1882, 125—175.

Suter, H., Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nicolaus Oresme.
Zeitschr. f. Mathem. 27, 1882; Hist. Abth. 121—125.

Tetmajer, L., Über Culmanns bleibende Leistungen. Zürich 1882.
8°, 23 S.

1883.

Fiedler, W., Zu zwei Steinerschen Abhandlungen.
Zürich, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschrift 28, 1883, 409—4[illegible]

1884.

Isely, L., Essai sur l'histoire des mathématiques dans la Suisse française. Neuchatel 1884.
4°. — Programme de l'acad. de Neuchatel 1884.

Rudio, F., Leonard Euler. Vortrag gehalten auf dem Rathhause in Zürich am 6. December 1883. Basel 1884.
8°, 24 S.

Suter, H., Der Tractatus »de quadratura circuli« des Albertus de Saxonia.
Zeitschr. f. Mathem. 29, 1884; Hist. Abth., 81—102.

Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonard Euler. Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforsch. Gesellschaft. Basel 1884.

8°, 95 S. — Anhang zu Theil VII der Verhandl. der Naturforsch. Gesellsch. zu Basel. — Enthält: 1° *Vortrag von* F. BURCKHARDT; 2° *Verdienste von Johannes und Daniel Bernoulli um den Satz der Erhaltung der Energie von* E. HAGENBACH-BISCHOFF; 3° *Vortrag von* F. BURCKHARDT; 4° *Vortrag von* H. KINKELIN; 5° *Leonard Eulers Verdienste um Astronomie und Physik von* E. HAGENBACH-BISCHOFF.

1886.

J. H., Der Mathematiker J. G. Tralles (1763—1822). Eine biographische Skizze der Naturforsch. Gesellsch. in Bern zur Erinnerung an die am 18. Dec. 1786 erfolgte Gründung gewidmet. Bern 1886.

8°, 21 S. — Separatabdrück aus der »Sammlung Bernischer Biographien«.

1887.

H., Die Quaestio »de proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem« des Albertus de Saxonia.

Zeitschr. f. Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 41—56.

H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. Zürich 1887.

4°, (2) + 58 S. — Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Kantonsschule in Zürich 1887; zugleich als Festschrift zur 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Zürich erschienen.

1888.

J. H., Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Heft. I—III. Bern 1888—1890.

8°. **I**: VIII + 82 S. — **II**: IV + 101 S. — **III**: IV + 108 S.

1889.

H., Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526.

Biblioth. Mathem. 1889, 17—22.

J. H., Der Mathematiker Joh. Samuel König und das Princip der kleinsten Aktion. Bern 1889.

8°, 46 S. — Jubelgabe der Lerbersschule in Bern zum 300-jährigen Jubiläum des Baslers Gymnasiums.

Wolf, R., Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts.
Biblioth. Mathem. 1889, 33—34.

1890.

Graf, J. H., Notizen zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in der Schweiz. N° 1—9.
Bern, Naturforsch. Gesellsch., Mittheilungen 1889 [gedruckt 1890].

Rudio, F., Das Problem von der Quadratur des Zirkels.
Zürich, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschrift **35**, 1890. 51 S.

Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur. I. Halbband: Aufgabe, Geschichte, Vorkentnisse der Astronomie. Zürich 1890.
8°. — Enthält viele auf die reine Mathematik bezügliche historische, biographische und literarische Angaben.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

5. Levi ben Gerson und der Baculus Jacobi.

Zu den sehr interessanten Aufklärungen, welche Herr Günther in der Bibliotheca Mathematica 1890 (S. 73 ff.) gegeben hat, erlaube ich mir folgende Bemerkungen, indem ich zugleich auf meinen Artikel »Levi ben Gerson« in der *Encyklopädie* von Ersch u. Gruber, Band **43**, Seite 295 ff. verweise, welcher noch nicht lange dem Publikum zugänglich ist.[1] Ich habe dort die mathematischen und astronomischen Schriften dieses selbständigen Denkers, soweit es einem Laien möglich ist, zur Kenntnis gebracht (S. 298—299).

Levi, auch *Leo de Balneolis* genannt, lebte in Avignon; ich habe sein Todesjahr 1344 feststellen können. Seine Abhandlung über das von ihm erfundene Instrument heisst in der Wiener lateinischen Handschrift 5072 *secretorum revelator* (wie im Hebräischen); die lateinische Übersetzung des Petrus de Alexandria ist Papst Clemens VI. gewidmet. Über diesen Petrus habe ich nirgends Näheres finden können. Es frägt sich nun, ob es zwei lateinische Übersetzungen derselben Abhandlung gebe, deren eine den Namen *Baculus Jacobi* für den Namen des Originals substituirt hat. Dass Levi selber in einer anderen Recension sein Instrument so genannt habe, ist mir nicht wahrscheinlich. Ich werde diese Benennung dem lateinischen Übersetzer beilegen, so lange sie nicht in der hebräischen Literatur nachgewiesen ist. Eine andere Frage ist die, ob die Kenntnis dieser Erfindung nicht *direct* von Avignon nach Spanien gedrungen ist.

[1] Die in Biblioth. Mathem. 1889, S. 38, Anm. 6 angedeuteten Weglassungen sind nachträglich im Magazin für die Wissenschaft des Judenthums **16**, 1889, S. 137—155 abgedruckt.

6. Geminus.

Ohne meinen Artikel in der Bibliotheca Mathematica 1887, S. 97—98, zu kennen, hat Herr Karl Manitius, in einer Abhandlung: *Des Geminos Isagoge. Nach Inhalt und Darstellung*

kritisch beleuchtet (Sonderabdruck aus den Commentationes Fleckeisenianae, Leipzig 1890, S. 95—107) über 2 Manuscripte einer Übersetzung aus dem Arabischen berichtet, welche sich in Dresden und Florenz befinden. Er trägt Bedenken, die Übersetzung dem GERHARD VON CREMONA beizulegen, weil sie eine verzweifelt schlechte ist und einen entschiedenen Mangel an Verständnis für den Gegenstand verrät (S. 98). Dieses Argument ist nicht ausreichend für den Zweifel. GERHARD hat alles Mögliche übersetzt und sicherlich nicht alles mit Sachkenntnis. Wenn die Schlechtigkeit der Übersetzung etwa in Härte und Schwerverständlichkeit besteht, so wird ein moderner Philologe, der nicht arabisch versteht, diese Eigenschaften auch in Übersetzungen finden, die sicher von GERHARD herrühren. Herr MANITIUS beabsichtigt eine neue Ausgabe des GEMINOS, und wäre zu wünschen, dass er auch die von mir nachgewiesene *hebräische* Übersetzung benutze. Er vermutet das arabische Prototyp in ms. Par. 291; das liesse sich durch eine Anfrage leicht erledigen, da SLANES Catalog im ms. fertig scheint; vielleicht ist diese N. schon im Drucke. Das Citat S. 99, Anm. (Jahrbücher für Philologie und Pädagogik 1886, p. 475) habe ich nicht auffinden können.

[redacted]

Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes.

Par V. Bobynin à Moskwa.

La première section du Papyrus de Rhind se compose de huit colonnes, formant huit tables dans l'édition de M. Eisenlohr,[1] et destinée à réduire en quantièmes (fractions ayant l'unité pour numérateur) les fractions de l'espèce $\frac{2}{2n+1}$, dès que $n < 50$.

Les savants se sont beaucoup occupés de la restitution du procédé dont les mathématiciens d'Egypte s'étaient servis afin de réduire les fractions citées plus haut en quantièmes, mais malgré leurs efforts cette question est encore irrésolue. Un procédé général de réduction s'y refusant aux recherches des investigateurs, tels que M. M. Eisenlohr,[2] Cantor,[3] Favaro[4] et l'auteur[5] de cette note, on a dû se borner à indiquer des méthodes particulières pour différents groupes des fractions de l'espèce nommée plus haut. Ces indications ne laissent pas d'être très variées, vu la facilité d'exprimer par différentes méthodes et sous plusieurs formes chaque fraction en une somme de quantièmes. Quant à la vraie solution, elle ne saurait être obtenue que par la découverte d'un procédé général s'appliquant également à toutes les fractions de l'espèce en question. C'est ce dernier procédé que nous croyons avoir trouvé.

Parmi les procédés servant à réduire les fractions en quantièmes que Leonardo Pisano a expliqués dans son *Liber Abbaci*,[6] il y a un auquel il attribue une signification particulière, savoir celui qu'il appelle *regula universalis in disgregatione partium numerorum*.[7] La généralité en fait vraiment le trait distinctif. Tandis que les autres procédés ne conviennent qu'à certains groupes de fractions, celui-ci peut s'appliquer à toutes avec un succès égal. Pour atteindre son but, Leonardo se sert de nombreuses réductions à l'aide de multiplicateurs qui sont des nombres composés et contiennent le plus grand nombre possible de diviseurs simples. Le numérateur et le dénominateur de la fraction qu'on doit réduire en quantièmes sont multipliés par un de ces nombres composés, choisi toutefois de manière à être contenu entre le dénominateur doublé de la fraction et sa moitié.

Cela fait, le produit du numérateur et du multiplicateur est divisé par le dénominateur primitif et le quotient obtenu, composé d'un entier et d'une fraction, par le multiplicateur. La fraction sera ainsi exprimée soit en quantièmes, soit par des fractions, dont les numérateurs peuvent être décomposés en parties qui se réduisent avec les facteurs du dénominateur, de manière qu'on aura enfin une somme de quantièmes. Voici les mots propres de LEONARDO:

> Est enim in similibus quedam alia universalis regula, scilicet ut invenias numerum, qui habeat in se multas regulas, ut 12, vel 24, vel 36, vel 48, vel 50, vel quemlibet alium numerum, qui sit maior medietati numeri existenti sub virgula, vel minor duplo ipsius: ut pro prescriptis $\frac{17}{29}$ accipiamus 24, que sunt plus medietate de 29; et multiplica igitur 17, que sunt super virgulam per 24, erunt 408; que divide per 29 et per 24, exibunt $\frac{2\ 14}{29\ 24}$: deinde vide de 14, que partes sunt de 24: sunt enim $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ vel $\frac{1\ 1}{12\ 2}$, quas servi pro partibus de $\frac{17}{29}$; et vide iterum de 2 que sunt super 29 que partes sint de 24: sunt enim $\frac{1}{12}$ ipsorum, pro quo habebi $\frac{1\ 0}{12\ 29}$ in eisdem partibus de $\frac{17}{19}$; quia $\frac{2}{29}$ de $\frac{1}{24}$ equantur $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{29}$ que sunt $\frac{1\ 0}{12\ 29}$, scilicet $\frac{1}{348}$: ergo pro $\frac{17}{29}$ habeb $\frac{1}{348}\frac{1\ 1}{4\ 3}$, vel $\frac{1}{348}\frac{1\ 1}{12\ 2}$, ut superius invenimus.

Il s'en suit que plus le multiplicateur contient de diviseurs simples, plus les quantièmes correspondantes sont faciles à trouver et plus sûr et plus rapide en est le résultat voulu. Voici la formule exprimant le procédé en question:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{am}{b} : m = \left(q + \frac{r}{b}\right) : m = \frac{q}{m} + \frac{r}{bm},$$

où $\frac{b}{2} < m < 2b$; q est un nombre entier, partie du quotient de am divisé par b, contenue entre $\frac{a}{2}$ et $2a$; r est le résidu.

Passant à appliquer ce procédé au cas particulier où les fractions sont de l'espèce $\frac{2}{2n + 1}$ ($n < 50$), nous remarquons que m étant située entre les limites $\frac{b}{2}$ et b, q sera toujours égale à 1, c'est à dire la première des quantièmes sera $\frac{1}{m}$.

Examinons maintenant de plus près les résultats du Papyrus de Rhind cités plus haut. Nous y trouvons que les dénominateurs de toutes les premières quantièmes répondent aux conditions indiquées, c'est à dire représentent des nombres composés contenus entre le dénominateur entier de la fraction qu'on doit réduire en quantième et sa moitié. Par conséquent, si nous nous servons de ces nombres pour réduire en quantièmes les fractions correspondantes, nous aurons tous les résultats du Papyrus Rhind. Par exemple

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} : 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{2}{61} = \frac{2 \cdot 40}{61} : 40 = \frac{1}{40} + \frac{19}{61 \cdot 40} = \frac{1}{40} + \frac{10 + 5 + 4}{61 \cdot 40}$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610},$$

$$\frac{2}{77} = \frac{2 \cdot 44}{77} : 44 = \frac{1}{44} + \frac{11}{77 \cdot 44} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308},$$

$$\frac{2}{97} = \frac{2 \cdot 56}{97} : 56 = \frac{1}{56} + \frac{15}{95 \cdot 56} = \frac{1}{56} + \frac{8 + 7}{97 \cdot 56}$$

$$= \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Avant de terminer, nous nous permettons d'ajouter quelques mots sur la signification des calculs accompagnant dans le Papyrus Rhind les résultats de chaque réduction des fractions en quantièmes. Souvent ils ont été envisagés comme des calculs nécessaires au procédé même de la réduction; on aurait plus de raison à les croire faits pour vérifier les résultats de la réduction. En effet, examinant les tablettes du Papyrus Rhind, nous remarquons que la première ligne en est occupée par le dénominateur de la fraction réduite et par les quantièmes qui en sont obtenues; la seconde renferme les résultats de la multiplication de chacune des quantièmes par le dénominateur de la

fraction réduite. Le reste des lignes expose en détail le procédé de la multiplication. Ainsi par exemple, pour la fraction $\frac{2}{13}$:

13	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{104}$
	$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

	$\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}$
✳	4	$\frac{1}{52}\frac{1}{4}$
✳	8	$\frac{1}{104}\frac{1}{8}$

Evidemment ces tablettes ne contiennent rien qu'une multiplication détaillée du dénominateur de la fraction dont il s'agit par les quantièmes obtenues à la décomposition de cette dernière. Il est aisé de voir que le résultat final en doit équivaloir au numérateur de la fraction réduite, c'est à dire à 2, et que, ayant obtenu ce résultat, on a vérifié que la décomposition en quantièmes est exacte.

[1] A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (*Papyrus Rhind des British Museum*). Erster Band. Leipzig 1877, p. 30—48.
[2] Eisenlohr, l. c. p. 31—34.
[3] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Erster Band. Leipzig 1880, p. 22—30.
[4] A. Favaro, *Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind*. Atti dell' accademia di Scienze in Modena 19, 1879, p. 18.
[5] V. Bobynin, Математика древнихъ египтянъ (по папирусу Ринда). Москва 1882 [Les mathématiques chez les anciens Egyptiens.] P. 7—25.
[6] *Scritti di* Leonardo Pisano *pubblicati da* B. Boncompagni. Volume I. Roma 1857, p. 77—83.
[7] *Scritti di* Leonardo Pisano etc., p. 82—83.

Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull' Astrolabio.

Per PIETRO RICCARDI in Modena.

Ho letto con vivo interessamento la Nota dell' esimio collega ed amico prof. ANTONIO FAVARO *Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi,* inserita nella Bibliotheca Mathematica 1890, p. 81—90; e credo utile aggiungere alcune notizie a quelle di maggiore importanza in essa contenute.

Io pure posseggo un esemplare del rarissimo opuscolo: *Astrolabii quo primi mobilis motus deprehenduntur Canones,* la prima parte del quale il prof. FAVARO ha dimostrato essere opera di PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI; e per quanto concerne la parte bibliografica, sembrami identico a quello della Biblioteca Jagellona di Cracovia, da lui descritto.

Ne feci già menzione nella mia *Biblioteca matematica italiana* nell' articolo relativo al matematico PIETRO CATENA; il quale nel 1549, in una edizioncina ivi descritta e da me posseduta, ristampò, con sue correzioni, quella prima parte, senza egli pure indicarne l'autore. Ma io non poteva supporre che quel trattatello intorno ai Canoni dell' Astrolabio appartenesse al BELDOMANDO: nè il prof. FAVARO poteva immaginare che io lo avessi indicato incidentalmente nell' articolo relativo al CATENA.

Il prof. FAVARO che profittevolmente si occupa di questo soggetto, potrà poi verificare in che consistano le correzioni che il CATENA afferma di avervi apportate, e se la ristampa procurata dal CATENA è più conforme al Codice da lui esaminato.[1]

La seconda parte dell' opuscolo, intitolata »de mensurationibus rerum tractatulus» non ha immediata relazione con la prima; ed il CATENA stesso ne ommise la ristampa. Altro argomento è questo per convalidare l'opinione del FAVARO che la seconda parte non sia opera di BELDOMANDO. Per ora non saprei cui attribuirla; ma presenta il carattere di quei trattatelli di geometria pratica dei primi anni del rinascimento, dei quali ho tenuta parola nei *Cenni sulla storia della Geodesia in Italia.*

Più difficile è il risolvere la questione bibliografica posta dal prof. FAVARO intorno alle note di stampa che trovansi sotto al titolo, tanto nell' esemplare dell' opuscolo della biblioteca di

Cracovia, quanto nell' esemplare di mia proprietà: »Instrumentum Astrolabii etiam Impressum est Venetiis in officina Petri Liechtenstein Coloniensis Germani anno 1512«.

A me pare evidente che queste note tipografiche si riferiscano ad altro lavoro stampato del tipografo LIECHTENSTEIN, diverso dall' opuscolo, il quale contiene i soli *Canones* e non l'*Instrumentum Astrolabii*, cioè la rappresentazione grafica, o la descrizione geometrica del modo con cui è costruito l'istrumento. Infatti anche la prima pagina del trattatello (car. 2ª, recto) porta il titolo »In opus et instrumentum astronomicum Astrolabium vel Planispherium appellatum Canones . . .«.

Siccome poi il DENIS, l'HAIN e il BRUNET descrivono questo opuscolo, e lo indicano privo di note tipografiche, e stampato nel secolo XV, così mi pare verosimile che il LIECHTENSTEIN lo abbia pubblicato anteriormente al 1512; che in seguito riconoscendo come la pubblicazione dei *Canones* senza la descrizione dello strumento non approdasse, abbia stampato nel 1512 l'*Instrumentum Astrolabii*; e che contemporaneamente abbia aggiunte quelle note tipografiche alle copie rimastegli dell' opuscolo anteriormente stampato.

Del resto dal confronto dei caratteri e della carta del nostro opuscolo con altre edizioni del LIECHTENSTEIN, si potrebbe forse chiarire il dubbio. Confronto che riuscirebbe anche abbastanza agevole se le nostre biblioteche fossero fornite, come da molto tempo mi auguro inutilmente, di un elenco degli antichi tipografi con riferimento alle opere da essi stampate, e rispettivamente da ciascuna di esse possedute.

[1] Dell' opera prestata dal CATENA nell' insegnamento, dà alcune notizie il prof. FAVARO nell' interessante suo scritto: *Le matematiche nello Studio di Padova* (Padova 1880), p. 60.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. Künssberg. DER ASTRONOM, MATHEMATIKER UND GEOGRAPH EUDOXOS VON KNIDOS. II. Theil. Programm der k. bayer. Realschule zu Dinkelsbühl. 1890. 8°, 61 p. + 1 pl.

Der grössere Abschnitt dieser dankenswerten Studie über einen der ersten unter den griechischen Matematikern, deren ersten (astronomischen) Teil wir bereits in der Bibliotheca Mathematica zur Anzeige gebracht haben, bespricht das, was wir von den Leistungen des EUDOXOS auf dem Gebiete der reinen Mathematik wissen, während ein zweiter Abschnitt auch dem Physiker EUDOXOS gerecht zu werden sich bemüht. Eingeleitet aber wird das Ganze durch eine zwar gedrängte, aber sehr vollständige Zusammenstellung des Standes der Wissenschaft und ihrer Entwicklung bis zu dem Zeitpunkte, in welchem der eigentliche Held der Skizze auftritt. Zur Sache selbst übergehend, reproduziert der Verf., da uns beglaubigte Schriften des EUDOXOS ja überhaupt nicht erhalten sind, in der Ursprache alle die Quellenberichte, in denen von jenem und von seinen Leistungen die Rede ist, und welche es uns allein ermöglichen, von jenen Leistungen ein Bild zu erhalten. Es sind dieser Stellen im ganzen 16: PROKLOS partizipiert daran mit 4, ARCHIMEDES mit drei, mit ebensovielen der Scholiast EUTOKIOS, mit zweien PLUTARCH, mit je einer JAMBLICHOS, DIOGENES von Laërte, THEON von Smyrna, und endlich kommt noch das »Scholion des ADELOS» hinzu. Letzterem zufolge hat man das ganze fünfte Buch der Elemente EUKLID's als geistiges Eigentum des EUDOXOS zu betrachten; der »Codex Menagianus» sagt geradezu: *τοῦτο τὸ βιβλίον λέγεται εἶναι Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου.* Und zwar scheint der letztere nicht nur die Bedingungen, unter welchen zwei Grössenverhältnisse gleich sind, sondern auch diejenigen, unter welchen sie ungleich sind, in Erwägung gezogen zu haben, und hiedurch sei er, so argumentiert der Verf., auf die Exhaustionsmethode geführt worden, welche er mit Erfolg auf gewisse metrische Lehrsätze der Körperlehre angewendet habe, zumal auf die Bestimmung des Rauminhaltes von Zylinder und Kegel. Ob in der That jener Archetypus der Sphaerik, auf den nach HULTSCH die Lehrbegriffe des AUTOLYKOS und EUKLIDES sich zurückführen lassen, ebenfalls den EUDOXOS zum Verfasser gehabt hat, das ist nicht mit Sicherheit zu ermitteln, aber gewiss nicht unwahrscheinlich. Die »analytische» Methode dürfte der, dem die

»Sectio aurea» mutmasslich ihre Entstehung verdankt, wohl auch schon gekannt und gehandhabt haben. Weitaus am glänzendsten jedoch zeigt sich das Genie des Mannes bei seiner Behandlung des »delischen» Problemes; freilich sind auf uns betreffs der Eudoxischen Lösung desselben nur Andeutungen von ziemlich unbestimmtem Charakter gekommen, allein indem der Verf. eine von P. TANNERY begründete Hypothese mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie weiter verfolgt, gelangt er zu einem sehr plausiblen Schlusse, der sich folgendermassen in Worte kleiden lässt: Man sucht die Durchdringungskurve eines Torus und eines Rotationskegels, welchen Flächen resp. die Orthogonalgleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$b^2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2x^2$$

zugehören, projiziert diese doppelt gekrümmte Linie auf die XY-Ebene und identifiziert die Projektionskurve mit der καμπύλη γραμμή des EUDOXOS. Die sorgfältige Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse dieser ebenen Kurve beweist, dass dieselbe sich vollkommen dem anpasst, was aus den Beschreibungen des EUTOKIOS und DIOGENES zu folgen ist.

Als Physiker hat sich EUDOXOS, wie es scheint, um die Theorie der Musik und des Monochordes verdient gemacht; auch die perspektivischen Grundlehren, welche die Beziehungen zwischen den scheinbaren Grössen zweier scheibenförmiger Himmelskörper und deren Entfernungen von der Erde regeln, sind ihm, wie der Verf. aus dem »Eudoxischen Papyrus» schliessen möchte, geläufig gewesen. Dieser Papyrus ist freilich, wie wir erfahren, nur von geringen Werte als geschichtliches Dokument. denn die darin enthaltenen Stundenangaben sind durchaus unzuverlässig.

Herr KÜNSSBERG erblickt in seiner nunmehr beendigten Abhandlung selbst nur eine Vorarbeit zu weiterer Beschäftigung mit EUDOXOS, die allerdings vorwiegend ein philologisches Gepräge werde tragen müssen. Als eine erste gründliche Verarbeitung des gesamten urkundlichen Materiales ist aber schon das hier Gebotene von grossem Werte, und wir glauben sogar nicht, dass das vom Verf. gezeichnete Bild des Mathematikers EUDOXOS durch spätere Forschung irgend wesentlich veränderte Züge werde erhalten können.

München. S. GÜNTHER.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1890: 3.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
1890: 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
35 (1890): 4—5.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая виблиографія. 1:3. Москва 1886—1890.
8°, (2) + 161 + (1) p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires de sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à ce jour. — Appendice au journal: »Fiziko-matematitcheskia naouki» 2, 1886; 3, 1887.

БОБЫНИНЪ, В. В., Современное состояніе преподаванія исторіи математики.
Fiziko-matem. naouki 9, 1890, 1—6. — BOBYNIN, V. V., Etat actuel de l'enseignement de l'histoire des mathématiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Программа курса исторіи математики, читаннаго въ 1888—89 и 1889—90 академическихъ годахъ въ Московскомъ университетѣ.
Fiziko-matem. naouki 9, 1890, 7—22. — BOBYNIN, V. V., Programme du cours d'histoire des mathématiques professé en 1888—89 et 1889—90 à l'université de Moskwa.

°**Böklen, H.**, Über die Berücksichtigung des Historischen beim Unterrichte in der Geometrie. Tübingen, Fues 1889.
8°, 23 p. — [0.80 M.] — [Analyse:] Deutsche Litteraturz. 11, 1890, 460—461. (M. CURTZE) — Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 172—173. (CANTOR.)

Braunmühl, A. v., Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel.
Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 161—165.

°**Clarke, Agnes M.**, Geschichte der Astronomie während des 19. Jahrhunderts, gemeinfasslich dargestellt. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. MASER. Berlin, Springer 1889.
8°, XV + 540 p.

Favaro, A., Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi.
Biblioth. Mathem. 1890, 81—90.

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Esposizione e disegno. Seconda edizione. Firenze 1890.
8°, (4) + XXX + (3) p.

Favaro, A., De cómo y cuándo el santo oficio anuló la prohibición del sistema copernicano.
| *Mexico,* Sociedad »Alzate«, Memorias **3**, 1890. 15 p.

Favaro, A., Rarità bibliografiche galileiane. IV. Le operazioni del compasso geometrico e militare.
| Rivista delle biblioteche (Firenze) 1889. 5 p.

°**Fink, K.**, Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik, mit Hinweis auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen, Laupp 1890.
8°. — [4 M.]

°**Fritzsche, O. F.**, Glarean, sein Leben und seine Schriften. Frauenfeld 1890.
8°. — [3 M.]

Galilei, G., Opere, ristampate fedelmente sopra la edizione nazionale con approvazione del ministero della pubblica istruzione. Volume I. Firenze, Successori Le Monnier 1890.
8°, XXX + 423 + (2) p. — Comparez ci-dessus p. 94. — [Analyse:] *Stockholm,* Vetenskapsakad., Öfversigt **47**, 1890, 401—404. (G. Eneström.)

Gilbert, Ph., Les manuscrits de Galilée et leur histoire.
Bruxelles, Soc. d. sc., Revue des questions scientif. **24**, 1888, 353—378.

°**Graf, J. H.**, Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Action. Ein akademischer Vortrag. Bern 1889.
8°, 46 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 174. (Cantor.)

°**Graf, J. H.**, Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in bernischen Landen von Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Drittes Heft (erste Abtheilung): Die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts. Bern, Wyss 1889.
8°, IV + 108 p. — [1.20 M.] — [Analyse:] Liter. Centralbl. 1890, 435. (—z—r.)

°**Grube, F.**, Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. Teil II: Laplace und Legendre. Schleswig 1889.
4°, 28 p. — [1.50 M.]

Günther, S., Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung.
Biblioth. Mathem. 1890, 73—80.

Jonquières, E. de, Ecrit posthume de Descartes: De solidorum elementis. Texte latin, (original et revu) suivi d'une traduction française avec notes.
| *Paris,* Acad. d. sc., Mémoires 1890. (2) + 55 p.

Klamroth, M., Über die Auszüge aus griechischen Schriftstellern bei al-Jâqubi: Mathematiker und Astronomen.
Leipzig, Morgenl. Gesellsch., Zeitschrift **42**, 1888, 1—44.

°**Lasswitz, K.,** Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. I: Die Erneuerung der Korpuskulartheorie. Hamburg 1890.
8°, XII + 518 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 175—179. (CANTOR.)

°**Lehmann, E.,** De la Hire und seine Sectiones Conicae. II. Leipzig 1890.
4°, 26 p. — [1.20 M.]

Mackay, J. S., Pappus on the progressions.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **6**, 1888, 48—58.

°**Manitius, K.,** Des Geminos Isagoge. Nach Inhalt und Darstellung kritisch beleuchtet. Leipzig 1890. 8°.

Mansion, P., Sur une table du papyrus Rhind.
Bruxelles, Soc. scient., Annales **12**, 1888, 44—46.

°**Picard, E.,** Notice sur G. H. Halphen. Paris 1890.
8°, 15 p.

Riccardi, P., Saggio di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX.
| *Bologna,* Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie $\mathbf{10}_4$, 1890, 633—651.

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia euclidea. Parte quarta.
| *Bologna,* Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie $\mathbf{1}_5$, 1890, 25—84.

Roberts, R. A., Modern mathematics.
Dublin, Irish Acad., Proceedings $\mathbf{1}_3$, 1888, 151—156.

°**Seeger, F.,** Geschichtliche Darstellung der Zahlen und der sieben ersten Rechnungsarten. I. Oldenburg 1890.
4°, 24 p. + 2 pl. — [1.50 M.]

Steinschneider, M., Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung.
Biblioth. Mathem. 1890, 65—72.

Teixeira, F. G., Sur les écrits d'histoire des mathématiques publiés en Portugal.
Biblioth. Mathem. 1890, 91—92.

Torelli, G., Cenno necrologico di R. Rubini.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto $\mathbf{4}_2$, 1890, 134—135.

T., R., Greek geometry.
Nature (London) **37**, 1888, 78—79.

Vinci, Léonard de, Manuscrits G, L et M de la bibliothèque de l'Institut, publiés en fac-similés phototypiques avec transcriptions littérales, traductions françaises, avant-propos et tables

méthodiques par CH. RAVAISSON-MOLLIEN. Ouvrage couronné par l'Académie française. Paris, Quantin 1890.

In-folio, 420 p. — [150 fr] — M. CHARLES RAVAISSON-MOLLIEN avec une persévérance et une conscience dignes de tous éloges, continue son oeuvre qui sera achevée avec le prochain (sixième) volume, au printemps de 1891. Cette livraison paraît se distinguer des précédentes par un intérêt plus exclusivement artistique et philosophique. De remarquables dessins accompagnent les écritures: dans le ms. G, une tête de cheval; dans les mss. L et M, des personnages et des représentations allégoriques. Sous le texte d'un des feuillets du manuscrit L on découvre un des premiers croquis de »la Cène«. Dans les trois manuscrits, nombre de maximes, d'allégories, de facéties. Dans le manuscrit G on trouve les parties le plus importantes du traité de la peinture, notamment l'étude du paysage. Cependant on doit y signaler à l'attention des savants des remarques sur les yeux des animaux, les muscles, le coeur de l'homme, l'eau, la réflexion du soleil à la surface de la lune, la mesure de la vitesse des navires, le vol des oiseaux et des insectes. Le ms. L présente de copieuses notes sur le vol artificiel et naturel, sur la perspective, le pelage du cheval, la fortification et les ponts. Le ms. M est occupé beaucoup par des calculs et des remarques mécaniques.

Question 31 [sur le mathématicien GUGLIELMO DE LUNIS].

Biblioth. Mathem. 1890, 96. (G. ENESTRÖM.)

CARRARA, B., La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino 1889. 8°.

Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 169. (C. BRAUN.)

TREUTLEIN, P., Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg. Braunschweig, Salle 1890. 8°.

Biblioth. Mathem. 1890, 93. (G. ENESTRÖM.) — Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 173. (CANTOR.)

ZWERGER, M., Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet. München, Lindauer 1889. 8°.

Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 129—130. (B. NEBEL.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1890, 93—96. — Fiziko-matem. naouki 9, 1890, 48—64. — Zeitschr. für Mathem. 35, 1890; Hist. Abth. 158—160, 199—200.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

32. On demande une notice historique sur les différents noms de la construction indiquée dans les *Elementa* II: 11 (»sectio aurea«, »proportio divina« etc.). (G. Eneström.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891.

NEUE FOLGE 5. — NOUVELLE SERIE 5.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1891.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT	JOURNAL
ƆR GESCHICHTE DER MATHEMATIK	D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891.

ƐUE FOLGE 5. | NOUVELLE SÉRIE 5.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
AYER & MÜLLER.
ARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1891.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. Nº 1.

NEUE FOLGE. 5. | NOUVELLE SÉRIE. 5.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati.

Di GINO LORIA a Genova.

Da FRANCESCO CASORATI — medico egregio la cui effigie esistente tuttora in uno degli atri dell' Università di Pavia serve a ricordare ai posteri l'insegnamento della Clinica medica da lui a varie riprese ivi impartito — nacque a Pavia il 17 Dicembre 1835 il Matematico illustre della cui opera scientifica, colla trepidazione di un ammiratore e la venerazione di un discepolo, mi accingo qui a tracciare a larghi tratti i contorni. Non lo seguiremo negli studi che Egli fece nel Ginnasio, nel Liceo e nell' Università della città in cui ebbe culla e costante dimora; quanto tali studi siano stati fertili di risultati è sufficientemente dimostrato dal suo primo lavoro (che porta la data del 5 Luglio 1856) ove non è difficile scorgere in embrione quelle doti eminenti possedute da tutte le posteriori scritture del CASORATI. Ottenuto nel 1856 il diploma di ingegnere e architetto, Egli venne immediatamente scelto da F. BRIOSCHI come proprio assistente, e l'anno veniente, dietro accordi stabiliti fra questo e A. BORDONI, fu tosto elevato al grado di professore supplente di Topografia e Idrometria nell' Università Pavese. Dopo avere ivi professato l'anno di poi l'alta Geodesia, il nostro Matematico fu destinato nel 1859 a insegnare nello stesso istituto, col grado di professore straordinario, l'Analisi algebrica e la Geometria analitica. E due anni dopo ottenne la promozione a professore ordinario delle stesse discipline: col quale grado nel 1863 egli

succedette al MAINARDI nella cattedra di Calcolo infinitesimale, cattedra che egli illustrò fino al termine (11 Settembre 1890) della sua troppo breve esistenza. Nel frattempo Egli fece altri corsi di lezioni su la Geodesia e l'Analisi superiore nell' Università di Pavia (1865—1868) e nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (1868—1875).[1] Ma negli ultimi anni della sua vita, Egli abbandonò tutte quelle occupazioni capaci di distrarlo dalla Scienza pura, sicchè, a partire dal 1875, la sua attività didattica si concentrò negli insegnamenti di Calcolo infinitesimale e Analisi superiore che per debito d'ufficio doveva impartire nel patrio Ateneo. Se alle date precedenti, le quali segnano altrettante tappe nella carriera del CASORATI come insegnante, si uniscono quelle che recano le sue produzioni scientifiche, si avrà la collezione completa dei momenti importanti della sua vita: chè altri non ne può offrire un' esistenza occupata esclusivamente del ricercare, scoprire ed esporre le verità matematiche.

Quanto elevata ed efficace fosse l'opera del CASORATI come insegnante, lo dicano i numerosi discepoli che Egli per tanti anni e con sì costante sollecitudine ha eccitati e guidati nella ricerca del vero; i quali tutti ricorderanno la diligenza somma che Egli poneva nel rendere chiari i concetti più astrusi e le considerazioni più delicate che la moderna Analisi presenta; tutti potranno attestare come ogni lezione del CASORATI fosse perfetta in ciascuna sua parte, come il tema in essa trattato venisse contemplato in tutti i suoi vari aspetti sicchè l'ascoltatore ne traeva una cognizione completa; che se i discepoli più tardi o meno vogliosi potevano talvolta segnalare fra certe lezioni e le successive dei passaggi troppo rapidi, i più valorosi trovavano in ciò eccitamento a ricerche individuali. Sotto la veste dell' insegnante, quanto e forse più che nell' attitudine da Lui assunta come scienziato, il CASORATI si manifestò uno dei più strenui campioni di quell' indirizzo degli studi analitici odierni, che trova in RIEMANN il suo più illustre rappresentante, seguendo il quale l'espositore di una dottrina ha per fine costante il surrogare, per quanto si possa, il ragionamento al calcolo, la logica senza simboli al cieco meccanismo dell' algoritmo algebrico.

Un uomo di ingegno così spiccatamente originale quale fu FELICE CASORATI non poteva certamente adattarsi al compito di colui che insegna una scienza quale gli fu trasmessa da' suoi predecessori; ond' Egli rappresentò spessissimo una parte diametralmente opposta. Molte e importanti innovazioni vennero da Lui apportate ai metodi usati di consueto per trattare gli argomenti che doveva svolgere nelle sue lezioni, di molte scoperte

egli rinvenne in questo lo stimolo, tanto che sembra lecito affermare che nessuno degli insegnamenti a Lui affidati lo lasciò indifferente: ed è appunto in grazia di questa preziosa facoltà di interessarsi vivacemente per tutto che era chiamato a professare, che a Lui fu concesso di far progredire tanti rami di Matematica, pura e applicata. Quanti e quali siano il lettore potrà facilmente rilevare percorrendo l'Elenco delle sue publicazioni posto infine di questi brevi Cenni.[2]

Tutti i lavori del CASORATI sono redatti con somma accuratezza e con quel fine senso artistico di cui a torto taluno crede possa far a meno chi scrive di argomenti scientifici; essi si distinguono non solo per l'originalità delle idee e per la scelta dei metodi di cui la semplicità dissimula la potenza e la grandezza, ma anche per la scrupolosa esattezza nei dati bibliografici e storici; non solo per l'eleganza analitica, ma anche per la perfezione del dettato, per quella rara precisione, quella forza di espressione che sembra propria unicamente di chi domina completamente il proprio soggetto.

Una disamina completa e profonda di tutte le produzioni del nostro Matematico non troverebbe quì sede opportuna; ad essa del resto sarebbero impari le mie esigue forze; ma non debbo nè voglio passare sotto silenzio l'indicazione di alcuni almeno fra i concetti ivi sparsi che mi sembrano dotati di maggiore originalità e destinati a rimanere.

Farò cenno anzitutto di alcune idee emesse dal CASORATI ne' suoi verdi anni, quasi all' alba della sua carriera scientifica, e che gli offrirono il tema anche per parecchie fra le sue ultime publicazioni[3] (n[i] 5, 39, 40, 41, 43, 44). Egli, fin dal 1863 e per primo, osservò che il teorema di JACOBI affermante l'impossibilità di funzioni d'una sola variabile dotate di più di due periodi o anche di due soli periodi in rapporto reale ma incommensurabili fra loro,[4] deve interpretarsi in un senso più ristretto del consueto, applicarsi cioè unicamente alle funzioni aventi per ogni valore della variabile un numero finito di valori; in conseguenza Egli credette di propugnare l'introduzione nell'Analisi e consigliare lo studio delle funzioni periodiche credute a torto impossibili. Se non che il publico matematico — per ragioni che sarebbe assai malagevole indagare — rimase indifferente a questo invito; in conseguenza, diciannove anni più tardi Egli ritenne conveniente di ripeterlo con maggior insistenza sorreggendo le sue argomentazioni con nuove considerazioni (cito, come importante, quella delle superficie di RIEMANN ad infiniti strati) e con esempi più persuasivi in grazia del loro intrinseco

valore. E credo di non andare errato affermando che gli sforzi perseveranti del CASORATI ricevettero il premio che meritavano; dopo che WEIERSTRASS[5] prosciolse le funzioni a infiniti valori dall' ostracismo che sembrava gravare su di esse, esse devono considerarsi come facenti parte integrante dell' Analisi, e ci sembra sarebbe compiere un atto di semplice giustizia il chiamarle d'ora in poi col nome di *funzioni di Casorati.*

Dirò in secondo luogo dell' idea (v. la memoria n° 31; cfr. anche i n^i 33 e 34) di estendere al campo complesso l'ordinario Calcolo delle differenze finite, idea attuata col mezzo di parecchie interpretazioni delle formole proprie di questo calcolo. Nella prima e forse più importante di queste interpretazioni, alla variabile indipendente subentra la funzione $\log(x - x_1)$, ove x è la variabile indipendente e x_1 è il centro di una corona circolare, campo comune di tutte le funzioni considerate; alle costanti subentrano le *funzioni monotrope nella corona* (tali cioè che ripigliano lo stesso valore quando la variabile descrive nella corona un cammino chiuso). Mediante queste sostituzioni ogni teorema o formola concernente il Calcolo delle differenze finite o il suo inverso dà un teorema relativo a funzioni di variabili complesse. Le conseguenze alle quali in tal modo si giunge permettono di estendere o almeno porre sotto nuova luce teorie importanti già note; le frequenti citazioni fatte dall' autore coll'ordinaria sua scrupolosa precisione di scritti dovuti a PUISEUX, HERMITE, JORDAN, FUCHS, MITTAG-LEFFLER, PICARD e altri basterebbero da sole a mostrare che le ricerche in questione, lungi dal formare un gruppo isolato, vengono all' opposto ad allacciarsi con altre ben note su le equazioni differenziali e le funzioni periodiche; nè posso tacere come io abbia creduto ivi ravvisare l'influenza sul CASORATI esercitata dalle geniali ricerche sul calcolo delle operazioni che tanto occuparono i geometri inglesi verso la metà del nostro secolo.[6]

È mio obbligo arrestarmi dipoi sul primo lavoro del CASORATI relativo alla Geometria differenziale (n° 4), il cui scopo è di esporre un modo di trovare le equazioni fondamentali per lo studio di quelle proprietà delle superficie (chiamate dall' autore *assolute*) che non si perdono quando queste vengono trasformate per flessione; questo modo consiste nello studio metodico delle trasformazioni della forma differenziale quadratica rappresentante l'elemento lineare della superficie, studio fatto coll' intento precipuo di determinare quali funzioni dei coefficienti di questa forma godano (come la *curvatura integra* di GAUSS) di proprietà invariantive. Ora chi non ravvisa in questo modo l'indicazione

di quella via, riconosciuta poi come la più piana, diretta, generale epperò preferita dai più recenti e migliori espositori della Geometria differenziale, via che inoltre menò a tante capitali ricerche intorno alle proprietà delle forme differenziali quadratiche?

L'affinità di queste ricerche con altre di molto posteriori mi consiglia a far cenno qui degli scritti (n[i] 47 e 48), ove il Casorati si è occupato di una nuova definizione della curvatura delle superficie. Scambio di assumere, come Gauss, quale misura della curvatura di una superficie in un punto il prodotto

$$G = \frac{1}{R_1 R_2}$$

degli inversi dei raggi principali di curvatura, il nostro Autore assume la funzione

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

A quali critiche si presti la curvatura Gaussiana e quali ragioni militino a favore del cambiamento proposto, il lettore rileverà dai lavori originali: io mi limito qui a citare il più valido fra gli argomenti addotti, cioè che secondo la nuova definizione il piano appare come l'unica superficie di curvatura nulla in ogni punto, il che non accade giusta la definizione di Gauss. Che però quest' innovazione trovi degli oppositori, risulta da quanto il Casorati stesso asserisce nel secondo degli scritti in esame, e del resto è facile rendersene ragione osservando che, per quanto finora si sa, la nuova curvatura non possiede alcuna cospicua proprietà pari in importanza a quelle scoperte da Gauss nell' antica e che, adottandola, ad esempio un paraboloide ellittico e un paraboloide iperbolico con eguali sezioni principali avrebbero nei vertici la medesima curvatura. Quindi assai ragionevolmente il Casorati (nella seconda publicazione sull' argomento), dopo avere osservato come per conoscere appieno la curvatura di una superficie in un punto faccia mestieri conoscere *due* numeri (*due* funzioni simmetriche dei raggi principali di curvatura), fini per limitare i suoi desideri a vedere la curvatura C considerata assieme e posta allo stesso livello della curvatura G e della curvatura media

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Ma quanto più facilmente Egli avrebbe raggiunto il suo intento se avesse fatto conoscere quelle »ricerche di geometria nascenti

dall' esposto concetto di curvatura» e le »questioni di fisica e meccanica nelle quali la misura *C* si presenta naturalmente».

Poichè la deficienza di spazio esige che io sorvoli su altre produzioni di CASORATI, che pur meriterebbero onorevole menzione — ad esempio quella (n° 29; cfr. n° 46) in cui viene fatta conoscere una forma nuova sotto cui possono scriversi le equazioni degli asintoti di una curva algebrica, forma alla quale sarebbe doveroso concedere l'accesso in ogni esposizione delle applicazioni del Calcolo infinitesimale alla Geometria — osserverò in generale come Egli durante tutta la sua esistenza abbia preso parte attiva alle ricerche che successivamente interessarono la generalità dei matematici. Lo provano i suoi scritti provocati dalla *Theorie der Abel'schen Functionen* di CLEBSCH e GORDAN (ni 6, 10, 11) e dalle *Vorlesungen über Geometrie* di CLEBSCH (n° 24), nonchè le contribuzioni da lui arrecate alla moderna teoria delle equazioni differenziali (ni 16, 17, 20—23, 25—28, 30, 32—35, 37, ecc.) e le aggiunte da lui fatte alle investigazioni di WEIERSTRASS e MITTAG-LEFFLER sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa (n° 38). Lo provano eziandio gli argomenti da Lui scelti per i suoi corsi di Analisi superiore, fra i quali incontriamo la teoria delle funzioni uniformi con sostituzioni lineari in sè stesse, quando il POINCARÉ ne dimostrò luminosamente l'eccezionale importanza, e la teoria delle sostituzioni, quando una traduzione italiana della *Substitutionstheorie* del NETTO trasse dall'oblio e rimise in moda questa bella disciplina. Lo prova da ultimo il tema da Lui svolto nell' orazione che pronunziò il 4 Novembre 1873 nell' Università di Pavia in occasione della solenne inaugurazione dell' anno scolastico 1873—74.[7]

Se le memorie scientifiche del CASORATI hanno fatto apprezzare le sue non comuni doti di investigatore geniale nella stretta cerchia di persone che si dedicano per professione alle matematiche superiori, a divulgare la sua rinomanza di espositore e di erudito contribuì assai potentemente la famosa *Teorica delle funzioni di variabili complesse,* opera che, per dirlo con le parole di un grande scienziato,[8] »abilita a fare con tanta minor fatica e in un tempo incomparabilmente più breve quegli studj che prima erano giudicati fra i più ardui delle scienze matematiche»; giacchè ivi per la prima volta si trovano riunite in armonico connubio le ricerche compiute nella scuola di CAUCHY con quelle dovute a RIEMANN e ai suoi discepoli, connubio il quale produce una teorica di ammiranda simplicità ed eleganza. Però essa »non è soltanto una mirabile sintesi degli ultimi e grandiosi

progressi dell' Analisi, ma è eziandio un lavoro originale, sia per la nuova maniera di coordinare teorie di una sorprendente ampiezza, arduità ed importanza, sia per la novità di teoremi e d'ingegnosi concetti, dovuti alle proprie speculazioni dell'Autore».[9]

Sventuratamente quest' opera fu publicata soltanto in parte: un secondo volume doveva seguire quello che possediamo e contenere, fra l'altro, la teoria della superficie Riemanniane[10] e le memorabili richerche di Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni uniformi di una variabile complessa. Il Casorati, che fin dal 1868 ne aveva in parte preparati i materiali, continuò a lavorarvi (crediamo anzi che alcune sue posteriori scritture traggano l'origine loro da tale occupazione); ma, sia per non avere raggiunta quella forma di perfezione ideale da lui vagheggiata, sia pel desiderio di rimaneggiare completamente il primo volume, non si decisė mai a licenziarlo per la stampa. Tuttavia non è destituita di fondamento la speranza che, ove gli eredi dell' illustre Scienziato vogliano esaminare con pietosa cura i manoscritti esistenti, troveranno modo di rendere in pari tempo un segnalato servizio ai cultori dell' Analisi e un ultimo tributo d'affetto a Lui, col far sì che la *Teorica delle funzioni di variabili complesse* cessi di far parte della collezione (ahimé! troppo numerosa) di opere matematiche publicate incompiutamente. Con tal voto chiudo questi Cenni: ai quali vorrei infondere la virtù di spingere quei pochi che ancora non conoscono direttamente i lavori del Casorati a studiarli con quell' attenzione di cui essi sono tanto degni!

[1] Gli è appunto a questo periodo che appartiene quel corso parallelo di lezioni che nell' anno scolastico 1868—1869 fu dato da Brioschi, Cremona e Casorati sulla Teoria delle funzioni ellittiche e abeliane, nelle quali tale teoria fu svolta risp. secondo i concetti di Jacobi, di Clebsch e Gordan, e di Riemann. Rimandando il lettore per più minuti ragguagli all accurata *Relazione* fatta su tale corso da A. Armenante e G. Jung (Giornale di matematiche 7, 1869, 224—234), ci limitiamo a far noto come il Casorati abbia diviso le proprie lezioni in tre gruppi; trattando nel primo delle funzioni monodrome nel modo adottato nella sua *Teorica delle funzioni di variabili complesse,* nel secondo delle funzioni polidrome dal punto di vista propugnato dal Puiseux, nel terzo delle superficie di Riemann e degli integrali Abeliani.

[3] A sostegno di alcune asserzioni del testo, credo opportuno riportare le seguenti parole del Prof. G. COLOMBO, persona, per la competenza tecnica e l'amicizia col CASORATI, più d'ogni altra in grado di pronunciarle: »Io aveva creduto per diversi indizii di riscontrare in lui una grande attitudine ad alleare la scienza pura alle questioni che presenta la pratica: attitudine della quale sono un esempio i suoi studi sugli strumenti ottici; e allora, convinto che il primo bisogno di una scuola d'ingegneri sia di impartire l'insegnamento scientifico in un grado elevato bensì, ma sempre coll' occhio alle applicazioni della pratica, lo aveva eccitato a studiare la meccanica applicata alle macchine, per preparare un corso di teoria di macchine, che Egli, colla sua grande coltura scientifica, avrebbe potuto svolgere magistralmente. Egli aveva accolto con entusiasmo l'idea e si era già accinto con ardore a questo studio, così nuovo per lui, quando fu richiamato al patrio Ateneo; ma io non ho alcun dubbio che egli, se avesse potuto continuare in quell' indirizzo, avrebbe potuto raggiungere nella scienza applicata quella stessa altezza che toccò nella scienza pura» (*Discorsi pronunciati ai funerali di Felice Casorati*, Pavia 13 Settembre 1890; p. 9).

[3] I numeri in parentesi si riferiscono sempre all' Elenco delle publicazioni dato qui appresso.

[4] Lo si legge nella celebre memoria intitolata *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.* (Journ. für Mathem. **13**, 1832).

[5] K. WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Funktionentheorie* (Berlin 1886), p. 182, nota.

[6] Cfr. in particolare parecchi dei *Mathematical writings of* D. F. GREGORY (Cambridge 1865) e specialmente la memoria intitolata *Demonstrations of theorems in differential calculus and calculus of finite differences.*

[7] Il soggetto di questo discorso era duplice: anzitutto il CASORATI parlò piuttosto lungamente del BORDONI, e poscia, traendo occasione dai lavori geometrici di questo, delle più recenti indagini geometriche e in particolare della Geometria non-euclidea. Questo discorso non fu publicato, nè completamente nè in frammenti, e non se ne è rinvenuta alcuna traccia neppure fra le carte dell' Estinto; da esso venne estratto uno studio sul BORDONI che venne offerto al BRIOSCHI in occasione del suo giubileo. Queste notizie mi furono

communicate colla loro consueta cortesia dai Professori Beltrami e G. A. Maggi.

[8] Cremona, Rendiconti del r. Istituto Lombardo, $\mathbf{1}_2$, 1868, p. 424.

[9] Cremona, l. c. p. 421.

[10] Per persuadersi quanta luce proietterebbe il II volume della *Teorica* su questo importante argomento, basta riflettere che al Casorati si deve l'idea ingegnosissima di riguardare una superficie di Riemann come un sistema di reti d'indefinita finezza sovrapposte, idea che toglie gran parte delle difficoltà che offre il concepire che i diversi strati si attraversino.

Elenco delle publicazioni scientifiche di Felice Casorati.

1. Intorno la integrazione delle funzioni irrazionali. (Annali di scienze matematiche e fisiche **7**, 1856.)
2. Sulla trasformazione delle funzioni ellittiche. (Annali di sc. matem. e fis. **8**, 1857.)
3. Intorno ad alcuni punti della teoria dei minimi quadrati. [Incompleto.] (Annali di matematica **1**, 1858.)
4. Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve. (Ann. di matem. **3**, 1860; **4**, 1861.)
5. Sur les fonctions à périodes multiples. (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] 21 Dicembre 1863; 11 e 25 Gennajo 1864.)
6. Alcune riflessioni relative alla teoria generale delle funzioni di variabili affatto libere, ossia complesse. (Rendiconti del r. Istituto Lombardo **3**, 1866.)
7. Un teorema fondamentale nella teorica delle discontinuità delle funzioni. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{1}_2$, 1868.)
8. Sopra la determinazione delle alterazioni nei valori di somme e prodotti infiniti, dovute ad alterazioni nell' ordine di addizione e moltiplicazione dei termini o fattori. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{1}_2$, 1868.)
9. Teorica delle funzioni di variabili complesse. Vol. 1. Pavia, Tip. Fusi 1868.
10. Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali Abeliani di prima specie. (Ann. di matem. $\mathbf{3}_2$, 1869.)

[redacted]

11. Intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere. [Assieme al CREMONA.] (Rend. del r. Istituto Lombardo 2_2, 1869.)

12. Ricerche e considerazioni sugli strumenti ottici. (Rend. del r. Istituto Lombardo 5_2, 1872.)

13. Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati. Milano, Tip. Bernardoni 1872.

14. Teoria, descrizione ed uso di alcuni strumenti topografici a riflessione. Milano, Tip. Bernardoni 1872.

15. Alcuni teoremi sui determinanti. (Memorie del r. Istituto Lombardo 4_3, 1874.)

16. Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e 2° grado tra due variabili ad integrale generale algebrico. (Rend. del r. Istituto Lombardo 7_2, 1874, oppure Annali di Matematica 7_2, 1876. Fu anche tradotta in francese e publicata nel Bulletin des sciences mathém. 3_2, 1879.)

17. Sulla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali. (Rend. del r. Istituto Lombardo 8_2, 1875.)

18. Sulla regola seguita da Bessel e dal Sig. Generale Baeyer, durante la misura del grado nella Prussia Orientale per osservare gli angoli orizzontali senza correggere continuamente la linea di collimazione e l'asse di rotazione del cannocchiale del teodolite. (Atti della r. Accademia dei Lincei 2_2, 1875.)

19. Sui determinanti di funzioni. (Rend. del r. Istituto Lombardo 8_2, 1875.)

20. Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di 1° ordine e 2° grado tra due variabili. (Atti della r. Accademia dei Lincei 8_2, 1876. Fu anche tradotta in francese e publicata nel Bullet. des sciences mathém. 3_2, 1879.)

21. Sulle soluzioni singolari delle equazioni alle derivate parziali. (Rend. del r. Istituto Lombardo 9_2, 1876.)

22. Ricerche sulle equazioni differenziali a primitiva generale algebrica. (Memorie della r. Accademia dei Lincei 1_3, 1877.)

23. Nota concernente le equazioni differenziali. (Rend. del r. Istituto Lombardo 10_2, 1877.)

24. Sulle coordinate dei punti e delle rette nel piano, dei punti e dei piani nello spazio. (Rend. del r. Istituto Lombardo

10$_2$, 1877. Ne fu publicata una traduzione francese nelle Nouvelles annales de mathématiques **17**$_2$, 1878.)

25. Sulle condizioni alle quali deve soddisfare una primitiva, affinchè il grado della corrispondente equazione differenziale, rispetto alle variabili, riesca minore del normale. (Rend. del r. Istituto Lombardo **10**$_2$, 1877.)

26. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado per mezzo di funzioni lineari. (Rend. del r. Istituto Lombardo **11**$_2$, 1878.)

27. Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali. (Ann. di matem. **9**$_2$, 1878.)

28. Nota concernente la teoria delle soluzioni delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e 2° grado. (Memorie della r. Accademia dei Lincei **3**$_3$, 1879.)

29. Nuova e migliore forma delle equazioni degli assintoti di una linea piana algebrica. (Rend. del r. Istituto Lombardo **12**$_2$, 1879.)

30. Sull' equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari. (Rend. del r. Istituto Lombardo **13**$_2$, 1880.)

31. Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa. (Ann. di matem. **10**$_2$, 1880, oppure Memorie della r. Accademia dei Lincei **5**$_3$, 1881.)

32. Una formola fondamentale concernente i discriminanti delle equazioni differenziali e delle loro primitive complete. (Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, 1881.)

33. Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. (Comptes rendus etc. **92**, 1881.)

34. Sopra un recentissimo scritto del Sig. L. Stickelberger. (Ann. di matem. **10**$_2$, 1881. Tradotto anche in francese e publicato a parte dall' autore, Pavia, Tip. Fusi 1881.)

35. Generalizzazione di alcuni teoremi dei Sig^{ri} Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, sulle equazioni differenziali lineari di 2° ordine. (Ann. di matem. **10**$_2$, 1881.)

36. Osservazioni sui modi comunemente usati nella trattazione di parecchie questioni fondamentali dell' analisi infinitesimale. (Memorie della r. Accademia dei Lincei **5**$_3$, 1881.)

37. Sulle equazioni differenziali lineari. (Memorie della r. Accademia dei Lincei **6**$_3$, 1882.)

38. Aggiunte a recenti lavori dei Sig[ri] Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. (Ann. di matem. $\mathbf{10}_2$, 1882.)
39. Sulle funzioni analitiche. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{15}_2$, 1882.)
40. Sopra il teorema di Jacobi risguardante la periodicità e sopra l'illegittimità di una parte delle conseguenze che ne furono dedotte. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{15}_2$, 1882.)
41. La periodicità multipla nelle funzioni di una sola variabile. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{16}_2$, 1883.)
42. Sopra alcuni discriminanti. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{18}_2$, 1885.)
43. Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. (Acta mathematica **8**, 1886.)
44. Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2[e] et 3[e] espèce. (Acta mathematica **8**, 1886.)
45. Sopra les »coupures» del sig. Hermite, i »Querschnitte» e le superficie di Riemann, ed i concetti di integrazione si reale che complessa. I: Querschnitte, coupure e superficie riemanniana rappresentativa di funzione algebrica. II: Rami di un integrale definito, considerato come funzione di un parametro, e superficie rappresentativa di questa funzione. [Incompleto.] (Ann. di matem. $\mathbf{15}_2$, 1887, $\mathbf{16}_2$, 1888.)
46. Su gli assintoti delle linee piane algebriche. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **3**, 1889.)
47. Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss. (Rend. del r. Istituto Lombardo $\mathbf{22}_2$, 1889.)
48. Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure gaussienne et moyenne. (Acta mathematica **14**, 1890.)

Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas.

Par D. Bierens de Haan à Leiden.

Comme les sciences mathématiques, tant pures qu'appliquées, ont été cultivées aux Pays-Bas avec beaucoup de zèle et assez de fruit,* il n'est pas surprenant que l'histoire de ces sciences y a été aussi l'objet de nombreuses recherches. Pour me conformer au plan adopté dans les notices sur l'étude de l'histoire des mathématiques publiées jusqu'à présent dans la Bibliotheca Mathematica, je me suis restreint, dans la liste suivante, aux écrits se rapportant exclusivement ou au moins essentiellement à l'histoire des mathématiques pures. Outre ces écrits, il y a aussi des ouvrages plus généraux contenant des notices sur l'histoire des mathématiques, p. ex. ceux de N. G. van Kampen (*Beknopte geschiedenis der letteren en wetenschappen in de Nederlanden,* I—III; Haarlem 1811—1826), H. Baron Collot d'Escury (*Hollands roem in kunsten en wetenschappen,* I—VII; Amsterdam 1824—1844) et J. P. van Cappelle (*Bijdragen tot de geschiedenis der natuurkunde bij de ouden,* Haarlem 1815; *Bijdragen tot de geschiedenis der wetenschappen en letteren in Nederland,* Amsterdam 1821; *Nagelaten bijdragen tot natuurkunde en geschiedenis,* Haarlem 1831).

Conformément au plan adopté, j'ai laissé de côté les éditions des Eléments d'Euclide par Fr. van Schooten (1663), C. Melder (1673), C. J. Vooght (1695), P. Warius (1704; beaucoup de réimpressions), P. van Musschenbroek (1725), J. H. van Lom (1735), C. G. Koenig (1750), A. Kuyper (1758), J. J. Blassière (1762), P. Steenstra (1765; beaucoup de réimpressions jusqu'à 1825) et L. J. de Puyt (1784), parce que ces éditions avaient essentiellement un but pédagogique. Encore, comme les biographies de Christiaan Huygens ont plutôt rapport à ses télescopes et à son horloge à pendule, j'ai aussi omis les mémoires respectives de van Swinden (1813), Lemans (1820), van Beek (1821), Moll (1831), Uylenbroek (1840), Geelhoed (1852), Harting (1860, 1868, 1869, 1878) et Oudemans (1884).

* Comparez ma *Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants sur les sciences mathématiques et physiques,* indiquée ci-après sous l'année 1881.

A la fin j'ai ajouté une liste de biographies de mathématiciens néerlandais; en effet, ces écrits peuvent en quelque sorte entrer aussi dans le cadre de cette notice, bien que leur but n'ait pas été en premier lieu historique.

1667.

Camerarius, J, Explicatio in Nicomachi Geraseni libros ad scientiam numerorum. Cum notis S. T[ennulii] in Arithmeticam Jamblichi. Daventriae 1667. 4°.

Tennulius, S., Notae in librum quartum Jamblichi Chalcidensis de arithmetica Nicomachi introductione. Daventriae 1667.
4°, 239 p.

1668.

Tennulius, S., Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem, et de Fato. Arnhemi 1668.
4°, XIII + 176 p.

1763.

Fas, J. A., Intreerede over de heilzaame oogmerken van Prins Maurits van Nassau in het oprechten van het leeraarsampt in de nederduitsche wiskunde in's lands hoogeschool te Leyden. Leyden 1763.
4°, IV + 28 p.

1768.

Rossyn, J. Th., De mathematicis Belgarum ingeniis. Harderwijk 1768. 4°.

1782.

Strabbe, A. B., Historie der wiskunde van Montucla. I—IV. Amsterdam 1782—1804. 8°.

1805.

Iets omtrent John Pell of Johannes Pellius, eerst hoogleeraar in de wiskunde te Amsterdam, daarna te Breda.
Schouwburg van in- en uitl. Letterk. 1, 1805, 89—92.

1809.

Ekama, C., Oratio de Frisia, ingeniorum mathematicorum imprimis fertili. Leovidii 1809.
4°, 64 p.

1826.

Moll, G., Bijdragen tot de geschiedenis der wiskundige wetenschappen in Nederland. 1826.
8°, 56 p.

Roos Bzn., H., Simon Stevin. 1826.
8°, 14 p.

1827.

de Gelder, J. J., Theonis Smyrnaei Platonici Expositio earum quae in arithmeticis ad Platonis lectionem utilia sunt. Lugduni Batavorum 1827.
8°, XIV + LXXII + 194 p.

1833.

Uylenbroek, P. J., Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII. exercitationes mathematicae. I—II. Hagae Comitum 1833. 4°.

1844.

Dodt van Flensburg, J. J., Letterkundige aanteekeningen aangaande den twist tusschen Simon van der Eycken, Ludolf van Ceulen en Adriaan Anthonisz, over de leer van den cirkel. 1844.
8°, 16 p.

1846.

Rammelman Elsevier, W. J. C., Over Mr. Ludolf van Ceulen, als schermmeester en hoogleeraar in de wiskunde te Leyden.
Utrecht, Histor. genootschap, Kronijk **2**, 1846, 351—389.

Verdam, G. J., Geschiedkundige aanteekening betreffende de algemeene oplossing van derde magts-vergelijkingen. Amsterdam 1846.
8°, 16 p.

1847.

Teding van Berkhout, J. J., Over het geboortejaar van den nederlandschen wiskundige Willebrord Snellius.
Alg. Konst. en letterb. (Haarlem) 1847_1, 4—7.

Dodt van Flensburg, J. J., Geboorte- en sterfjaar van den hoogleeraar Willebrord Snellius.
Utrecht, Histor. genoots., Kronijk 1847, 14.

Dodt, Simon Stevin.
Alg. letterk. maandschr. 1847_2, 313—316.

1848.

de Meester, Over Simon Stevin, David Orliens, Mr Adriaan Anthonissen, Jan Adriaanszn, Leeghwater, ingenieur en Johan Scorel, schilder.
Utrecht, Histor. genoots., Kronijk 1848, 137—138.

1852.

Enschedé, W. A., Oratio de Johanne Bernouillio, eximio mathematico. Lugduni Batavorum 1852.
4°, 30 p.

1854.

Wassenbergh, A., Beroemde Friesche wiskundigen.
Nieuwe Friesche volks-alman. 1854, 76—96.

1860.

Fokker, A. A., Philippus Landsberger en zijn zonen Pieter en Jacob. Bijdrage tot hun leven. Middelburg 1860.
8°, 49 p.

Evertsz, N. A., Friesche wiskundigen.
Nieuwe Friesche volks-alman. 1860, 3—16.

1861.

Klynsma, S. F., Biographisch woordenboek. Levensberichten van wis-, natuur- en sterrekundigen. I. Amsterdam 1861.
8°, IV + 120 p.

1862.

Bierens de Haan, D., Iets over logarithmentafels.
Amsterdam, Akad. van wetensch., Versl. en mededeel. (Afd. Natuurk.) **14**, 1862, 15—94.

1868.

Vorsterman van Oijen, G. A., Notice sur Ludolphe van Colen.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **1**, 1868, 141—156.

van Toorenenbergen, A., Dr. Bernard Nieuwentijd in de lijst zijnes tijds.
Stemmen voor waarheid en vrede 1868, 436—466.

Harting, P., Kaiser & J. Bosscha, Rapport à l'Académie royale des sciences. Amsterdam 1868.
8°, 24 p. — Ce rapport traite de la correspondance postiche entre Chr. Huygens et Galilei, que Chasles avait fournie à l'Institut de France.

Vorsterman van Oijen, G. A., Eine historische Bemerkung.
Zeitschr. für Mathem. **14**, 1869, 22—25.

1869.

van der Baan, Philippus en Petrus Lansbergen. 1869.
8°, 25 p.

Schönfeld, K. D., Cartesius als wiskundige. Groningen 1869.
8°, 50 p.

1870.

Vorsterman van Oijen, G. A., Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVI[e] et du commencement du XVII[e] siècles, et leurs instruments.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **3**, 1870, 323—376.

1873.

Boeles, W. B. S., A. Metius. Bibliographie.
Bibliographische adversaria **1**, 1873, 229—232.

Bierens de Haan, D., Notice sur des tables logarithmiques hollandaises.
Bullett. di bibl. d. sc. matem. **6**, 1873, 203—238.

Harting, P., Twee verdienstelijke Nederlanders, A. Vlacq en E. de Decker, door een Engelschman herdacht.
Album der natuur 1873, 115—119.

Bierens de Haan, D., Iets over twee verdienstelijke Nederlanders, A. Vlacq en E. de Decker.
Album der natuur 1873, 158—160.

de Graaf, A. C., Nog iets over twee verdienstelijke Nederlanders, A. Vlacq en E. de Decker.
Album der natuur 1873, 251—256.

Bierens de Haan, D., On Ludolph van Ceulen's 35-decimal value of π and on some of his works.
Messenger of mathem. $\mathbf{3}_2$, 1873, 24—26.

1874.

Bierens de Haan, D, Notice sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas.
Bullett. di bibl. d. sc. matem. **7**, 1874, 99—140.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. I. Overbrenging der Briggiansche logarithmen op het vasteland door Nederlanders, Adriaan Vlack en Ezechiel de Decker. — III. Adriaan Vlack en zijn logarithmentafels. — IV. Proeven eener lijst van hollandsche logarithmentafels. — V. Voorlooper der stereotyp-uitgaaf van Logarithmentafels. — VI. De logarithmen van Adolph Frederik Marci. Het

Gezelschap der Konst-rekenaars in Hamburg. — VII. Simon van der Eycken. — VIII. Ludolph van Ceulen. — IX. W. Snellius, Ph. Lansbergen, Christ. Huygens over Ludolph van Ceulen. — X. Cornelis van Nienrode. — XI. De Logarithmen van Dirk Rembrandtz van Nierop, J. Wolfram, W. O. Reitz, H. H. Reitz en D. Klinkenberg. — XII. Adriaan Anthonisz. — XIII. Handschrift van Franciscus van Schooten. — XIV. Josephus Scaliger J. C. fil. als cirkel-quadrator. — XV. Adriaan van Roomen. — XVI. Jacob Marcelis, Daniel Waeywel en Gelis Bovy. — XVII. Twee brieven van Ludolph van Ceulen. — Nalezingen op N° I—XVII. — Lijst van beschreven of aangehaalde boeken. — XVIII. Martinus Carolus Creszfeldt. — XIX. Eerste gebruik der isohypsen door nederlandsche ingenieurs, N. S. Cruquius, M. Bolstra. — XXI. Cornelis Sackersz. van Leeuwen, Abraham de Graaf. — XXIII. Cornelis Sackersz. van Leeuwen, Claes Heyndericksz. Gietermaker, Christian Martinii Anhaltin. — XXIV. Twee zeldzame werken van Benedictus Spinosa. — XXV. De Thiende, Simon Stevins werken. — XXIX. Wetenschappelijke inventaris van R. des Cartes. — XXX. Jan Jansz. Stampioen en Jacob a Wassenaer. — Nalezingen op N° I—XVII, XVIII—XXX. — Korte Levensberichten. — Lijst der aangehaalde of beschreven boeken.

Amsterdam, Akademie van wetensch., Versl. en mededeel. $\mathbf{8}_2$, 1874, 57—81, 163—199, 200—203, 204—223; $\mathbf{9}_2$, 1876, 1—40, 90—112, 322—370; $\mathbf{10}_2$, 1876, 161—179, 180—185, 186—206; $\mathbf{12}_2$, 1878, 1—35, 36—61, 62—96, 97—108, 109—117, 118—126, 127—142, 143—160; $\mathbf{14}_2$, 1879, 180—187; $\mathbf{16}_2$, 1881, 1—27; $\mathbf{18}_2$, 1883, 218—276; $\mathbf{19}_2$, 1884, 1—38, 78—84, 249—295; $\mathbf{1}_3$, 1885, 234—244; $\mathbf{3}_3$, 1887, 65—67, 68—78, 79—81, 82—96.

1875.

Bierens de Haan, D., Iets over de quadratuur van Simon van Eycke en hare gevolgen.

Nieuw arch. voor wisk. **1**, 1875, 70—86, 206—211.

Bierens de Haan, D., Tweede Ontwerp eener naamlijst van logarithmentafels, met de opgave van den tijd, de plaats en de grootte, almede van het aantal decimalen, alles zoo verre bekend.

Amsterdam, Akad. van wetensch., Verhandelingen (Afd. Natuurk.) **14**, 1875, 1—35.

1876.

Amersfoordt, J. P., Jan Pieterszon Dou. Amsterdam 1876. 4°, 8 p.

1877.

Bierens de Haan, D., Iets over de tweede-machtswortel uit eene vierledige wortelgrootheid.
Nieuw arch. voor wisk. **3**, 1877, 208—210. — Note historique.

1878.

Bierens de Haan, D., Notice sur un pamplet mathématique hollandais intitulé: »Bril voor de amsterdamsche belachelijke geometristen. Amsterdam 1663».
Bullett. di bibl. d. sc. matem. **11**, 1878, 383—452.

1879.

Matthes, C. J., Feestrede ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide Arbeid komt alles te boven». Amsterdam 1879.
8°, 31 p.

Rijke, P. L., Levensbericht van Willem Jacob s'Gravesande.
Album der natuur 1879, 65—88.

1881.

van Geer, P., Jean Henri van Swinden. Schets van zijn leven en werken.
Album der natuur 1881, 1—22 + portr.

Bierens de Haan, D., Bibliographie Néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés au 16ᵉ, 17ᵉ et 18ᵉ siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications.
Bullett. di bibl. d. sc. matem. **14**, 1881, 519—630, 677—718; **15**, 1882, 225—312, 355—438.

1882.

Logeman, W. H., Petrus van Musschenbroek. Een Levenschets.
Album der natuur 1882, 33—80 + portr.

1883.

van Geer, P., Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius.
Arch. néerl. d. sc. exactes (Haarlem) **18**, 1883, 453—468.

1884.

Oudemans, J. A., Het problema van Snellius opgelost door Ptolemaeus.
Amsterdam, Akademie van wetensch., Versl. en mededeel. $\mathbf{19}_2$, 1884, 436—441.

van Geer, P., Levensbericht van Willebrordus Snellius.
Album der natuur 1884, 1—17.

van Geer, P., Het geboortejaar van Willebrordus Snellius.
Album der natuur 1884, 121—124.

De Boer, F., De wiskunde der Indiers. Leiden 1884.
8°, 31 p.

Bierens de Haan, D., Twee zeldzaame werken van Benedictus Spinoza.
Nieuw arch. voor wisk. **11**, 1884, 49—82.

Bierens de Haan, D., Een uiterst zeldzaam werk van Albert Girard:
»Invention Nouvelle en l'Algèbre».
Nieuw arch. voor wisk. **11**, 1884, 83—152.

1887.

Bierens de Haan, D., Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantijn Huygens.
Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abth. 161—173.

Van Dorsten, R. H., Inleiding op eene geschiedenis van de leer der kegelsneden in de oudheid. Rotterdam 1887.
4°, 39 p.

1888.

Oeuvres complètes de CHRISTIAN HUYGENS publiées par la société hollandaise des sciences. Correspondance. I—III. La Haye 1888—1890.
4°. — I: XIV + 621 p. — II: (6) + 638 + (1) p. + 2 facsim. — III: (6) + 591 + (2) p. + 2 facsim. — La »Correspondance» remplira probablement neuf volumes.

Liste de notices biographiques sur des mathématiciens néerlandais.

ZACCHAEUS, G., Oratio in obitum Willebrordi Snellii 4 Nov. 1626. Lugd. Bat. 1626. 4°, 22 + (10) p.

WINSEMIUS, M., Oratio funebris in obitum Adr. Metii. Franeq. 1636. 4°, 64 p.

TENNULIUS, S., Elogia in obitum Francisci Scoleni. Daventriae 1667. 4°.

BRUGMANS, A., Elogium Nicolai Engelhard. Groningae 1766. 8°, 16 p.

BRUGMANS, A., Elogium Nic. Engelhard. (Pro Excol. **1**, 1773, p. 537.)

VAN NUYS KLINKENBERG, J., Oratio funebris in obitum Petri Curtenii. Amsterdam 1790. 4°, IV + 46 p.

VAN SWINDEN, J. H., Lijkrede op Pieter Nieuwland. Amsterdam 1795. 8°, VIII + 172 p.

TE WATER, J. W., Levensberigt van Jan Frederik van Beeck-Calkoen. (Konst- en Letterb. 1811_2, p. 180.)

Levensschets van Gerrit Hesselink. (Konst- en Letterb. 1812_1, p. 326.)

Levensschets van Johan Frederik Hennert. (Konst- en Letterb. 1814_1, p. 198.)

VERBURG, J., Vitae Ladislai Chernac. Groningae 1817. 4°, 12 p.

VERBURG, J., Levensberigt van Ladislaus Chernac. (Konst- en Letterb. 1817_2, p. 211.)

KAPPEYNE VAN DE CAPPELLO, J., Prolusio scholastica in Memoriam Abrahami van Bemmelen. Hagae Com. 1822. 8°, 14 p.

LEMANS, M., Lijkrede op J. H. van Swinden. 1823. 8°, 31 p.

Schets eener beschrijving van het leven en de geschriften van Jean Henri van Swinden. Amsterdam 1823. 8°, 16 p.

BROUWER, J., Hulde aan de nagedachtenis van J. H. van Swinden. (Vad. Letteroef. 1823_2, p. 249.)

Hulde aan de nagedachtenis van Jean Henri van Swinden. Amsterdam 1824. 8°, 122 p. + portr.

ROOS, J. BZN., Pieter Nieuwland. 1824. 8°, 20 p.

MOLL, G., Redevoering over Jan Hendrik van Swinden. Amsterdam 1824. 8°, 79 p.

VAN COPPENAAL, D., Jean Henri van Swinden. 1825. 8°, 18 p.

ROOYAARDS, H. J., Levensberigt van Joh. Fredr. Lod. Schröder. 1826. 8°, 48 p.

VAN PEYMA, W., Levensberigten van Arjens Roelofs Roelofsz. Franecker 1829. 8°, VIII + 159 p.

MEETER PZ, A., Levensbijzonderheden van Obe Sikkes Bangma. (Fr. Volks-Alman. 1832, p. 67.)

LOBATTO, R., Iets over Johan Pieter Bourjé. (Konst- en Letterb. 1834_2, p. 179.)

VAN REES, R., Berigt aangaande het leven en de wetenschappelijke verdiensten van G. Moll. (Konst- en Letterb. 1838_2, p. 83).

VAN REES, R., Levensberigt van Gerrit Moll. 1839. 8°.

VISSCHER, L. G., Oratio de Gerardo Moll. Hagae-Comitis 1840. 4°, 40 p.

HERMANS, C. R., Levensberigt van Jan Esdré. (C. R. HERMANS, Geschiedk. Mengelwerk. I, 1840, p. 273.)

LAUTZ, H. G., Dirk Rembrandtsz. van Nierop. (Bev. v. Zeevaartk. 1843, p. 330.)

SWART, J., Iets over Abraham Cornelis Hazewinkel van Veendam. 1843. 8°, 14 p.

VAN DER HOEVEN, J., Levensschets van P. J. Uylenbroek. (Konst- en Letterb. 1845, p. 18.)

VERDAM, G. J., Leven van J. de Gelder. Haarlem 1848. 8°, 86 p.

OUDEMANS, J. A., Levensberigt van J. de Gelder. 1849. 8°, 18 p.

BRADE, H., Monument voor J. C. Pilaar. Amsterdam 1852. 8°.

Levensberigt van Seerp. Brouwer. (Konst- en Letterb. 1856, p. 308.)

Johannes George Arbon, 1786—1857. Amsterdam 1857. 8°.

MATTHES, C. J., Levensberigt van Rehuel Lobatto. Amsterdam 1866. 8°, 15 p.

VAN KETWICH, D., J. Swart 1796—1866. Amsterdam 1866. 8°, 8 p.

BURGER, C. P., Nekrologie van Rehuël Lobatto. (Ned. Spect. 1866, p. 66.)

BIERENS DE HAAN, D., Nekrologie van Verdam. (Ned. Spect. 1866, p. 379.)

MATTHES, C. J., Levensberigt van Gideon Jan Verdam. Amsterdam 1867. 8°, 13 p.

DOUWES, J., De wijsgeer J. F. L. Schröder. Groningen 1870. 8°, XVI + 275 p.

Levensbericht van J. Badon Ghyben. (Milit. Spect. 1870, p. 231.)

MATTHES, C. J., Levensberigt van J. Badon Ghyben. Amsterdam 1873. 8°, 8 p.

BUYS BALLOT, C. H. D., Levensschets van Rijk van Rees. 1876. 8°, 28 p.

BIERENS DE HAAN, D., Levensschets van Carl Johannes Matthes. Amsterdam 1882. 8°, 14 p.

VAN LANKEREN MATTHES, D., Carel Johan Matthes. Haarlem 1882. 8°, 8 p. + port.

BOSSCHA, J., Martinus van Marum. (Album der natuur 1888, p. 1.)

Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica.

Cenno di Antonio Favaro in Padova.

Già fin da quando io diedi per la prima volta alla luce le mie *Lezioni di statica grafica*,[1] ebbi cura di raccogliere in apposite note relative ad ogni singolo argomento quei cenni con i quali, come in ogni altra occasione, mi studio di risvegliare e di mantenere nei miei scolari l'amore per le indagini di storia scientifica, togliendo in pari tempo all' esposizione didattica quel carattere dogmatico che fa sparire il lungo e penoso lavoro di mosaicista, mercè il quale la scienza potè costituirsi nell' attuale suo assetto.

A queste note ho dato uno sviluppo anche maggiore, allorquando ne fu pubblicata la traduzione francese, e rispetto alla spirale logaritmica io avvertiva:[2]

> On trouve les premières notions sur cette courbe dans la Mécanique de Descartes et dans une lettre de ce savant, écrite en 1638 (t. I, n° 73). Descartes remarque, à propos des plans inclinés, que les directions des graves concourent toutes en un point situé à distânce finie; que par suite, si le plan incliné est un plan véritable, les angles qu'il forme avec ces directions concourantes n'étant pas égaux entre eux, les charges ou actions relatives aux divers points du plan ne seront pas non plus égales entre elles. Il faudrait alors, suivant l'expression de Descartes, qu'on imaginât, au lieu d'un plan, une portion de spirale ayant son pôle au centre de la terre. Le P. Mersenne ayant demandé des explications sur la nature de cette courbe, Descartes lui répondit (*Lettre* 74) qu'une de ses propriétés caractéristiques était que les tangentes en tous ses points formassent des angles égaux avec les droites menées de son centre au point de contact. (Voir Montucla, *Histoire des Mathématiques*, 2e édit., t. II, p. 45—46; Paris, 1799). La spirale équiangle a été plus tard l'objet d'une étude toute spéciale de la part du jésuite Nicolas. (Voir ses deux Mémoires intitulés *De novis spiralibus exercitatio geometrica;* Tolosae 1693, et *De lineis spiralibus logarithmicis;* Tolosae 1692).— On trouve aussi des matériaux pour l'étude de cette courbe dans Wallis (*Opera mathematica*, t. I, p. 260) et dans Barrow (*Lect. geometricae*, p. 124).

Ora pertanto mi par degnissimo d'esser notato a tale proposito il luogo d'una lettera di GIOVANNI COLLINS all' OLDENBURG, segretario della Società Reale di Londra, sotto il dì 30 Settembre 1675, nella quale, dopo aver detto d'uno strumento inventato dallo TSCHIRNHAUSEN per dividere un angolo in un dato rapporto, soggiunge:

. . . here I will a little enlarge on the use of M. TSCHIRNHAUS's invention. We have an instrument called the serpentine line, or, as OUGHTRED terms it, the circles of proportion, in the use whereof, in relation to compound interest, it is often required to divide an angle *in ratione data*, or, an angle being given, to enlarge it *in ratione data*. Moreover, conceive the eye at the south pole, projecting the loxodromia or rumb of a ship's course on the earth, on a plane touching the sphere at the north pole, the projected curve will be a spiral line, in which, if the polar rays PE, PD, PC, PÆ, make equal angles at the pole P, those rays will be in continual geometrical proportion; and conceiving a circle described upon P as a centre, the equal segments of the arch in the circumference, made by the polar rays, will be an arithmetical progression, suited to a geometrical one; consequently the spiral line is a logarithmic curve; and from hence the meridian line of the true sea chart may be demonstrated to be a line of logarithmic tangents, and the spiral line, with M. TSCHIRNHAUS's angular instrument, makes the mesolabe, which our late learned OUGTHRED said was hitherto *tenebris involutum*. — To rectify or straighten this spiral, or part of it, as EÆ, is all one effect as to draw a touch line to it, or to find the rumb between two places whose latitudes and difference of longitude are given; which to perform in lines is a proposition of great use, and hitherto wanting in navigation, and depends on the quadrature of the hyperbola, as Dr BARROW, at my instance, proved in his Geometrical Lectures. Moreover such a spiral, being once well described, may serve to take away the use of compasses in GALILEUS or our GUNTER's sector or joint for proportions, all which I thought not impertinent to hint.»

Per quanto è a noi noto, quest' ultima applicazione in particolare, segnalata così chiaramente da oltre due secoli, non s'è fatta strada se non in questi ultimi tempi, insieme con i moderni procedimenti di calcolo grafico.

La lettera, della quale abbiamo voluto riprodurre il lungo squarcio surriferito, appartiene ad un carteggio scientifico del

secolo decimosettimo dato in luce or sono cinquant' anni,[3] ed io confesserò francamente, che, non tanto mi sono indotto a prender nota di questo particolare storico per la importanza di esso, quanto per richiamare l'attenzione degli studiosi di storia scientifica sopra questa pubblicazione, la quale mi sembra contenere una miniera inesplorata di notizie fornite da scienziati che rispondono ai nomi di BARROW, BORELLI, BRIGGS, COTES, FERMAT, FLAMSTEED, GASCOIGNE, GREGORY, HALLEY, HOOKE, HUYGENS, NEWTON, OUGHTRED e WALLIS.

[1] *Lezioni di Statica Grafica* per ANTONIO FAVARO. Padova, prem. tip. edit. F. Sacchetto, 1877.

[2] *Leçons de Statique Graphique* par ANTONIO FAVARO, traduites de l'italien par PAUL TERRIER. Paris, Gauthier-Villars, 1879—1885.

[3] *Correspondence of scientific Men of the seventeenth century, including letters of Barrow, Flamsteed, Wallis and Newton,* printed from the originals in the collection of the right honourable the Earl of Macclesfield in two volumes. Oxford: at the University Press. MDCCC. XLI. — Una seconda edizione fu curata in Oxford nel 1862 con aggiunte del DE MORGAN.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

F. Cajori. THE TEACHING AND HISTORY OF MATHEMATICS IN THE UNITED STATES. (Bureau of education, Circulars of information 167, Washington 1890, p. 7—360.)

Cet ouvrage contient une notice très détaillée sur les progrès de l'étude des mathématiques aux Etats-Unis. L'auteur y distingue quatre périodes, dont la première embrasse le temps depuis la fondation de la première université (Harvard College) en 1638 jusque vers la fin du 18^{e} siècle, la seconde (commençant vers 1776) est caractérisée par l'influence des mathématiques françaises, la troisième (commençant vers 1820) par l'influence des mathématiques anglaises, et la quatrième embrasse environ les dix dernières années. Pour chaque période il rend compte de l'état de l'enseignement élémentaire et des études universitaires aux différents *Colleges* avec des notices sur les professeurs, leurs méthodes d'enseigner, les cours et les livres scolaires; il signale aussi les mathématiciens qui se sont distingués sans avoir fait des études universitaires et donne des renseignements sur tous les journaux mathématiques fondés aux Etats-Unis.

Pour apprendre dans toutes les particularités l'état actuel de l'enseignement supérieur des mathématiques aux Etats-Unis, M. CAJORI a fait adresser aux universités et aux autres établissements d'instruction supérieure une série de questions dont il rapporte dans son ouvrages les réponses. Parmi ces questions se trouvent aussi les deux suivantes: »Est-ce que l'histoire des mathématiques entre aussi dans le cadre de l'enseignement?» »Est-ce que les notices historiques contribuent à intéresser les élèves pour les théories mathématiques?» Parmi les réponses à la première question il y a 48 »oui» (à l'université de Texas l'enseignement de l'histoire des mathématiques prend une place considérable), 68 »très peu» et 42 »non». A la seconde question presque toutes les universités ont répondu »oui». M. CAJORI a motivé lui-même cette réponse affirmative dans un passage à la page 236, que je me permets de rapporter ici:

> The interest which pupils take in their studies may be increased if the solution of problems and the cold logic of demonstrations are interspersed by historical remarks and anecdotes. A class in arithmetic will be pleased to hear about the Hindoos and their invention of the »Arabic notation»; they will marvel at the thousands of years which elapsed before people had even thought of introducing into the numeral notation that Columbus egg, the zero; they

will find it astounding that is should have taken so long to *invent* a notation which the themselves can now *learn* in a few weeks. The class will take interest in the history of decimal fractions and the various notations that were used once in place of our decimal point. After the pupils have learned how to bissect a given angle, surprise them by telling of the many futile attempts which have been made to solve by elementary geometry the apparently very simple problem of the trisection of an angle. When the know how to construct a square whose area is double the area of a given square, tell them about the duplication of the cube — how the wrath of Apollo could be appeased only by the construction of a cubical altar double the given altar, and how mathematicians long wrestled this problem. After the class have exhausted their energies on the theorem of the rigthangled triangle, tell them something about its discoverer — how PYTHAGORAS, jubilant over his great accomplishment, [is said to have] sacrificed a hecatomb to the Muses who inspired him. When the value of mathematical training is called in question, quote the inscription over the entrance into the academy of PLATO, the philosopher: »Let no one who is unacquainted with geometry enter here». To more advanced students the history of mathematics becomes instructive and profitable as well as interesting. It seems to me that students in analytical geometry should know something of DESCARTES, who originated this branch of geometry, that, taking up differential and integral calculus, the should become familiar with the parts which NEWTON, LEIBNITZ and LAGRANGE played in creating the transcendental analysis. No one can claim to have a fair knowledge of this subject who knows not something about the three methods taught by these great analysts. In his historical talk it is possible for the teacher to make it plain to the student that mathematics is not a dead science in which no new discoveries are or can be made, but that it is a living science in which racing progress is being made all the time.

M. CAJORI a demandé aussi aux universités les noms des journaux mathématiques auxquels ils s'abonnent; par les réponses nous apprenons que 117 universités ne s'abonnent à aucun journal, 26 à un journal, 4 à deux, 10 à trois et 12 à plus de trois journaux.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1890: 4. — [Analyse de l'année 1886:] Fiziko-matem. naouki **3** (1887), 1890, B: 223. (V. BOBYNIN.) — [Analyse de l'année 1890:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{2}_7$, 1891, 205—214. (A. FAVARO.)

Физико-математическiя науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

3 (1887): B: 1890, 9—12. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

35 (1890): 6. — **36** (1891): 1.

°**Apollonii Pergaei** quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Volumen I. Lipsiæ, Teubner 1891.

8°, XII + 451 p. — [4.50 M.] — [Analyse:] Mathesis $\mathbf{1}_2$, 1891, 39—40. (P. M.)

Bierens de Haan, D., Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des oeuvres de Christian Huygens.

Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Paris) 1889, 233—237.

Birkenmajer, L., O niewyzyskanym dotad szczególe z astronomii starozytnej przechowanym u Tacyta.

Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **21**, 1890. (2) + 31 p. — Sur un fragment d'astronomie ancienne, conservé par TACITUS, et son importance pour l'histoire de cette science. — [Compte rendu en français:] *Krakow*, Akad. umiej., Bulletin 1890, 100—104. (L. BIRKENMAJER.)

Bjerknes, C. A., Til minde om Ole Jacob Broch.

Christiania, Vidensk. Selsk., Oversigt 1889, 13—35.

Bobynin, V., Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes.

Biblioth. Mathem. 1890, 109—112.

Brioschi, F., Notizie sulla vita e sulle opere di Giorgio Enrico Halphen.

Roma, Accad. dei Lincei, Rendiconti $\mathbf{5}_4$: 1, 1889, 815—823.

Brioschi, F., Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen.

Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{14}_2$, 1890, 62—72. — Traduite de l'italien.

Brunner, H., Duodecimalsystem und Decimalsystem in den Busszahlen der fränkischen Volksrechte.

Berlin, Akad. der Wissensch., Sitzungsber. 1889, 1039—1043.

Cajori, F., The teaching and history of mathematics in the United States.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 7—360. — [Analyse:] Educational review (New York) **1**, 1891, 183—186. (TH. S. FISKE.)

Cajori, F., History of infinite series.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 361—376.

Cajori, F., On parallel lines and allied subjects.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 376—385. — Note historique.

Cajori, F., On the foundation of algebra.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 385—387.

Cajori, F., Difference between Napier's and natural logarithms.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 388—390.

Cajori, F., Circle squarers.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 391—394.

Cajori, F., Bibliography of fluxions and the calculus. Text-books printed in the United States.
Washington, Bureau of education, Circulars **167**, 1890, 395—400.

Cayley, A., The investigation by Wallis of his expression for π.
Quart. journ. of mathem. **23**, 1889, 165—169.

Curtze, M., Commentar zu dem »Tractatus de numeris datis» des Jordanus Nemorarius.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 1—23.

°**Diophantus von Alexandria,** Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. WERTHEIM. Leipzig, Teubner 1890.
8°, X + 346 p. — [8 M.] — [Analyse:] Deutsche Litteraturz. **12**, 1891, 172—173. (M. CURTZE.)

Favaro, A., Sopra alcuni nuovi studi Galileiani.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **2**,, 1891, 133—140.

Favaro, A., Rarità bibliografiche Galileiane.
| *Padova,* Accad. d. sc., Atti e memorie **7**, 1891. 12 p.

Favaro, A., Serie sesta di scampoli Galileiani.
| *Padova,* Accad. d. sc., Atti e memorie **7**, 1891, 34 p.

Favaro, A., Galileo Galilei e suor Maria Celeste. Firenze, G. Barbèra 1891.
8°, (6) + 440 p. — [4 L.] — Les pages 15—231 contiennent une notice biographique sur GALILEI; aux pages 237—422 sont reproduites 124 lettres adressées à GALILEI par sa fille aînée.

°**Galdeano, Z. G.,** Estudios criticos sobre la generación de los conceptos matematicos. Cuaderno 1 y 2: Resumen histórico de la evolución de los conceptos matemáticos. La evolución de la geometria Euclidiana hasta los tempos modernos. Madrid 1890.
8°, 40 + 100 p.

Hermite, Ch., Discours prononcé devant le président de la république le 5 août 1889 à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne.

Bullet. d. sc. mathém. 14_2, 1890, 6—36. — Sur l'histoire des mathématiques en France au 19e siècle.

Lampe, E., Dr. Max Henoch.

8°, 6 p. — Necrologie. — Appendice au Jahrb. üb. d. Fortschritte d. Mathem. **20** (1888).

°**Lasswitz, K.**, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. II. Band. Höhepunkt und Verfall der Korpuskulartheorie des siebzehnten Jahrhunderts. Hamburg und Leipzig, Voss 1890.

8°, VIII + 609 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 205—206. (CANTOR.)

Mansion, P., Sur les postulats et les axiomes d'Euclide.

Bruxelles, Soc. scient., Annales **14**, 1889—1890, B: 35—45.

Mansion, P., Analyse des recherches du P. Saccheri sur le postulatum d'Euclide.

Bruxelles, Soc. scient., Annales **14**, 1889—1890, B: 46—59.

Ovidio, E. d', Altra addizione alla nota sui determinanti di determinanti.

| *Torino*, Accad. d. sc., Atti **26**, 1890. 6 p. — Note essentiellement historique.

Ovidio, E. d', Felice Casorati. Cenno necrologico.

| *Torino*, Accad. d. sc., Atti **26**, 1890. 2 p.

Riccardi, P., Commemorazione del prof. Felice Storchi.

| *Modena*, Accad. d. sc., Memorie 8_2, 1891. 6 p.

Riccardi, P., Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull' Astrolabio.

Biblioth. Mathem. 1890, 113—114.

Roghé, E., Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten. (Supplement XVIII der Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik.) Jena, Fischer 1891.

8°, VII + (1) + 122 p. + diagramme.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Biblioth. Mathem. 1890, 107—108.

Suter, H., Bibliographische Notiz über die mathematisch-historischen Studien in der Schweiz.

Biblioth. Mathem. 1890, 97—106.

Tannery, P., Sur un opuscule de Desargues.

Bullet. d. sc. mathém. 14_2, 1890, 248—250. — Cette note se rapporte à la *Pratique de la perspective* (1636) dont M. TANNERY a rencontré un exemplaire à la Bibliothèque nationale de Paris. Un autre exemplaire de cet opuscule, jugé introuvable jusqu'à nos jours, a été retrouvé, il y a 6 ans, dans la bibliothèque de la »scuola d'applicazione per gl'ingegneri» à Rome. Comparez ENESTRÖM, *Notice bibliographique sur un traité de perspective publié par Desargues en 1636;* Biblioth. Mathem. 1885, 89—90.

Question · 32 [sur le différents noms de la construction indiquée dans les Elementa II: 11].
Biblioth. Mathem. 1890, 120. (G. ENESTRÖM.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Band 20 (1888). Berlin, Reimer 1890.
8°. — Les pages 1—44 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1888.

ALLMAN, G. J., Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1889. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 13_2, 1889, 272—278. (P. TANNERY.)

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche fisiche pubblicato da B. BONCOMPAGNI. Tomi XVIII—XX [1885—1887]. Roma. 4°.
Bullet. d. sc. mathém. 13_2, 1889; Revue 212—223.

FINK, K., Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik, mit Hinweis auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen, Laupp 1890. 8°.
Deutsche Litteraturz. 12, 1891, 63—64. (M. CURTZE.)

KÜNSSBERG, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. II. Teil. (Programm der k. bayer. Realschule zu Dinkelsbühl.) Dinkelsbühl 1890. 8°.
Biblioth. Mathem. 1890, 115—116. (S. GÜNTHER.)

LORIA, G., Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins deutsche übertragen von F. SCHÜTTE. Mit einem Vorworte von R. STURM. Leipzig, Teubner 1888. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 13_2, 1889, 201—202. (J. T.)

LORIA, G., Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico. (Memorie dell' accad. delle scienze di Torino 40_2.) Torino 1890. 4°.
Jorn. de sc. mathem. 9, 1890, 177—179. (G. T.) — Zeitschr. für Mathem. 36, 1891; Hist. Abth. 29—30. (CANTOR.)

MANSION, P., Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Gand 1887. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 14_2, 1890, 244—246.

THIRION, J., Histoire de l'arithmétique. Bruxelles, Vromont 1885. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 13_2, 1889, 50—51.

VIGARIÉ, E., Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle. (Association française pour l'avancement des sciences 1889.)
Jorn. de sc. mathem. 9, 1890, 153. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1889. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. 35. 1890; Hist. Abth. 224—240.
[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1890. 117—120. — Zeitschr. für Mathem. 35. 1890: Hist. Abth. 222—223. 36. 1891; Hist. Abth. 39—40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

33. M. Favaro a appelé l'attention sur un écrit intitulé: *Astrolabij quo primi mobilis motus deprehenduntur Canones*, dont la première partie a été attribuée par lui à Prosdocimo de' Beldomandi (voir Biblioth. Mathem. 1890, p. 83—86). Y-a-t-il trois éditions différentes de cet écrit, comme l'indique la *Bibliographie générale de l'astronomie par* J. C. Houzeau *et* A. Lancaster (tome 1^{er}, p. 643), ou faut-il considérer toutes les trois éditions comme identiques? Ni M. Favaro (l. c.) ni M. Riccardi (voir Biblioth. Mathem. 1890, p. 113—114) n'en connaissent plus d'une édition. (G. Eneström.)

Addition à la question 31. M. Narducci a bien voulu m'avertir que le manuscrit cité de Guglielmo de Lunis se trouve actuellement à la bibliothèque nationale de Florence. M. Loria, après y avoir fait des recherches particulières, a constaté que le manuscrit fait partie du cod. 216: *Jordani et Linconiensis opera geometrica* (codex membranaceus saeculi XIV); il est composé de quatre feuillets à deux colonnes, écrits en langue latine avec des caractères gothiques et contenant dans les marges plusieurs formules algébriques. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1891.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. Nº 2.

NEUE FOLGE. 5. — NOUVELLE SÉRIE. 5.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Gumersindo Vicuña (1840—1890).

Par G. Eneström à Stockholm.

En Espagne la première moitié de notre siècle a été peu favorable aux études mathématiques. La guerre d'indépendance (1808—1814), les mouvements politiques qui suivaient à cette guerre, et puis la guerre civile (1833—1840) y paralysaient à peu près toute activité scientifique. Mais après la fondation des écoles polytechniques, la transformation de l'académie royale des sciences à Madrid (1847) et la réforme de l'enseignement des universités (1857), une nouvelle ère a commencé en Espagne pour les études mathématiques, et parmi les hommes qui ont travaillé au développement de ces études, une place remarquable a été prise par Gumersindo Vicuña, dont la mort inattendue est venue surprendre douloreusement ses nombreux amis.

Vicuña naquit à Habana en 1840, et il fit ses études élémentaires à Portugalete et à Bilbao. Dès la jeunesse, il se dédia aux mathématiques pures et appliquées; ayant obtenu en 1863 le diplome d'*Ingeniero industrial*, il fut nommé en 1865 professeur suppléant à l'université de Madrid et en 1871 professeur titulaire de physique mathématique à la même université, où il enseignait jusqu'à sa mort, qui eut lieu à Portugalete le 13 septembre 1890.

Vicuña était un homme de vaste érudition et de grande activité, non seulement comme savant, professeur et écrivain, mais aussi comme politicien et administrateur. Il a publié un

assez grand nombre d'écrits sur différents sujets, la plupart appartenant aux mathématiques appliquées. Parmi ces écrits il convient de mentionner *Teoría y cálculo de las máquinas de vapor y de gas, con arreglo á los principios y leyes de la termodinámica* (1872), *Elementos de física al alcance de todo el mundo* (1875), *Introducción á la teoría matemática de la electricidad* (1883) et *Exposición razonada de las unidades eléctricas.* Pendant les années 1881—1887 il dirigea la *Semana industrial,* journal de sciences, d'arts et de métiers.

L'histoire des mathématiques était aussi un des objets des études de Vicuña, et elle avait attiré son attention assez tôt. Dès en 1869 il avait fait quelques conférences sur l'histoire des mathématiques, et en 1875 il publia un discours *Cultivo actual de las sciencias físico-matemáticas en España,* lu à l'inauguration de l'année scolaire 1875—1876 à l'université de Madrid et traitant les études des mathématiques en Espagne au XIX^e^ siècle. Huit ans plus tard, il inséra dans la Revista contemporánea de Madrid une notice sur *Los matemáticos del siglo XVII.* En 1888 il fit dans la Revista de l'académie des sciences de Madrid une étude sur la fameuse *Composición de las máquinas* de Lanz et Betancourt, dont la première édition parut à Paris en 1808. La même année, à l'occasion de la reception de S. Archilla* comme membre de l'académie des sciences, Vicuña prononça un discours sur l'histoire de l'analyse infinitésimale en Espagne, qui prouve ses connaissances approfondies de la littérature mathématique espagnole. Il donna une nouvelle preuve de ces connaissances par les deux notices: *Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques* et *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16^e^ et 17^e^ siècles,* qui ont été insérées dans la Bibliotheca Mathematica 1890; une troisième notice pour le même journal, se rapportant aussi à l'histoire des mathématiques en Espagne et à laquelle il avait réuni déjà tous les matériaux, l'occupait pendant les dernières semaines de sa vie, mais la mort l'empêcha de l'achever.

La Bibliotheca Mathematica a perdu ainsi un collaborateur, qui dans les bornes qu'il s'était préscrites, aurait pu faire encore beaucoup de services à l'histoire des mathématiques.

* Simon Archilla, né à Murtas (Granada) en 1836, mort à Madrid le 29 août 1890, prononça à cette occasion un discours sur l'histoire et la métaphysique du calcul infinitésimal, qui a été imprimé avec le discours de Vicuña.

Newton's classification of cubic curves.

By W. W. Rouse Ball in Cambridge.

1. I presented last year to the »London Mathematical Society» a memoir on Newton's classification of cubic curves which appears in the current number of their Transactions (vol. XX, pp. 104—143). It deals with four points: namely, the successive steps by which Newton was led to his results; an analysis of his classification; some additional theorems contained in Newton's manuscripts but hitherto unpublished; and the history and bibliography of the subject. At M:r Eneström's kind suggestion I give here a sketch of the main conclusions; but I omit Newton's diagrams, the details of his analysis, the specific references, and also the bibliographical notices.

2. The tract, originally published by Newton as an appendix to his *Opticks*, is divided into seven sections. The first contains some definitions. In the second section he treats of properties of cubics analogous to those of conics. In the third he shows that the equation of a cubic can be written in one of four canonical forms, and he describes his nomenclature. In the fourth section he discusses the nature of the curves indicated by the four canonical equations; and he divides cubics into 7 classes, 14 genera, and 72 species, to which subsequent commentators have added 6 additional species. In the fifth section he enunciates the remarkable proposition that, just as the shadow of a circle cast by a luminous point gives rise to all the conics, so the shadows cast by a luminous point of the curves represented by the equation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ give rise to all the cubics: he also refers to double points, both in the plane and at infinity. In the sixth section he treats of the description of curves, especially of cubics, satisfying given conditions. In the seventh and last section he deals with the graphical solution of problems by the use of curves.

As a rule no proofs are given, and the tract is a bare enumeration of results. There are however at Cambridge among the Portsmouth papers four holograph manuscripts af an earlier date which contain much of the analysis used by Newton and a few additional theorems. I have printed portions of these as an appendix to my memoir.

3. The *first* problem in the classification of cubic curves is the reduction of their equations to one of four canonical forms:

namely, (i) $xy^2 + ey = \varphi(x)$, or (ii) $xy = \varphi(x)$, or (iii) $y^2 = \varphi(x)$, or (iv) $y = \varphi(x)$, where

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

4. In the two latest manuscripts and in the tract this was effected as follows. In every cubic which is not touched by the line at infinity there is at least one real asymptote. If each of a series of chords parallel to this line cuts the curve in two points, the locus of their middle points will be a hyperbola, and if the asymptotes of this hyperbola are taken as axes of coordinates, the equation takes the form (i). But if each such chord meets the curve in only one point, then, taking the asymptote as the axis of y, the equation takes the form (ii). Next, if the cubic is touched by the line at infinity, then if each of a series of parallel chords meets the parabolic branch in two points, the locus of their middle points will be a straight line, and if this line is taken as the axis of x and a line parallel to the chords as the axis of y, the equation takes the form (iii). But if each such chord meets the curve in only one point, the equation takes the form (iv).

5. This was not the method used originally. In the earliest manuscript NEWTON commences by giving the general equation of the third degree, and by changing both the origin and the axes obtains an equation involving eighty-four terms and four arbitrary constants. He discusses by algebra how these constants may be chosen, so as to simplify the equation, and thus arrives at the canonical forms.

6. This algebraic method is laborious. At the beginning of the second manuscript NEWTON abandoned it, and proceeded to attack the problem geometrically by obtaining interpretations of the general equations of the second and third degrees. These are as follows.

7. Suppose that AG, BH are two parallel chords of a conic, and that VW is any chord drawn parallel to them. Through A draw another chord AL cutting BH in E, and VW in T. On AL take a point M so that

$$AM : EM = AG : EH - EB.$$

Let $TV = y$; then he asserts that y is determined by the equation

$$y^2 + \frac{AG}{AM} MT \,.\, y + \frac{EB \,.\, EH}{EA \,.\, EL} AT \,.\, TL = 0,$$

where the lines are regarded as directed magnitudes.

8. Similarly, let ADG, BEH, CFI be three parallel chords of a cubic, and VWU any chord drawn parallel to them. Join AE. Let the chord AE cut the cubic again in L, the chord CI in K, and the chord VU in T. On AE take a point M so that $AM:EM=AD+AG:EH-EB$.

On AE take points R and S, so that $AR.AS:AD.AG = ER.ES:EB.EH=KR.KS:KC.KF-KC.KI-KF.KI$.

Let $TV=y$; then he asserts that y is determined by the equation

$$y^3-\frac{AD+AG}{AM}TM.y^2-\frac{AD.AG}{AR.AS}TR.TS.y$$
$$-\frac{KC.KF.KI}{KA.KL.KE}TA.TL.TE=0,$$

from which all the properties of every cubic may be deduced.

9. He however seems to have found it difficult, if not impossible, to classify cubics or to trace their forms from this relation. He therefore falls back on analysis, but in this manuscript he effects the reduction to the canonical forms by changing the axes and the origin by successive geometrical constructions. The method is concise and ingenious.

10. An example of one case will illustrate it sufficiently. Suppose that the given equation of a cubic (referred to $A\xi$ and $A\eta$ as coordinate axes) is

$$a\eta^3+b\xi\eta^2+c\xi^2\eta+d\xi^3+e\eta^2+f\xi\eta+g\xi^2+h\eta+k\xi+l=0,$$

where $AB=\xi$ and $BC=\eta$.

On AB take a point D, so that $DB=p\eta$, where p is a root of the equation

$$a+bp+cp^2+dp^3=0.$$

Then, if $AD=x'$ and $DC=y'$, we obtain an equation (in x' and y' as current coordinates) of the form

$$b'x'y'^2+c'x'^2y'+d'x'^3+e'y'^2+f'x'y'+g'x'^2+h'y'+k'x'+l'=0.$$

If $b'\gtrless 0$, on CD produced take a point E, so that $DE:AD=c':2b'$. Then if $AE=x''$ and $EC=y''$, we obtain an equation (in x'' and y'' as current coordinates) of the form

$$b''x''y''^2+d''x''^3+e''y''^2+f''x''y''+g''x''^2+h''y''+k''x''+l''=0.$$

Next, change the origin to $\left(-\frac{e''}{b''}, -\frac{f''}{2b''}\right)$, and the equation reduces to the form numbered (i) in art. 3.

The other cases where $b'=0$ are treated similarly.

11. The method used in the third and fourth manuscripts is the same as that in the printed text. (See above art. 4.)

12. The *second* problem is the classification of the curves represented by these four canonical equations into classes, genera, and species — degenerate forms being left out of account. The division into classes and genera (as well as that into the canonical forms) depends on the nature of the infinite branches. The further separation into species of the curves which constitute any genus is effected by solving the equation of the curves for y, and thus determining the maximum and minimum values of x. For the details of this I must refer the reader to my memoir.

13. The final result in NEWTON's nomenclature is as follows.

Canonical Form or Case.	*Class.*	*Genus.*	*Species.*
I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Redundant Hyberbolas (a positive)	adiametral	9
		monodiametral	12 + 2
		tridiametral	2 + 2
		[asymptotes concurrent]	9
	Defective Hyperbolas (a negative)	adiametral	6
		monodiametral	7
	Parabolic Hyperbolas ($a = 0$)	adiametral	7
		monodiametral	4 + 2
	Hyberbolisms of Conics ($a = 0$, $b = 0$)	hyperbolic	4
		elliptic	3
		parabolic	2
II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	(The Trident)		1
III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	Diverging Parabolas		5
IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	(The Cubic Parabola)		1

14. The *third* problem is to obtain tests to discriminate to which class and genus a cubic curve belongs without having to reduce its equation to a canonical form. NEWTON's rule is given at length in his own language in the appendix to my memoir. It is omitted from the published tract and I believe has not been printed previously.

15. His rule is as follows. If the coefficient of y^3 is not zero, the equation can be written in the form

$$y^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0,$$

that is,

$$x^3(z^3 + bz^2 + cz + d) + x^2(ez^2 + fz + g) + x(hz + k) + l = 0,$$

where z stands for $\frac{y}{x}$. Let this be denoted by

$$ux^3 + vx^2 + wx + l = 0.$$

Let suffixes indicate differentiation to z, and let

$$s = u_2 v^2 - 2u_1 v v_1 + 2u_1^2 w.$$

Then u, v, w, their differential coefficients, and s are functions of z.

(α) If the three roots of $u=0$ are real and unequal, the curve will be a redundant hyperbola. The hyperbola will be adiametral, monodiametral, or tridiametral, according as the equation $s=0$ is satisfied by none of these roots, by only one of them, or by all of them.

(β) If only one root of $u=0$ is real, then (i), if that root does not satisfy the equation $u_2^2 = 8u_1$, the curve will be a defective hyperbola; but (ii), if it does satisfy the equation $u_2^2 = 8u_1$, the curve will be a hyperbolism of an ellipse; in both these cases the curve being adiametral or monodiametral according as this root does not or does satisfy the equation $s=0$.

(γ) If $u=0$ has three real roots and two of them are equal, then (i), if the root which is not equal to the other two roots does not satisfy the equation $v=0$, the curve will be a parabolic hyperbola; but (ii), if it does satisfy the equation $v=0$ but not the equation $v_1^2 = 2u_2 w$, the curve will be a hyperbolism of a hyperbola; and (iii), if it satisfies both $v=0$ and $v_1^2 = 2u_2 w$, the curve will be a hyperbolism of a parabola; in all these cases the curve being adiametral or monodiametral according as this value of z does not or does satisfy the equation $s=0$.

(δ) Lastly, if $u=0$ has three real roots and all of them are equal, then (i), if this root does not satisfy the equation $v=0$, the curve will be a diverging parabola; but (ii), if it does satisfy $v=0$ but does not satisfy $v_1=0$, the curve will be a trident; while (iii), if it satisfies both $v=0$ and $v_1=0$, the curve will be a cubic parabola.

Should the coefficient of y^3 in the original equation be zero, but not that of x^3, then the equation must be arranged in powers of x, we must put $z=\frac{x}{y}$, and corresponding tests can be applied.

If the coefficients of x^3 and of y^3 are both zero, then, if $b \gtrless 0$ and $c \gtrless 0$, the curve will be a redundant hyperbola; this is similar to case (α). But if either $b=0$ or $c=0$, then the

curve will be a parabolic hyperbola, or a hyperbolism of a hyperbola, or a hyperbolism of a parabola; this is similar to case (γ). The further determination of the genus may be effected in the way given above.

16. Newton shows also how the values of u_1, u_2, v, v_1 and w, corresponding to a root of $u=0$, enable us to give a geometrical construction for the corresponding asymptote.

17. I may add here that Newton uses the binomial coefficients and not the differential coefficients, so that his formulæ are slightly different from those that I have given above. Thus, if $u=z^n$, he uses $\frac{1}{2}n(n-1)z^{n-2}$ where I have used u_2. This is an instance of John Bernoulli's »regulam falsam«.

18. Probably the next question in a work on cubics would be a discussion of their properties.

19. Their diametral properties are enumerated in the second section of Newton's tract. These seem to have been deduced from the relation given above in art. 8.

20. The property that every cubic is the projection of one of the five diverging parabolas is enunciated in the fifth section of the tract. Among Newton's papers is a sheet of double foolscap containing notes indicating the various species which arise from the section by a plane in some defined position of one of the five cones having these diverging parabolas for bases. This theorem divides cubics into five groups having their fundamental characteristics in common. It was discussed successively by Nicole, Clairaut, Murdoch, Jacquier, and (in more recent times) by Chasles, Möbius, and Cayley.

Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. (Fortsetzung.)

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

ALFRAGANUS (S. 875), eigentlich ALFERGANI; der bekannte Astronom: *XXX Differentiae*, Fol. 378 (S. 264), Qu. 351[28] (S. 590), ist die gedruckte Übersetzung des JOHANNES HISPALENSIS. Das Datum 1173, welches als eine »höchst bemerkenswerte Ergänzung« zu FABRICIUS hervorgehoben wird, ergiebt das christliche Jahr 1135 und ist längst von WOEPCKE besprochen; siehe meinen *Catalog der Berliner Hebräischen Handschriften* S. 9; cf. Zeitschrift der deutschen morgenländ. Gesellsch. 25, 1871, 393, 398. Der angebliche *Commentar*, Ms. Oct. 88[17] (S. 746) ist ein anonymer Tractat über Benutzung der alfonsinischen Tafeln; was das hinzugefügte »et librum ALFRAGANI« in der Überschrift bedeuten soll, ist schwer zu erraten.

ALGAZEL (S. 875) ist GAZZALI, der bekannte Philosoph, aber *De planetis*, Oct. 79[5] (S. 736) — anfangend: »viso de planetis ... nunc autem quid operentur« — ist ein Fragment und ohne Zweifel nicht von jenem Philosophen, sondern von dem Astrologen ZAEL dessen Namen mit ARZACHEL und ALGAZEL verwechselt wird; siehe unten unter ZOEL und meine *Etudes sur Zarkali* p. 102, 108; cf. unter ARISTOTELES.

ALI (HALY) *fil.* (sic) *Abenragel* und *Abenrudiani*, unter welchem auch alle Schriften mit Namen HALY schlechtweg aufgezählt sind (vergl. oben unter ALBENAHAIT) bedürfte einer vollständig neuen Redaction. ABENRAGEL (eigentl. IBN AL-RIDJAL) ist ein africanischer Astrolog um 1010—20, dessen Originalwerk (*al-Bari*, lat. übersetzt *Completus*) erhalten ist, ebenso die spanische Übersetzung, welche der lateinischen betitelt: *De judiciis astrorum*, zu Grunde liegt. Hingegen ist *de nativitatibus* in Ms. Qu. 374[12] schon oben dem ALBENAHAIT vindicirt; danach ist in der Überschrift von Ms. Duodec. 18[6] S. 775 der Namen ABENRAGEL eine falsche Conjectur wegen der vorangehenden n.[5]. Mehr siehe in meinen Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi*, p. 60 und weiter unten.

Abenrudian ist der bekannte ägyptische Arzt IBN RIDHWAN (vulgo *Rodwan*), gest. 1068, nicht 1061 (siehe Archiv für Pathol. Anat. 86, S. 124). — HOUZEAU und LANCASTER, *Bibliographie de l'astronomie* I, 710, vermengen ihn mit dem,

hier folgenden ALI B. AHMED, wie überhaupt die Araber in diesem Buche übel weggekommen, weil fast nur veraltete und unbrauchbare Quellen benutzt sind; ich komme vielleicht in einem anderen Artikel darauf zurück. — Von IBN RIDHWAN ist der gedruckte Commentar zum *Quadripartitum* des PTOLEMÄUS; hingegen hat man ihm irrtümlich den Commentar zum *Centiloquium* beigelegt, dessen Verfasser AHMED B. JUSUF (Bibliotheca Math. 1888, 113) ist. Beachtenswert ist die Angabe des Übersetzers JOHANNES TOLETANUS (= HISPALENSIS) in Ms. Qu. 36… (S. 602; cf. ROSE im Hermes VIII, 332—340), wie LECLERC (*Histoire de la médecine arabe* II, 374 n. 6) aus dem Jahre 53… arabum in Ms. Paris 7316 A vermutete. Ms. Fol. 380[11] (S. 26…) hat 17. März Giumadi II 532 (beginnt 14. Februar 1138); diese Angabe stimmt noch weniger zum Kalender als die anderen bekannten; der Fehler scheint im christlichen Datum zu liegen, da das arabische Datum des Tages und Monates sich überall wiederholt. Ähnliche Doppeldatirung findet sich auch in der Übersetzung des ALFERGANI;[8]) ich muss daher meine frühere Conjectur, dass der Übersetzer PLATO AUS TIVOLI sei, dahingestellt sein lassen.

IBN RIDHWAN erscheint bei BALDI auch unter dem Namen *Punico* (nach JUNCTINUS) als verschiedener Autor; das Nähere in meinen Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* p. 56, wo die Nativität mitgeteilt ist.[9])

Bei den noch zu besprechenden Schriften übergehe ich die Angaben aus dem Catalog AMPLONIUS' da sie nicht zu verwerten sind.[10])

Zunächst ist die *libri*(!) *de Cometis Commentatio* zu streichen, da sie nur ein abgetrennter Schluss zum Commentar des *Centiloquiums* ist (wonach auch der Index unter PTOLEMAEUS S. 92 zu berichtigen ist).

Sämtliche nachfolgenden Stücke haben in den mss. nur den Namen HALY; zu den beiden ersten ist *Abenrudian* in Parenthese vermerkt.

De dispositione aëris (anfangend: »ad prognosticandam dispositionem aeris«) Fol. 394[19] f. 147, 148 (S. 278), Qu. 345[24] (S. 577) mit abweichendem Ende, auch in ms. Digby 92[3] (p. 101: »ad praenot.«), im Index p. 270 unter HALY ABENRAGEL, wo das (in VIII, 25) nicht vorkommt, auch nicht in *Novem judices*.

De imagnibus et constellationibus, Fol. 394[7] f. 90, 91 (S. 2?7), anfangend: »Graeci virtutes extremos circa quos(!)«; zuletzt: »et sic completur *lib.* ymaginum«. Ob überhaupt von einem der beiden ALI verfasst?

De litibus et proeliis, Qu. 372[17] (S. 624), giebt zuletzt deutlich genug »*cap. 42 sec. partis*« an, und steht wirklich bei ABENRAGEL f. 87 ed 1551!

Libellus de lunae proprietatibus; zuletzt: »de collectione propriet. lunae«, Fol. 386[8] (S. 272) nur 2 S. (anf.: »Luna si fuerit in primo domo significat«; Ende: »ARISTOTELES in 5°(!) libro metheororum«); auch in München 201 (siehe meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* p. 50); ist nicht ABENRAGEL VIII, 7 f. 373.

Descriptio figurae Ptholomei de cognicionibus morborum per horoscopum commentata par Hali egregium commentatorem; Qu. 215[1] (S. 472), anf.: »Haec est figura Ptol. quam Haly primitus sic descripsit. Quando et qualiter«. Ist nach dem Commentar zum *Quadripartitum* III, 12 bearbeitet?

Significatio planetarum in signis, Qu. 223[15] (S. 482) anf.: »Sol in omnibus partibus arietis, altos«; kann ich nicht nachweisen.

De virtute Saturni; zuletzt: HALY *de subradiis* (»*Abenrudiani*« ist aus AMPLONIUS' Catalog) Qu. 343[12] (S. 373), anf.: »Saturnus in subradiis pluvias facit«, identisch mit dem anonymen *de operatione planetarum sub radiis solis*(!) Qu. 374[7] (S. 626). Als HALY *de subradiis sive de pluviis* findet sich dieses Stück in verschiedenen mss. (s. meine Noten zu BALDI p. 50; cf. Archiv für Pathol. Anat., Bd. **86**, S. 125, Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 362, Anm.); die mss. Digby 67[4], 93[13], 147[26] sind im Index p. 270 unter HALY ABENRAGEL aufgeführt, nur als Conjectur; in seinem Buche finde ich dieses Stück nicht, der Autor ist noch nachzuweisen. Die Variante ALKINDI haben ms. Digby 93 und Wien 3162[6].

Quaedam notabilia secundum HALY, Qu. 368[16] (S. 616), beginnt: »vide HALY et ARNALDUM DE VILLA NOVA« (das ms. fehlt unter diesem im Index p. 933), scheint nur das grosse Werk des ABENRAGEL zu benutzen.

ALI *fil. Achamet Embrani* (S. 876), *de Electionibus* oder *de Eligendis horis,* Fol. 394[4] (S. 277), Oct. 83[2] (S. 740), übersetzt von ABRAHAM JUDAEUS in Barcelona, October 1134. Der Verfasser, arabisch IMRANI, starb 954/5. ABRAHAM ist ABRAHAM BAR CHIJJA (*Savasorda*), der in Verbindung mit PLATO AUS TIVOLI arbeitete; s. meine Noten zu BALDI p. 64.

ALKABITIUS (S. 876), ABDAL-AZ Z etc. ALCABITIUS, eigentlich AL-KABISI, dessen *Introductio,* oder *liber Introductorius in astrologiam,* arabisch erhalten und aus dem Arabischen (nicht dem Hebräischen, wie bei HOUZEAU p. 468, 705 angegeben ist) lateinisch übersetzt von JOHANNES HISPALENSIS[11]) zu den popu-

lärsten Schriften gehörte, vielfach abgeschrieben, gedruckt, commentirt und übersetzt worden. Herr SCHUM unterscheidet mit Unrecht ein *liber Introductorius magisterii iudiciorum* »sive in quadipartitum PTOLOMAEI« *cum comm.* nach Fol. 383[5] (S. 269) etc.; die Überschrift in Qu. 348[4] (S. 582) ist ein Missverständnis des Vorwortes, worin der Verf. über die, hier weggelassenen »Ratiocinationes« auf das *Quadripartitum* verweist und auf sein Buch »in Confirmatione mag. jud. astror. et in destructione epistolae Haissebenhali«, welcher nicht HASAN (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 362) sondern ISA BEN ALI ist; diese Deutung (vgl. Archiv für Pathol. Anat. Bd. **86**, S. 102—103) bestätigt das arabische Original in hebräischer Schrift (siehe NEUBAUER n. 2081).[12])

Die französische Bearbeitung über Conjunction der Planeten, Paris 1557 bei WÜSTENFELD (*Die Übersetzungen* etc. S. 32) dürfte aus Tractat IV, V der »Introductio« entnommen und nicht ein selbständiges Werk sein.

Über ein angebliches Buch *de Secretis* siehe unter MESSEHALA.

Der Commentar des JOHANNES DANCK oder DE SAXONIA, auch »de Pulchro Rivo« also Schönbach,[13]) verfasst 1331 (siehe Diff. IV, Fol. 82, ed. 1521) ist gedruckt und nicht erkannt von SCHUM in dem anonymen Ms. Fol. 394[21] (S. 278). — Untersuchung verdient der anonyme Commentar vom Jahre 1363 (? in ms. Fol. 383[6] (S. 629). Einen Commentar von JOHANNES HISPALENSIS giebt es überhaupt nicht; »interpretatus« in Qu. 37[9] (S. 636) bedeutet übersetzt.

[ALKASSIBI], *Abubeer, magnus fil. Alkasibi Alkusi* (sic), fehlt im Index, weil vor dem Namen »dixit« steht, wie sehr oft ein arabischer Autor sich in der dritten Person einführt. Sein *Liber judiciorum de nativitatibus* ist in ms. Qu. 223[4] (S. 481) enthalten. Das (1492) edirte Buch beginnt: »dixit *Albubather* magni Alchasili *Alcharsi* fil.«; es ist nach Mss. übersetzt von SALIO, Canonicus zu Padua (1218 oder 1228, oder 1244; er war 1259 in Brescia mit GUIDO BONATTI) mit Hilfe des Juden DAVID. Ich verweise der Kürze halber auf Zeitschr. der deutschen morgenländ. Gesellsch. **25**, 1871, 419—420; **28**, 1874, 652 und meine Abhandlung *Abraham ibn Esra* S. 74, gegen WÜSTENFELD, *Die lateinischen Übersetzungen* S. 83, welcher unhaltbare Conjecturen vorbringt (zu HASAN BEN KHA'SIB siehe *Fihrist* II, 131, zu I Seite 272 A. 7). Der arabische Autor ist noch zu ermitteln.

ALKINDUS, JACOB (S. 876); AL-KINDI, der bekannte Polyhistor des IX. Jahrhunderts (siehe meine Noten zu BALDI p. 9)

hat sicherlich Astrologisches verfasst; Stücke werden von IBN RIDJAL citirt; es scheinen sich aber auch nur versprengte Stucke erhalten zu haben, z. B. in »*Novem judices*« (siehe Biblioth. Mathem. 1890, S. 72, Anmerk. 7). Herr SCHUM verzeichnet: *Dispositio planetarum*, Qu. 377[4], *De Radiis*, Qu. 349[11] (S. 584), zuletzt »*de Radiis stellicis*«; Anfang: »Omnes homines qui sensibilia«; Ende: »Explicit theorica artis mag*is*«, lies magiae, wie in Ms. Harles 13 (cf. meine Noten zu BALDI p. 11, wo eine Stelle darüber aus PICO angeführt ist); *de Stellarum accidentali proprietate* Qu. 372[14] (S. 264) ist nicht in *Novem judices* enthalten.

ALPETRAGIUS (S. 876), *de Planetarum motibus*, übersetzt von MICHAEL SCOTUS, Fol. 377[1] (S. 262); das Jahr 1434 ist richtig als das der Abschrift aufgefasst. Das Buch ist nur einmal gedruckt und höchst selten. Der eigentliche Namen ist BITRODJI; d. h. aus Pedroches; siehe meine Noten zu BALDI p. 84, *Etudes sur Zarkali*, p. 88.

ALTRADANUS (S. 876), *Carmen de astrologia*, Qu. 21[5] (S. 302) mit prosaischer Einleitung, worin: »unde ego altradanus solus minimus inter philosophos«. So lange dieser Autor nicht anderweitig nachgewiesen wird, muss man ihn für eine Erfindung halten, vielleicht mit Nachahmung von ALFRAGANUS. Der ganze Codex enthält ausser diesem Stücke nichts Arabistisches.

ALZARCHEL (S. 876) *in libro judiciorum practica Introductio*, s. unter ZOEL, wie auch das darauf folgende anonyme Schriftchen *Regulæ astrologiæ*. — *De sinibus* Qu. 376[15] (S. 630) »secundum sententiam *Alzarchel*«; vielleicht aus den *Canones* zu den Tafeln des ZARKALI; s. meine *Etudes sur Zarkali* p. 119.

[AOMAR] s. OMAR.

ARISTOTELES. Ich verzeichne aus diesem Artikel, was auf arabische Quellen zurückgehen dürfte, wie auch die *Novem judices* aus einer pseudoaristotelischen Astrologie direct oder indirect schöpfen. — (S. 881) *De signis et planetis* Qu. 372 [gehört hinunter], 374[13], (S. 626) Fol. 133—135. Anfang: »Signorum alia sunt masculina« (cf. PTOLOMAEUS *Quadripartitum* I); Ende: »precipue causant ventos«; gleicher Anfang im anonymen Ms. Digby 38[6] (p. 34). ALBERTUS MAGNUS (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 388) citirt neben der *Introductio* von ZAËL (s. unter ZOEL) *et alius Ares*, anf.: »Signorum . . . masculine generis (wie Ms. Digby) excepto quod in secundo tractatu agitur de interrogationibus«. Ich beziehe diese Bemerkung auf das Buch des ZAËL und vermute nun dass *Ares* für ARISTOTELES stehe. Das Stück ist vielleicht ein Teil des folgenden (S. 879) *de astrorum judiciis* Qu. 377[14] (S. 632), 11 Bl. »qui ab Alberto in Speculo

dicitur esse Arist. et primo de nativit.»; anf.: »nunc de hospiciis videamus»; Ende: »nihil scientes reperiuntur». Ich habe in Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 367 kein solches Citat gefunden. Vielleicht hängt damit zusammen (S. 880) *de lunari effectu atque potentia ex dictis Aristotelis*, Qu. 200 f. 36 (S. 459); Anf.: »Luna in ariete sive quaestio praecedat»; Ende: »spectare videtur, negat remedium»; offenbar identisch mit: *De lunari significatione*, Qu. 372[12] (S. 624), wo das Ende jedoch: »in domibus alibi habetur». Ich vermute jetzt die Identität dieser Schrift mit der *De Signis et lune effectibus* (so), welche RAZI (Aphor. Cap. 2) einem »Astaroht» beilegt; im Serapeum 1870 S. 307 vermutete ich eine Verstümmelung aus »Otharid» (Mercur); cf. weiter unten.

ALBERTUS MAGNUS erwähnt ferner ein 3. Buch mit ähnlichem Anfange, nämlich von *Ptolemaeus ad Aristonem*. Pseudo-PTOLOMÄUS, *sacratissimus liber ad Heristonem filium suum* (Venedig 1509 gedruckt), lautet in Ms. Sorbonne 980 »ad Aristonem» (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 383); dieser Namen kommt vielleicht daher, dass der Mechaniker PHILO seine Schriften einem ARISTON widmete (ROSE, *Anecdota* II, 86). Dieses Machwerk beginnt in der That: »Signorum alias uturum (lies: alia sunt) etc.». — In gleicher Weise beginnt ein arabisches anonymes Manuscript des Brit. Museum 415[3] (*Catal.* p. 197), betitelt *Navadir al-Kadhâ* (Seltenheiten des Fatum). — Auf das erwähnte Schriftchen *ad Heristoniem* folgt ARISTOTELIS *sententia de luna ... de imaginibus fabricandis*, über die 28 Mondstationen (Zeitschr. der deutsch. morgenländ. Gesellsch. **25**, 1871, 384), vielleicht verwandt mit einem ähnlichen Buche von HERMES (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 371).

Astronomia navalis (S. 879) ist, nach einer Mitteilung von V. ROSE ein von AMPLONIUS erfundener Titel; die Schrift ist das bekannte *de signis aquarum* etc. (ARISTOTELIS *pseud.* p. 244).

CHECHELBENBIS (S. 891), *judiciorum et astrorum scientia*, Qu. 361[31]. Das Fragezeichen zu »Israelita» ist überflüssig, s. unter ZOEL.

GEBER, *Mahomet*, s. ALBATANI, wo ich auf die Confusion mit GEBER HISPALENSIS (DJABIR IBN AFLA'H) hingewiesen, welchem die *Flores ex Ptolemæi libro Almagest* angehören, die auch als *Commentar* zu PTOLEMAEUS in Ms. Coll. Corp. Christi 233[*] vorkommen; Anf.: »Scientia species habet». Als *Flores* citirt dieses Buch offenbar ALBERTUS MAGNUS (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 373; cf. **18**, 1873, 337 n. 6); nur ist der Text corrumpirt: »et apud JOHANNEM algebu (Variante: *algebitim*)

HISPALENSEM motus . . . quem nominavit flores suos». JOHANNES ist zu streichen und »apud GEBRUM» zu lesen.

GERHARDUS CREMONENSIS (S. 902). Herr SCHUM unterscheidet ebensowenig als MACRAY (*Index* p. 269) den berühmten Übersetzer (gest. 1187) von dem jüngeren Astronomen aus *Sabbionetta* (lebte noch 1255—60), Verf. der edirten *Theorica*, wovon hier 11 Mss., und der edirten *Geomantie*, nicht Qu. 372, sondern 373[1] (S. 625), vielleicht auch Qu. 361[18] (S. 603); cf. Zeitschr. der deutschen morgenländ. Gesellsch. **18**, 1864, 142; **25**, 1871, 390, hier *Albedatus* Oct. 88[1] (S. 744). — *Liber Algorismorum et omnium fractionum in numeris arabicis translatus* Qu. 355[22] (S. 596) ist nichts Anderes als der Algorismus des JOHANNES HISPALENSIS, herausgegeben von BONCOMPAGNI (*Trattati d'Aritmetica* II, 1857), aber nur bis p. 127 (»quatuor remanent»). Das Vorangehende gehört zu den Excerpten aus Algebra (vgl. meine Abhandlung *Abraham ibn Esra*, S. 111). Es frägt sich zunächst, ob das Folgende (»quaeritur cur non omnes vel plures numeros etc.») eine teilweise mystische Begründung des Dekadensystems (*Abraham ibn Esra* S. 117), noch zum *Algorismus* gehöre, ferner wer der Verfasser, oder der Übersetzer desselben sei. Der von LIBRI und BONCOMPAGNI (*Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese e di Gherardo di Sabbionetta*, Roma 1851, p. 57) angeführte *Algorismus*, Ms. Digby 61, wird, nach MACRAY, einem Mag. GERNART, beigelegt, enthält zwei Bücher und beginnt: »Digitus est omnis numerus minus decem». LIBRI (*Histoire des mathématiques en Italie* II, 298) bemerkt schon, dass der Verfasser anderweitig *Genand* heisse, also unsicher sei. Um so weniger ist anzunehmen, dass der Namen GERARD's im Ms. Amplon. aus jener Schrift übertragen sei. Die hier angeregten Fragen sind von einiger Bedeutung für die Geschichte der Algebra.

JOHANNES HISPANUS, HISPALENSIS etc. (S. 909), wird richtig mit *Toletanus* identificirt, von letzteren aber unterschieden ein *Joh. Toletanus*, Verfasser der *Tabulae de Conjunctionibus solis et lunae adinventibus* 1346—65, in Oct. 79[11] (S. 737). Diese Tafeln können aber doch auf Grund älterer berechnet sein. Den Namen »Johannes David Toletanus» trägt eine fingirte *Epistola* über eine Conjunction vom Jahre 1371, Qu. 371[7a] (S. 623), im Index übergangen; siehe darüber Zeitschr. der deutsch. morgenl. Gesellsch. **29**, 1875, 163.

Von mathematischen Übersetzungen sind erwähnt: ALBUMAZAR, *Introductio;* ALFRAGANI, *Liber XXX Differentiarum;* ALKABITIUS, *Introductio;* MESSEHALA, 2 Schriften; OMAR, *De*

Nativitatibus; PTOLEMÄUS, *De Astrolabio,* Qu. 386[16] (S. 646) [siehe Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 377]; ALI ABEN RUDIANI, *Commentarius in Centiloquium;* THEBIT, *De Imaginibus,* — worüber ich unter den Autoren spreche.[14])

Alles Übrige scheint demselben Werke anzugehören. JOHANNES verfasste 1142 eine *Epitome totius astrologiae,* bestehend aus einer *Isagoge* und vier Büchern *de Judiciis.* Das Ganze, aus verschiedenen Redactionen compilirt, erschien Nürnberg 1548 und wird in Mss. als *Quadripartitum* bezeichnet (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 374); LECLERC, l. c. II, 374, 492, fasst Ms. Paris 7306 irrtümlich als eine Übersetzung des PTOLEMÄUS auf. Ms. Amplon. Fol. 394[2] (S. 277) und Oct. 84[1] (S. 741) enden: »nam libenter exit istis (erit istis emptor)«, wie Ms. Wien 5442[8] und *Introductorium* ibidem N° 2436 (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 375); das ist das Ende von IV, 17: »nam labetur alias ex bestiis emptis«. So endet auch Qu. 223[2] (S. 481), angeblich *de Revolutionibus,* nämlich: »incipit prima pars de Revolutionibus annorum; quoniam huic arti isagogas prestituimus« [am Ende der Ausgabe heisst es: »finiunt isagogae«]. Hier ist entweder der defecte Anfang (I, Cap. 4 ist *de Revolutione anni mundi*) durch eine fingirte Einleitung verdeckt, oder eine andere Recension, welche ALBERTUS MAGNUS als »liber qui dicitur prima pars« mit dem Anfange: »Quantum huic arti« citirt. »Bestiis emptis« enden auch die *Nativitates* Qu. 379[4] (S. 636). Anfang: »Primum considerandum est *minutum gradus*«; so citirt ALBERT die »secunda pars«, aber die gedruckten *Nativitates* beginnen: »In hora natali«. Die Excerpta *de Electionibus,* Oct. 84[4] (S. 742) werden ausdrücklich »de quarto libro« bezeichnet und beginnen wie die Ausgabe. — Die *Judicia* Qu. 377[6] (S. 631), Anfang: »Cum volueris eligere«, Ende: »numerus passionum« (nur 5 Bl.), kann ich in der Ausgabe nicht auffinden.

MACELLAMA [lies Macelama] s. MESSEHALA.

MACHARIT »Abitritacin« de M. (S. 913), *De Astrolabio* Qu. 345, lies 363[13] (S. 608), zuletzt: »qui dictus est Alaiacheriaa« (l. de Macharita). Anfang: »Cum volueris facere«; cf. Ms. Canon. 340[4], Wien 2452[1]. — MACHARITI ist der bekannte Arzt und Astronom ABULKASIM MASLEMA B. AHMED AL-MADJRITI, d. h. aus Madrid (XI. Jahrhundert). In Mss. Merton College 259, Vatic. Reg. Suec. 501, Cambr. Univers. 1935 beginnt die dem MACHARITI beigelegte Schrift, Cap. 1: »primum horum est armilla«, wie die *Practica Astrolabii* des MASCHALLA. ALBERTUS MAGNUS citirt zwei Schriften des JOHANNES HISPALENSIS mit den Anfängen beider obigen Schriften (Zeitschr. für Mathem. **16**,

1871, 377—378). Eine nähere Vergleichung beider ist noch erforderlich.

MAZELEMA (S. 915), im Ms. MAZLEM et ABILKADIN (s. diesen), Excerpt aus dem Buche *de Inveniendis azimuth* etc. Qu. 369^{47} (S. 621), ist ohne Zweifel ABULKASIM MASLEMA d. i. MACHARIT, und wohl aus dem eben erwähnten Werke über das Astrolab, also nicht MESSEHALA, wie Herr SCHUM vermutet.

MESSEHALA (S. 915), in Klammer MAZELLAMA, in den betreffenden Mss. *Macellama* oder *Macelama*. Der hier und sonst vielfach verstümmelte Namen lautet arabisch MA SCHÂ ALLAH zusammengezogen MASCHALLAH. M. war ein aegyptischer Jude (770—820?); von seinen Schriften ist Weniges im arabischen Original, Vieles in lateinischen Übersetzungen erhalten, die Bibliographie noch nicht vollständig erledigt; jedoch viel scheinbar Neues auf Fragmente bekannter Schriften zurückzuführen (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 377—379).

De Astrolabio, Anfang: »Scito quod astrolabium nomen graecum», Fol. 376^{11} (S. 262) und in noch 7 Mss., ist das gedruckte Werk in 2 Abteilungen, Anf.: »Astrolabium nomen graecum»; andere Mss. beginnen: »Scito quod etc. [wie Amplon.], s. Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 377.

De astrolabii usu, Epilogus, oder *Canones,* oder *Practica,* unedirt; Anfang: »Nomina instrumentarum ... primum est armilla»; Ende: »comparatio stature tuae ad planitiem», Qu. 348^{34} (S. 586), wo der Namen *Mufinus* vielleicht den eigentlichen Verfasser vorstellt, respective entstellt, und 355^{18} (S. 596). Dasselbe Ende hat aber auch Fol. 376^{12} (S. 262), überschrieben: *Ymago projectionis spere in planum provisum*, Anfang.: »Concussio sive extentio»; ist hier der Anfang defect, oder etwas Fremdes vorangestellt? *De compositione et utilitate astrolabii* Fol. 394^{2} (S. 276), enthält die obige Schrift des MASCHALLAH und den zweifelhaften *Epilogus*. Andere Mss. des *Epilogus* siehe Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 378—379; dazu kommen: Digby 207^{3} (p. 224), Paris 7297^{15} anonym, Vatic. Ottobonian. 1826 und Urbinat. 1399; siehe meine *Etudes sur Zarkali* p. 84, wo auf den ähnlichen Anfang bei ANDALONE DA NEGRO hingewiesen ist; cf. das anonyme Ms. Digby 167^{19} (p. 172): *Operationis modus* etc., Cap. 1: astrolabii circulos etc., Anfang: »Primum membrum est armilla suspensoria», wie es scheint identisch mit der *Practica* ibid. 98^{25} (p. 110), wo in Klammer ROBERT GROSTESTE (cf. TANNER p. 349, bei COWIE, *Catal. St. Johns Coll.* p. 60).

[8]) Hiernach ist in Biblioth. Mathem. 1888, 117 Ende, Anm. 15 zu modificiren (Anm. 17 lies: Nicht 56). — Die lateinische Übersetzung beginnt ohne Vorwort des Commentators mit dem Vorworte des PTOLEMÄUS: »Dixit PTOLEMÆUS jam scripsi tibi ... de hoc quod operantur stellae in hoc seculo». ALBERT MAGNUS citirt eine *andere* Übersetzung, anf.: »Mundanorum». Ms. Amplon., Fol. 379[r] Seite 266 beginnt: »Mundanorum ad hoc (so) et admutatio»; ist das ein Vorwort des Übersetzers? Der Commentar soll beginnen: »Item(!) premisi libros in quibus tractavi de *impressionibus*», das ist aber offenbar das Vorwort des PTOLEMÄUS. Ich sehe hier keine Spur von HALY's Commentar, der in den übrigen Mss. (Index unter PTOLEMÄUS S. 922) übereinstimmen. Was also im Catalog und im Index von einer *versio antiqua* und *nova* gesagt wird, ist wohl nur auf den Text des PTOLEMÄUS zu beschränken. Im Commentar endet n. 57 »permuta medicinas aegroto. Aliter distinxit ZAEL. Ascendens etc.». Der letzte Satz scheint ein Zusatz, da er sich im Hebräischen nicht findet.

[9]) Über die dort erwähnten Verstümmelungen des persischen Königsnamens JEZDAGIRT (Jerdagut, Jezdagut) s. auch Zeitschrift für Mathem. **16**, 1871, 370 (unter Jergis), 376; Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **18**, 1864, 91 A. 33; meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* p. 95; *Études sur Zarkali* p. 105, 124.

[10]) In Bezug af die *Reihenfolge* der Artikel halte ich mich nicht streng an die alphabetische der Titel im Index, wo dieselben sehr oft in anderer Wortstellung als in den mss. gegeben sind, meist zur Hervorhebung einer Hauptsache. Da meine Besprechung nur wenige Titel eines Autors betrifft, und diese durch Cursivschrift hervorgehoben sind, ausserdem diese und andere mss. in den Titeln variiren, so kommt es auf die Reihenfolge weniger als auf *Zusammengehörigkeit* an.

Zum Nachfolgenden habe ich die »*Novem Judices*» ed. 1509 (s. oben Anm. 7) verglichen, welche von S. 3 an Alles nach den 12 *domus* ordnen; jedoch sind die dem Index (zu Anfang) zu Grunde liegenden Überschriften nicht überall correct; z. B. f. 43[3] [Hochziffer bedeutet die 4 Columnen der foll.]: »de luminum signif. ... circa rerum venalium statum DOROTHEUS»; aber Anfang: »Pro venalium ... *Mesehalla* decet» (lies: docet); f. 90—96: »de his quae extra 12 domus assumuntur»; fol. 93[3] Überschrift:

»De imbribus DOROTHEUS«, aber am Anfang: »Item Arabum astrologos (so!) *abuali* quidem peritiss. de pluviarum« etc. Das Buch des ABENRAGEL (HALY, *de judiciis* etc.; ich benutze ed. 1551) ist ebenfalls nach den Häusern geordnet; I Cap. 33 »de domo« soll heissen: »de secundo domo«. Die Commentare zu *Centiloquium* und *Quadripartitum* bieten hier keine Hilfe. In letzterem zur geografischen Stelle II, 3, wird die Geographie des PTOLOMAEUS bezeichnet als »lib. quem fecit de *figura habitationis terrae*« (cf. ALBATEGNI f. 12[b] u. 13: »lib. *figura terrae*«, und »qui vocatur geographia«), im Vorwort als »*mappa mundi*«, s. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 10; meine Abhandl. über ALFARABI p. 175; wo ich auch die Stelle des Vorwortes: »testimonium antiquorum *Lapidionum* de Alexandria« citire; was soll dieses, wahrscheinlich corrumpirte, Wort bedeuten? Am Ende von III schaltet ALI ein langes Stück (f. 46[1-3] ed. 1519) aus einem *lib. de accidentibus* von HERMES ein, anf.: »Ordina significatores, primo fortiones, postremo debiliores«. Hinter dem Commentar findet sich ein Stück »*Scientia projectionis radiorum*«, anf.: »Cum projectionem radiorum stellarum scire volueris: scias gradum ascendentem«; Ende: »erit locus radiationis equate«. Ist dieses Stück über den Strahlenwurf (nicht Refraction, s. Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **25**, 1871, 415) — womit der Ausdruck »sub radiis« zusammenhängt (s. unter dem Titel »de virtute Saturni«) — ein Anhang des ALI? Man findet es separat in ms. Vat. ,Reg. Sueciae 1285, ms. Amplon. Qu. 374[16] (S. 626, gehört im Index zu p. 941 col. 1); verschieden scheint: »Notae de projectione rad.«, ms. Qu. 355[15] (S. 595). Ich vermuthe einen Zusammenhang mit ALI, weil auf dieses Stück die 3 Nativitäten folgen, deren 1. die des ALI selbst ist.

[11]) Cf. WÜSTENFELD, *Übersetzungen arabischer Werke* S. 30; CASIRI, *Bibliotheca arabica* II, 347. ALCABITIUS citirt »Alenduzgaz«, was SCALIGER ebenfalls für einen Titel gehalten hatte. Es ist der Jude AL-ANDRUZAGAR, worüber s. meine Notiz in der Monatsschrift für jüdische Geschichte 1884, S. 480.

[12]) Ms. Digby 47 allein nennt als Übersetzer GERARD VON CREMONA, und LECLERC l. c. II, 427 hält eine doppelte Übersetzung für möglich; die Analogie des *Secretum secretorum* passt nicht, da JOHANN nur den diaetetischen Theil übersetzt hat (s. unten Anm. 14). Unter ALCHABITIUS (II, 524)

nennt LECLERC GERARD nicht. Der, von BONCOMPAGNI mitgetheilte Anfang des ms. Digby liess mich schon in Zeitschr. für Mathem. 10, 1866, 361 an GERARD zweifeln; MACRAY (Catalog 42, 43) hat nun die Identität des ms. mit der edirten Übersetzung constatirt. Da haben wir wiederum ein Beispiel willkürlicher Beilegung und zwar in einem alten ms. (XIV. Jahrh.). — LECLERC l. c. II, 442, 444 wiederholt die längst widerlegten Angaben von einem ABEN-RAGEL und ALCHIBITIUS zur Zeit ALFONS X.

[13]) Dieser Namen ist hinzuzufügen bei GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichtes in Deutschland* S. 169. JOHANN's *Computus* ist v. J. *1297* in ms. Qu. 365[20] (S. 611), falsch 1279 in Duod. 19[12] (S. 777).

[14]) Verwirrend sind die Angaben über JOHANN's Übersetzung von *Pseudo-Aristoteles, de Regimine Principum sive Secretum secretorum,* wovon aber JOHANN nur die *Hygiene* übersetzte (edirt von SUCHIER, *Denkmäler Provenzal. Lit.* I, 1883); im Index unter JOHANN p. 909 ist Qu. 351[39] (S. 590) hinzuzufügen (unter ARISTOTELES p. 881 ist JOHANN 2 mal erkannt). Der *Commentar* dazu, Qu. 310[8] (S. 545) ist nicht von JOHANN und unbekannt. (FOERSTER's Bibliographie in Centralblatt für Bibliothekswesen kennt die mss. Amplon. überhaupt nicht.) Hingegen ist das unter JOHANNES HISPALENSIS aufgeführte *Regimen singulare sanitatis* (wovon mss. in Berlin, Cambridge, Cajo-Gonv., München) nicht von ihm, da er im Vorwort zu *Pseudo-Aristoteles* ausdrücklich sagt: »ac si essem medicus«; die *ganze* Note bei FOERSTER, Centralbl. für Bibliotheksw. p. 2 ist meiner mündlichen Mittheilung entnommen, und schon früher in meinem Werke über die hebräischen Übersetzungen gedruckt.

On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas.

By G. B. Halsted in Austin, Tex.

The course on the history of mathematics in the University of Texas continues throughout the academic year and the attempt is made to devote to it an average of two hours per week. The Programme is not so symmetrical as that published by Eneström (Biblioth. Mathem. 1890, 1—10). Some developments there indicated are entirely omitted because the students have not mastered the corresponding subjects. Some parts are greatly expanded because the special tastes and researches of the professor enable him to treat them more authoritatively and at first hand. For example, time is given to the general and special formulas of Mensuration and for Mass-center. Again, extra time is given to the translations of Euclid, showing that Campanus made probably no translation, but simply copied Adelard's; and that the first translation into English by Henricus Billingsley used, in addition to the Latin of Adelard, the *Editio princeps* in Greek. Time is taken to prove that the date given by some Historians of mathematics for the publication by Robert Recorde of the equality sign = is wrong and should be 1557. In his treatise entitled *The Whetstone of Witte* he remarks: »And to avoide the tediouse repetition of these woordes: *is equalle to:* I will sette as I doe often in woorke use, a pair of paralleles, or Gemowe lines of one length, thus: =, because noe 2 thynges can be more equalle».

A great expansion is made on the subject of Hyperspaces and non-Euclidean geometry, where the professor's three papers published in the American journal of mathematics, Vol. 1—2 (1878—1879) are expanded and expounded.

In connection with Hamilton's *Quaternions* and Grassmann's *Ausdehnungslehre,* very special attention is directed to the Algebra of Logic, particularly those of Boole, Macfarlane and Schröder. This splendid subject, originated and greatly developed in English seems to be destined to give the scientific language of the world.

Finally the subject of Linkage, wholly modern, is treated historically in connection with the mechanical description of curves, the graphic solution of equations and the general problems of kinematic.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. B. Fine. The number-system of algebra treated theoretically and historically. Boston and New York, Leach, Schewell & Sanborn 1891. 8°, IX + 131 p.

Aujourd'hui les recherches scientifiques dans le domaine des mathématiques sont précédées très souvent par une introduction historique relative à la question dont il s'agit, et ce fait prouve que l'importance de l'étude de l'histoire des mathématiques commence à être de plus en plus reconnue. Mais pour que la nécessicité en soit définitivement admise, il faut aussi que l'histoire des différentes branches des mathématiques fasse partie intégrante des traités qui sont destinés pour les étudiants. Pour des raisons pédagogiques, la partie historique n'y doit pas précéder l'exposition systématique, mais être mise à la fin ou répartie sur les différents chapitres de la partie systématique.

Parmi les traités peu nombreux qui contiennent en même temps une exposition systématique et une exposition historique, nous avons à ranger aussi *The number-system of algebra* que M. Fine vient de publier, et qui peut être considéré comme une introduction à la théorie des fonctions d'une variable. La partie historique, la seule qui nous occupera dans cette brève analyse, est réunie à la fin du traité et prend une place assez considérable (p. 79—131). M. Fine commence par une notice sur les signes numéraux et les systèmes de numération pour passer à l'histoire des fractions et des grandeurs irrationnelles chez les anciens. Ensuite il donne un résumé des progrès de l'algèbre depuis les temps les plus reculés jusqu'à Descartes inclusivement, et finit par quelques renseignements sur le développement des notions fondamentales de l'algèbre depuis Newton jusqu'à Weierstrass et G. Cantor.

Pour l'histoire de l'antiquité, du moyen âge et de la renaissance jusque vers 1600, M. Fine a suivi principalement les ouvrages connus de Moritz Cantor et Hankel. Pour les temps modernes il a consulté en général les sources mêmes.

N'ayant pas eu recours à la littérature la plus récente sur divers points de l'histoire des mathématiques, M. Fine a reproduit quelques indications inexactes ou peu probables, p. ex. que l'*Algorithmus demonstratus* publié en 1534 a pour auteur Regiomontanus, et que l'introduction du signe $\div$ a eu lieu en 1630 par Pell, mais ces erreurs sont peu importantes, et, à notre avis, l'exposition historique de M. Fine peut être employée avec avantage par les étudiants.

Stockholm. G. Eneström.

Gino Loria. Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico. (Memorie della r. accad. delle scienze di Torino 40₂.) Torino 1890. 4°, 79 p. + 2 pl.

Herr Loria bietet uns in vorliegender Abhandlung die Früchte umfassender Studien auf dem Gebiete der griechischen Geometrie, und zwar speciell über das goldene Zeitalter derselben, das euklidische Jahrhundert, in welchem der griechische Geist eine mathematische Produktivität von unerhörter Potenz an den Tag legte.

Ist es schon an sich erfreulich, dass der Herr Verf. da einsetzt, wo Herrn Allman's Werk abschliesst, und er die von Herrn Cantor vor 25 Jahren behandelte Epoche nach dem gegenwärtigen, trotz zahlreicher neuerer Arbeiten im grossen und ganzen freilich wenig veränderten Stande darstellt, so muss überdies jeden Verehrer der alten Geistesheroen die Begeisterung sympathisch berühren, mit welcher er den Jüngern der Wissenschaft die geistreichen Methoden und die eminenten Resultate jener Koryphäen vor Augen zu führen bestrebt ist und auch den blindesten Anbeter der Neuzeit zu der Überzeugung bringen möchte, dass ohne die epochemachenden Werke des Eukleides, Archimedes und Apollonios auch die unsterblichen Leistungen eines Newton, Leibnitz, Poncelet, Steiner, Chasles und anderer wahrscheinlich nie zu stande gekommen wären. Sagt ja doch Leibnitz selbst: »Qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur». Vielleicht veranlassen H. Loria's Ausführungen auch den einen oder andern derjenigen Vertreter der exakten Wissenschaften, welche den Werken der Alten und den geschichtlich-mathematischen Forschungen nur eine sehr untergeordnete Bedeutung für die Gegenwart zuerkennen, im Sinne des H. Verf. der Frage näher zu treten, ob es nicht eine Ungerechtigkeit und eine Folge irrtümlicher Schätzung sei, gewisse moderne Publikationen von zweifelhaftem Werte den Quellen unserer ganzen jetzigen Erkenntnis vorzuziehen, während doch die Erfahrung gezeigt hat, dass, so oft man zum Studium der alten Weisheit zurückgekehrt ist, eine neue Welle jungen Blutes den starren Körper der Wissenschaft durchströmt hat: »il faut reculer pour mieux sauter»!

Die Abhandlung selbst zerfällt in 7 Abschnitte, welche die Überschriften tragen: I. Euclide (p. 5—25); II. Archimede (p. 26—46); III. Eratostene (p. 47—49); IV. Apollonio (p. 49—69); V. Ipsicle (p. 69—71); VI. Nicomede, Diocle, Perseo (p. 71—77) und VII. Zenodoro (p. 78).

Über die griechische Mathematik hat sich im Laufe der Zeit eine gewaltige Litteratur angesammelt, und ein Anfänger auf diesem Gebiete, der bei einer geschichtlichen Darstellung sich nicht mit blosem Aufzählen von Autoren, deren Schriften und Forschungsresultaten, von Erfindungen und Hypothesen begnügen, sondern auch sein eigenes Urteil zur Geltung bringen will, hat bei dem Bestreben, neben den Quellen der Alten auch alle wichtigen Erscheinungen der Neuzeit zu berücksichtigen, wahrlich keine leichte Arbeit. Soweit wir es zu beurteilen vermögen, hat H. LORIA seine Aufgabe trefflich gelöst und er darf sich für seine viele Mühe wohl des Dankes aller Freunde geschichtlich-mathematischer Forschung versichert halten.

Wie es schon H. CANTOR in seiner Besprechung der vorliegenden Abhandlung (Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 29—30) ausspricht, hat H. LORIA bei dem notorischen Mangel wesentlich neuer Entdeckungen über die zu behandelnde Epoche, ausser dem geistreichen Werke ZEUTHEN's die mittelbar für seinen Zweck wichtigen Arbeiten über neue Auffassungen betreffs der Zeit vor und nach dem grossen Jahrhundert in seiner Schrift zur Kenntnis gebracht, und es wird die Brauchbarkeit der letzteren bei geschichtlich-mathematischen Studien dadurch noch erhöht. Bezüglich der Quellen von EUKLEIDES' Elementen werden auch die einschlägigen Hypothesen und Forschungsresultate der Herren ALLMAN, CANTOR, HEIBERG, TANNERY und anderer angeführt; wir verweisen noch auf die Recension des H. HULTSCH über das ALLMAN'sche Werk in der Biblioth. Mathem. 1889, 85—92, sowie auf des Berichterstatters seitdem erschienene Monographie II über EUDOXOS. Zu der Schrift »περὶ διαιρέσεων» (p. 20) möchten wir zu SAVILIUS und WOEPCKE noch einen Restitutionsversuch erwähnen: die *Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Eukleides über die Teilung der Figuren* des H. OFTERDINGER (Ulm 1853). Die p. 42 citierte Abhandlung desselben Verf. betitelt sich: *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik* (Ulm 1860).

BACHETS 45. Epigramm wird von BRUNCK ausdrücklich dem EUKLEIDES zugeschrieben; wir stimmen H. LORIA's Bemerkung (p. 25) bei, dass EUKLEIDES dasselbe mit Leichtigkeit lösen konnte, und halten es sogar hier, wie in allen ähnlichen Fällen (zum Beispiel auch bezüglich des berühmten Rinderproblems des ARCHIMEDES, cf. p. 44—46) für das natürlichste, einem Schriftsteller die ihm von glaubwürdiger Seite zugeschriebenen Erfindungen, mögen sie noch so geringfügig scheinen, so lange energisch zu wahren, bis zwingende Gründe es verbieten.

H. Loria kann nicht in den Verdacht kommen, sich einer Unehrerbietigkeit gegen Eukleides schuldig zu machen, wenn er darauf hinweist, dass man den Euklid-kultus auch nicht übertreiben und für die modernen Schulen sich den Fortschritten der Neuzeit nicht verschliessen dürfe. Die heutigen Mathematiker haben dafür zu sorgen, dass die Saat jenes erhabenen Meisters auch aufgehe; an der Hand einer 2000-jährigen Erfahrung werden wir aber sein Werk dadurch am besten vollenden, dass wir es in Einklang bringen mit den Bedürfnissen und der Intelligenz der Menschen der Jetztzeit. Oder sollte es etwa den modernen Pädagogen nicht möglich sein, eine veraltete Lehrmethode zu beseitigen, ohne gleichzeitig selber den Zusammenhang mit dem ebenso mühevollen, wie lehrreichen Entwicklungsgang menschlicher Forschung preiszugeben? Bei dieser Betrachtung erfahren wir nun, wie der elementargeometrische Unterricht in den beiden Ländern geregelt wurde, welche sich am pietätvollsten nach dieser Richtung gezeigt hatten. In Italien, wo die euklidischen Elemente eine Zeit lang gewissermassen als Desinfektionsmittel der von minderwertigen Machwerken erfüllten Atmosphäre als Schulbuch eingeführt wurden, herrscht jetzt, nachdem die Luft reiner geworden, eine grössere Freiheit in der Auswahl; in England, der letzten Citadelle, in der sich der greise Alexandriner verschanzte, hat sich ein Verein zur Förderung geometrischer Unterrichtsmethoden gegründet, der nach des H. Verf. Ansicht erfreulicherweise ebenfalls den Sieg davontrug in dem Kampfe gegen den euklidischen Despotismus.

Beim Übergang von Eukleides zu Archimedes stellt der H. Verf. eine vergleichende Betrachtung an über die verschiedene Bedeutung dieser beiden grossen Mathematiker und scheidet überhaupt die antiken Gelehrten in zwei Gruppen; die einen, unter ihnen vor allem Archimedes, beschäftigten sich mit der Lösung besonderer Aufgaben, mit dem Studium origineller, auf ein einzelnes Problem, oder auf eine ganze Klasse von Untersuchungen anwendbarer Methoden; andere dagegen, und als deren Repräsentant Eukleides, brachten das bereits vorhandene Material unter einen gemeinsamen wissenschaftlichen Gesichtspunkt, verteilten den Stoff harmonisch, ergänzten etwaige Lücken und schafften so ein organisches Ganzes. Auch die verschiedenen äusseren Lebensumstände beider motivieren, abgesehen von Archimed's höherer Intelligenz, ihre verschiedene Denkrichtung. Archimedes war durch die Gunst der Verhältnisse rein Mann der Wissenschaft und widmete sich nach seiner Rückkehr von Alexandria nach Syrakus ganz und gar den mathematischen

Studien, in welche er in jener berühmten Schule von den Nachfolgern des EUKLEIDES eingeführt worden war; den EUKLEIDES dagegen führten seine Lehramtspflichten einer mehr didaktischen Richtung zu. Eine natürliche Folge von ihrem schwierigeren Inhalte ist auch das geringere Studium, das man heutzutage den ohnehin nur für mathematisch bereits Geübtere bestimmten Werken des ARCHIMEDES angedeihen lässt. Von der ausgebreiteten Kenntnis der euklidischen Schriften aber, welche der H. Verf. allen halbwegs Gebildeten zuschreibt, konnten wir uns noch nicht überzeugen. So viel wird man indessen mit Bestimmtheit behaupten dürfen, dass wenigstens die jüngeren Mathematiker sich in grösserer Anzahl an den antiken Geistesschätzen ergötzen würden, wenn nicht die meisten Hochschulen einer Pflege des historisch-mathematischen Elementes gänzlich entbehrten.

Ein grösserer Abschnitt ist selbstverständlich auch dem APOLLONIOS von Pergä, dem »Geometer κατ᾽ ἐξοχήν» gewidmet. Bei der Erwähnung der von einander abweichenden Ansichten der Herren GÜNTHER und ZEUTHEN über die Anfänge des Koordinatenprincips p. 51, Anm. 5 vermissen wir die Anführung der von H. GÜNTHER in der Neuen philologischen Rundschau 1888, 394—396 veröffentlichten Erwiederung auf H. ZEUTHEN's Note.

Dass H. LORIA die Mathematiker HYPSIKLES, NIKOMEDES, DIOKLES, PERSEUS und ZENODOROS, über deren Zeitalter sich in den Quellen keine genauen Angaben finden, als der zu behandelnden Periode zugehörig betrachtet, entspricht dem gegenwärtigen historischen Standpunkte. Den SERENUS, über dessen Lebenszeit die Ansichten der Geschichtsforscher noch geteilt sind, schliesst er, ohne denselben überhaupt zu erwähnen, von der Betrachtung aus; und in der That lässt dessen ganz ungriechischer Name vermuten, dass er einer etwas späteren Zeit angehört, so sehr man nach der Art seiner Schriften geneigt wäre, ihn unter die ersten Nachfolger des APOLLONIOS einzureihen. — Es ist eine längst ausgemachte Sache, dass die von jeher in den meisten EUKLIDausgaben als XIV. und XV. Buch — in H. LORIA's Abhandlung p. 69 steht, wohl infolge eines Druckversehens, XIII. und XIV. — angefügten 2 Bücher nicht von EUKLEIDES herrühren, sondern dass das erstere (XIV) unbestreitbares Eigentum des Alexandriners HYPSIKLES ist, während der unbekannte Verfasser des letzteren (XV) im 5. oder 6. Jahrh. n. Chr. gelebt haben muss. Es wäre sehr zu wünschen, dass dieser auch von H. LORIA ganz richtig zur Kenntnis gebrachte Thatbestand endlich einmal feststehe, und die veraltete, aber leider immer

noch hie und da auftauchende Tradition, nach welcher auch Buch XV dem Hysikles zugeschrieben wird, in neueren Werken nicht mehr wiederkehre.

Während die Konchoide des Nikomedes und die Kissoide des Diokles ihre Entstehung der Würfelverdoppelung und der Trisektion des Winkels verdankten, entsprangen die spirischen Linien des Perseus wahrscheinlich dem, freilich vergeblichen, Bestreben, den Schnittkurven anderer als der 3 gewöhnlichen krummen Oberflächen ähnliche Triumphe abzugewinnen, wie den Kegelschnitten. In H. Loria's Bemerkung, dass die spirische Ringfläche (der Wulst) bereits von Archytas betrachtet wurde, dürfte der Ausdruck »già» durch »la prima volta» ersetzt werden, mit Rücksicht auf H. Cantor's Recension unserer II. Monographie über Eudoxos in der Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 77—78. — In Bezug auf unsere Behandlung (a. a. O.) der Lösung des Archytas mittelst des Durchschnittes »Cylinder-Kegel-Wulst» machte uns H. Cantor seinerzeit brieflich darauf aufmerksam, dass er es bereits seit mehreren Jahren in seinem Kollege zu betonen pflege, in der Benützung des Wulstes durch Archytas habe für Perseus die Veranlassung zur Beschäftigung mit den spirischen Schnitten gelegen. Den zu diesem Betreffe von H. Loria citierten Aufsätzen von Bretschneider, Chasles und Tannery fügen wir noch die von Quetelet, Montucla, Klügel, Schiaparelli und Knoche-Märker bei (vgl. unsere I. Monographie über Eudoxos p. 55, wo wir ausserdem auch auf die Ähnlichkeit der Projektion der eudoxischen Hippopede mit einer Gattung der spirischen Linien hingewiesen haben). Die Frage, ob Perseus mit der von Proklos ihm zugestandenen Anwendung des »σύμπτωμα», welches den Alten die Gleichung der analytischen Geometrie ersetzte, seine Kurven auch theoretisch behandelte und ob er insbesondere die Eigenschaft $r \cdot r' = a^2$ der Cassini-Kurve kannte, bleibt zunächst noch unentschieden.

Mit Zenodoros, von dem eine Schrift über isoperimetrische Figuren in mehrfacher Überlieferung erhalten ist, schliesst H. Loria seine Abhandlung, weil die späteren antiken Schriftsteller eine ganz andere Richtung bei ihren Studien befolgten. Die einen widmeten sich der Anwendung der Geometrie auf Geodäsie und Astronomie und trugen nur ausnahmsweise zur Förderung der Geometrie selbst bei, andere wandten sich der Zahlenlehre zu und repräsentieren gewissermassen das goldene Zeitalter der griechischen Arithmetik; wieder andere endlich beschränkten sich auf die Auslegung der klassischen Werke ihrer Vorgänger, wo-

durch der allmähliche tiefe Verfall sich einleitete. — Bei diesem charakteristischen Ausblick auf den Stand der nachapollonischen griechischen Mathematik erinnert man sich unwillkürlich an die Worte, mit denen H. TANNERY im Hinblick auf den gewaltigen Sturz der antiken Wissenschaften von dem höchsten Gipfel bis in den tiefsten Abgrund es für die Gegenwart als wahres Problem der Geschichte der alten Mathematik bezeichnet: »de préciser les circonstances et de déterminer les causes de la décadence passée, en vue de connaître les précautions à prendre pour éviter une décadence future.»

Wir glauben unseren Bericht nicht besser schliessen zu können, als mit den Worten des H. Verfassers: »Wenn wir zum Schlusse noch einen Blick werfen auf den von der Geometrie in der griechisch-alexandrinischen Periode zurückgelegten Weg, so sehen wir, dass derselbe sehr bedeutend ist. In dieser Epoche erhielten die Elemente ihre definitive Ordnung; die Exhaustionsmethode erlangte eine vorher nicht gekannte Ausdehnung und bahnte von weitem den Infinitesimalkalkul an; neue geometrische Formen wurden studiert, teils in der Ebene, teils im Raume. Die Theorie der Kegelschnitte bildete sich nicht nur um und nahm jene Gestalt an, welche sie während einer langen Reihe von Jahrhunderten zu erhalten bestimmt war, sondern sie erreichte einen solchen Grad der Vollendung, dass wenig Wichtiges nötig war, um sie auf ihren gegenwärtigen Stand zu bringen; die Quadratur des Zirkels, welche so grosse Geister beschäftigt und so viele unfruchtbare Versuche gekostet hatte, wurde von dem alleinigen Gesichtspunkte aus betrachtet, welcher bei den damaligen algebraischen Kenntnissen zu einer Lösung führen konnte; neue Fragen tauchten auf; neue Methoden oder neue Versuche wurden zur Überwindung der sich dabei darbietenden Schwierigkeit ausgedacht; und, um nichts auszulassen, das Niveau des mathematischen Unterrichts erreichte eine so eminente Höhe, dass die Gelehrten sich nicht damit begnügten, zum Gebrauche ihrer Schüler die bereits gemachten Entdeckungen zu erklären, sondern auch denen den Weg zu ebnen suchten, die sich zur Entdeckung neuer Wahrheiten rüsteten.»

Es würde uns sehr freuen, wenn durch unsere vorstehenden Zeilen recht viele Freunde der Wissenschaft in Versuchung kämen, sich den gleichen hohen Genuss zu verschaffen, welchen uns die Lektüre von H. LORIA's gediegener Schrift bereitete.

Dinkelsbühl. H. KÜNSSBERG.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1891: 1. — [Analyse de l'année 1889:] Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1891, 77—83. [V. V. BOBYNIN.]

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
9 (1890), 1891: 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
36 (1891): 2.

Ball, W. W. R., On Newton's classification of cubic curves.
London, Mathem. soc., Transactions **22**, 1891, 104—143.

Bertrand, J., Eloge historique de Louis Poinsot.
Revue générale des sciences **1**, 1890, 753—760.

Bielinski, J., Stan nauk matematyczno-fizycznych za czasów wszechnicy Wileńskiej. Szkic bibliograficzny.
Praze matematyczno-fisyczne (Warszawa) **2**, 1890, 265—432. — Les sciences mathématiques et physiques à l'époque de l'université de Wilna. Esquisse bibliographique.

Bierens de Haan, D., Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas.
Biblioth. Mathem. 1891, 13—22.

Birkenmajer, L., Optyka Klaudyusza Ptolomeusza.
Wszechswiat (Warszawa) **7**, 1888, 190—192. — Sur l'Optique de PTOLEMAEUS. — [Analyse:] Praze matematyczno-fisyczne **2**, 1890, 485. (S. K.)

БОБЫНИНЪ, В. В., Лекціи исторіи математики.
8°. — BOBYNIN, V. V., Leçons d'histoire des mathématiques. — Appendice au journal: Fiziko-matem. naouki. — Ce traité d'histoire des mathématiques paraîtra en deux volumes dont le premier embrassera l'antiquité et le moyen-âge et le second sera consacré aux temps modernes. Jusqu'à présent il n'en a paru que les pages 1—16 du premier tome et les pages 1—32 du second tome.

Cajori, F., A mathematical text-book of the last century.
Colorado, College, Studies **1**, 1890, 27—33. — Sur un traité de mathématiques par J. WARD, intitulé: *Young mathematicians guide* (London 1707).

Curtze, M., Commentar zu dem »Tractatus de numeris datis« des Jordanus Nemorarius. (Fortsetzung.)
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 41—63.

Discorsi pronunciati ai funerali di Felice Casorati. Pavia 1890. 4°. 15 p.

Dziwinski, P., O algorytmie Bernarda Wojewódki.
Muzeum (Lemberg) 5. 1889. 20—27. 98—104. 173—178. 321—326. — Sur l'arithmétique de B. Wojewodki. — [Analyse:] Prace matematyczno-fisyczne 2. 1890. 520. (S. D.)

Dziwinski, P., Rys dzialalnosci naukowéj i nauczycielskiéj Wawrzynca Zmurki.
Prace matematyczno-fisyczne 2. 1890. 433—448. — Les oeuvres scientifiques et pédagogiques de W. Zmurko.

Favaro, A., Notiza storica sulle applicazioni della spirale logaritmica.
Biblioth. Mathem. 1891. 23—25.

Favaro, A., Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografia delle matematiche.
Rivista di matematica 1891. 72—77. — Sur le plan de classification adopté pour les écrits d'histoire des mathématiques par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques.

Favaro, A., Galileo Galilei e la presentazione del cannocchiale alla republica veneta.
Nuovo archivio Veneto (Venezia) 1. 1891. 21 p.

Fermat, P., Oeuvres, publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome premier. Oeuvres mathématiques diverses; observations sur Diophante. Paris 1891.
4°. 37 + 441 p.

Fine, H. B., The number-system of algebra treated theoretically and historically. New York, Leach 1891.
8°. 9 + 131 p. — [1 doll.] — La partie historique occupe les pages 79—131.

Galdeano, Z. G., La evolución de la geometría proyectiva.
El progreso matem. 1. 1891. 3—8. 26—30. 54—57. 106—108.

Galdeano, Z. G., Sofia de Kowalevski.
El progreso matem. 1. 1891. 88—90.

°**Huygens, Chr.,** Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660 —1661. La Haye, Nijhoff 1890.
4°. (6) + 591 + (2) p. + 2 facsim. — [Analyse:] Nature (London) 43. 1891. 433—434. (A. M. Clerke.) — Deutsche Litteraturz. 12. 1891. 279—280. (E. Gerland.)

Kerbedz, E. de, Sophie de Kowalevski.
Palermo. Circolo matem., Rendiconti 5. 1891. 121—128.

Kronecker, L., Sophie von Kowalevsky.
Journ. für Mathem. 108 1891. 88.

Paige, C., Un astronome belge du XVII^e siècle, Godefroid Wendelin.
Brux., Acad. d. sc., Bulletin 20_3. 1890. 709—727.

Loria, G., Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati.
Biblioth. Mathem. 1891, 1—12.

Novarese, E., Sofia Kowalevski.
Rivista di matem. **1**, 1891, 21—22.

Picard, E., Revue annuelle d'analyse.
Revue générale des sciences **1**, 1890, 702—708. — [Reproduite:] *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 5, 1891, 80—90.

Rosières, La découverte de la cycloïde.
Revue générale des sciences **1**, 1890, 431—433.

Tannery, P., Les autographes de Descartes à la bibliothèque nationale.
Bullet. des sc. mathém. **15**$_2$, 1891, 69—75.

Question 33 [sur les différentes éditions d'un ecrit sur l'astrolabe attribué à Prosdocimo de' Beldomandi].
Biblioth. Mathem. 1891, 32. (G. Eneström.)

Addition à la question 31 [sur un manuscrit de Guglielmo de Lunis].
Biblioth. Mathem. 1891, 32. (G. Eneström.)

Pantobiblion. Internationale Bibliographie der polytechnischen Wissenschaften. Monatliche Übersicht der auf diesen Gebieten neu erschienenen Buch- und Journalliteratur. Redacteur: A. Kerscha. 1: 1. St. Petersburg 1891.
8°, IV p. + 288 col. — [Prix par an: 24 M.] — Les col. 1—6 contiennent une liste de publications nouvelles dans le domaine des mathématiques pures, et aux col. 161—163 ou trouve l'indication du contenu de quelques journaux mathématiques.

Baraniecki, M. A., Algoritmus, to jest nauka liczby polska rzecza wydana przez ksiedza Tomasza Klosa 1538. Krakow 1889. 8°.
Praze matematyczno-fisyczne **2**, 1890, 519—520. (S. D.)

Cajori, F., The teaching and history of mathematics in the United States. (Bureau of education, Circulars of information, Washington 1890.)
Biblioth. Mathem. 1891, 26—27. (G. Eneström.)

Eneström, G., Emanuel Svedenborg såsom matematiker. (Bihang till Vetensk. Akad. handlingar.) Stockholm 1890. 8°.
Finsk tidskrift (Helsingfors) **30**, 1891, 236—237. (A. R—y.)

Eneström, G., Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. (Biblioth. Mathem. 1890.)
Finsk tidskrift **30**, 1891, 236. (A. R—y.)

Fink, K., Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik, mit Hinweis auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen, Laupp 1890. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 75—77. (Cantor.)

KÜNSSBERG, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. II. Teil. (Programm der k. bayer. Realschule zu Dinkelsbühl.) Dinkelsbühl 1890. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 77—78. (CANTOR.)

ROSENBERGER, F., Die Geschichte der Physik in ihren Grundzügen, mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. Dritter Theil. Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren. Braunschweig, Vieweg 1887—1890. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abth. 207—208. (S. GÜNTHER.)

RUDIO, F., Das Problem von der Quadratur des Zirkels. (Vierteljahrssch. d. naturf. Gesellsch. in Zürich 1890.)
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 30—31. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1891. 28—32. — Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1891. 84—96. — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

34. On demande une table méthodique de toutes les courbes auxquelles il y a été donné des noms particuliers, avec une notice succincte, pour chacune d'entre elles, sur sa forme, son équation et ses propriétés générales ainsi que sur les ouvrages où elle a été étudiée pour la première fois.*

(Académie des sciences de Madrid.)

* Cette question, essentiellement historique, a éte mise au concours pour le prix académique de l'année 1891.

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1891.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. № 3.

NEUE FOLGE. 5. — NOUVELLE SÉRIE. 5.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über die mathematischen Handschriften der amploni-anischen Sammlung. (Schluss.)

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Epistola de Conjunctionibus et eclipsibus, übersetzt von JOHANNES HISPALENSIS Fol. 395[14] (S. 280) und in 2 anderen Mss., in 12 Capp., ist identisch mit: *De Revolutionibus stellarum,* Oct. 88[19] (S. 746), Anfang.: »Quia deus»; gedruckt als *Epistola eclipsium et de conjunctionibus et in revolut.,* und unter dem Titel (aus Überschrift von Cap. 1) *De ratione circuli et stellarum.* Es wird auch citirt unter dem Titel: *De Conjunctionibus planetarum* und anderen, die ich hier übergehe. Der Namen PLATO am Ende von Ms. Digby 51[21] bedeutet wohl eher einen Abschreiber als den Übersetzer aus Tivoli. Am Schlusse, auch in Ms. Amplon. Qu. 361[10] (S. 602) heisst es: »et est ex *secretis* scientiae astrorum»; danach ist auch »*scientiis* scientiae» in Ms. Canon. misc. 517[11] zu emendiren: »secretis scientiae», und das Buch *de Scientiis* etc. bei WÜSTENFELD (*Übersetzungen* etc. S. 35 n. 19) zu streichen. Der angebliche ALCHABITIUS, *de Revolutione* etc., welcher in Ms. Canon. folgt, ist MASCHALLAH's gedrucktes Buch: *Super significationes planetarum in nativitate.*

De hominum cogitationibus et intentionibus, Qu. 348[9] (S. 582), 361[30b] (S. 604) »de Cognitione» falsch für »de cogitatione». Herr SCHUM identificirt Qu. 379[2] (S. 636) *de Intentionibus et cogitationibus* etc. trotz des verschiedenen Anfanges wegen des gleichen Endes. Dieses Ms. muss also die in Zeitschr. für

Mathem. **16**, 1871, S. 379 unterschiedenen Schriften F. und G. enthalten. Hier zeigt sich die Unentbehrlichkeit der Vergleichung der Drucke und verschiedenen Cataloge, wie auch der hebräischen Übersetzung, welche sich in den Schriften des IBN ESRA findet und vielleicht von ihm herrührt. Beiden Stücken liegt vielleicht das arabische, von KIFTI erwähnte Buch der *Fragen*, welches in einer Bibliothek in Constantinopel erhalten ist, zu Grunde. Man muss demnach unterscheiden:

a) *De intentionibus et cogitationibus animae quaerentis*, beginnend: »Scito quod aspiciens [oder »astrologus«, oder »id est astrologus«] potest errare«; davon sind 12 Zeilen unter dem Titel *De interpretationibus* gedruckt, soll aber heissen *de interrogationibus;* einige Mss. fügen hinzu: »inveni eum extractum de libro suo de interrogationibus«; folglich ist identisch *Principium libri interpretationum* Ms. Amplon. Fol. 395^{22} (S. 280), wo falsch »exactum« für »extractum«. ALBERT MAGNUS citirt es unter dem Titel *de inventionibus occultorum;* in Ms. Digby 149^{28} (p. 149) heisst es *de occultis*, wonach p. 48 und 211, Nr 51^{20} und 194^{13}, zu berichtigen ist.

b) *De Cogitationibus* heisst ein gedrucktes Stück von 4 Seiten, Anfang: »De Cogit. ab intentione refertur [Mss: »ad Messehala«] et praecipit M. ut constituas ascendens [astrum]« etc. Einige Mss. (Ashmol. 393^{16} u. Digby 93^{15} p. 103) haben dazu ein Vorwort, Anfang: »Cum astrorum scientia difficilis sit«, wonach das Schriftchen 12 Kapp. enthalten soll. ALBERT MAGNUS betitelt es *de Interpretatione cogitationis;* einige Mss. nennen es *de Secretis astronomiae*, oder *de Intentione secretorum astronomiæ* oder *Liber Intentionum secretorum astronomiæ;* Ms. Digby 194^{10} heisst *Praecepta* oder *de Interrogationibus;* folglich sind identisch die *Notae de Libro Interrogationum* Ms. Amplon. Fol. 395^{21} (S. 280), wo »ascensus« zu berichtigen ist: »ascendens«. Die Endworte: »significationibus signorum« (auch in Ms. Digby) fehlen in der Ausgabe.

De Testimoniis lunae et orientis domini de receptione [s. unten] *similiter pro negotiorum effectu discernendo* MESSEHALAE (*et* ALBENAHEIT), Anfang.: »Luna quia columpna (so) stellarum«. Ms. Digby 149^{31} (p. 149) enthält eine Compilation aus 9 Astrologen[15]) und endet unvollständig mit einen Excerpt: *de lunae proprietatibus* von MESSEHALLA, das nicht in *Novem judices* steht.

De orbis motu Qu. 330^{6} (S. 564), in der Überschrift paraphrasirt, zuletzt *liber motus orbis et naturae ejus;* ist das gedruckte Werk, dessen Ausgabe Norimb. 1549 durch JOACH. HELLER mit Titel: *De Elementis et orbibus coelestibus* ich in

meinem *Catal. libr. hebr. in Bibl. Bodl.* p. 1679 angegeben habe. Später habe ich die erste Ausgabe (1504) mit dem ursprünglichen Titel kennen gelernt.[16])

De Praetiorum judicio Qu. 372[4] (S. 624), Titel: »In scientia quae res quolibet tempore erunt carae et quae viles»; Anfang.: »Attende ad ea quae dicam»; Ende; »erit hoc utile venditori»; 4 Bl. Identisch ist *de Mercibus*, Ms. Aulae Mar. Magd. 2[11] anf.: »*In*tende ergo ad ea», und Ms. Bodl. Canon. Misc. 396[9]: *liber de Ratione ditescendi*, beginnend mit der Notiz, dass MASCHALLAH diese Schrift für einen Compagnon(!) im Geschäfte verfasst habe, fortfahrend: »*In*tende ergo ad hoc quod dicam» etc.; eigentlicher Anfang: »Constitue igitur, bene, *Alchahale*» [ist das corrumpirt aus *Messahale*, oder Namen des Angeredeten?]. Identisch ist: *De Abundantia et charistia rerum*, Ms. Canon 517[8] (p. 829) Fol. 17[b]—20, wo der Anfang nicht mitgeteilt ist.[17]) — Excerpte aus einer Abhandlung über Preise von MASCHALLAH im arabischen Originale, Ms. Bodl. bei NICOLL (p. 283) beginnen: Wisse, dass ich dieses Buch auf 3 Arten gegründet habe, wovon diese die leichteste (*Catal. Bodl.* p. 1678 n. 17 und Addenda).

De Receptione übersetzt von JOHANNIS HISPALENSIS, Qu. 361[30d] (S. 603) und Oct. 83[5] (S. 541) ist das gedruckte: *De Receptione sive de Interrogationibus* (cf. Digby 194[11]), bei ALBERTUS MAGNUS falsch: »*De Inscriptionibus*»; s. Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 379[f].

MICHAEL SCOTUS (S. 916), s. ALPETRAGIUS.

MUFINUS, s. unter MASCHALLAH.

OMAR (S. 918), *Oamar* [AOMAR] *Homar ben Alpharghm* (so), heisst ABU HAFS' OMAR BEN AL-FARRUKHAN AL-THABARI (IX. Jahrh.) und ist mitunter mit ALFERGANI verwechselt worden. Er wird selbst von IBN RIDJAL citirt; s. Zeitschr. der deutsch. morgenländ. Gesellschaft **18**, 1864, 180, **25**, 1871, 413; Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 363; Archiv für Pathol. Anat. **52**, S. 365; Deutsches Archiv (heräusg. von ROHLFS) **1**, 446.

Sein bekanntes Werk *De Nativitatibus* Qu. 330[11] (S. 565), 365[18] (S. 611) ist übersetzt von JOHANNES HISPALENSIS, dessen Namen aber hier nicht angegeben ist; cf. Ms. Wien 3124[8] und Digby 194[9], wo der Namen erst hinter den angefügten Sentenzen steht, in welchen »Albubar und Verekali» wohl ALBUBATER und FARCHAN vorstellen. WÜSTENFELD (*Übersetzungen arabischer Werke* S. 20) hat dieses Werk nicht. Ich hatte früher an dem Übersetzer gezweifelt, weil keine der früheren Ausgaben ihn nennt, und gefragt ob man vielleicht nur FARRUKHAN mit

ALFERGANI verwechselt habe. Ms. Qu. 330 hat den corrupten Rest eines Datums.

Auszüge aus diesem Werke sind wohl die Stücke von AOMAR in dem *Novem judices* (s. oben Anmerkung 7) wie hier *De Eligendo querentis et questionis duce,* Qu. 372[15] (S. 624) und *Tractatus (!) de quantitate aeris et temporum,* beide in *Novem judices,* Fol. 14 und 90.

PTOLOMAEUS, s. unter ALI.

RHASES (S. 923), der berühmte Artzt RAZI (gest. 932 oder 923), verfasste ein medicinisches Werk *ad Almansorem,* d. h. an MANSUR BEN ISHAK in Khorazan, dessen lateinische Übersetzung öfter gedruckt und in mehreren Amplon. Mss. zu finden ist. An dieses Werk fügt nun der Index des Herrn SCHUM: *Capitula eius libri quae de signis zodiaci sunt et Centiloquium dicuntur a* PLATONE TIBURTINO *translata,* Fol. 386[7] (S. 272) etc.; allein »Centiloquium Rasis», nach AMPLON's Catalog S. 804 n. 39, ist eine falsche Conjectur, welche später von HARTMANN SCHEDEL und Anderen vielfach wiederholt worden. Ohne Zweifel ist das *Breviloquium Almanzoris in astrologia* bei AMPLONIUS, S. 799 n. 13 ebenfalls unsere Schrift. Der Verfasser des öfter gedruckten *Centiloquiums* ist unbekannt und die Auffinding desselben sehr schwierig, da die lateinischen Überschriften verschiedenes, aber grossenteils unbrauchbares Material liefern (Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 26 ff.). Ich habe als Verfasser JA'HJA IBN ABI MANSUR vorgeschlagen (s. über ihn meine *Etudes sur Zarkali* p. 87) und die Mitwirkung des ABRAHAM BAR CHIJJA bei der Übersetzung vermutet, wegen des Datums »Arabum 530 18. Dsulkhid» (s. Ms. Ampl. Fol. 394[5] S. 277), d. i. 17. September 1136. WÜSTENFELD (*Übersetzungen arabischer Werke* S. 41) construirt einen jüdischen Astrologen *Mansur b. Abraham* in Spanien unter Hakem (861—76) dessen Existenz ganz in der Luft schwebt (s. meine Abhandlung *Abraham ibn Esra* S. 19). Die 3 alten Mss. Amplon. wissen nichts von »fil. Abrahae» und anderen verwirrenden Angaben.

THEBIT BENKORAH (S. 929), der berühmte THÂBIT BEN KORRAH (gest. 901), ist Verf. verschiedener kleiner, in lateinischer Übersetzung gedruckter und handschriftlicher Abhandlungen (s. meine Aufzählung in Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, 331; **19**, 1874, 95).

De Aequationibus Qu. 348[15] (S. 582) ist offenbar nur der Schluss des vorangehenden *De motu accessionis et recessionis octavae sperae* — dieser volle, im Index gekürzte Titel rechtfertigt meine Identification mit N. 29 der Übersetzungen GERARD's von

CREMONA (bei LECLERC l. c. II, 416 und 495 zweimal); WÜSTENFELD (*Übersetzungen arabischer Werke* S. 65) kennt die von mir angegebenen 3 Ausgaben nicht. Das arabische Original dieser Schrift über die sogenannte Trepidationstheorie enthält Ms. Paris Suppl. arab. 952[18]. (WOEPCKE, *Essai sur une restitution de travaux perdus d'Apollonius* p. 6.)

De Circulorum imaginatione, oder *De Sphaerarum circulis* in 6 mss., bekannter als *De* [recta] *imaginatione sphaerae,* ist ebenfalls um 1518 gedruckt, — vielleicht von MAIMONIDES citirt. — Das Wort *axes* (Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, 334) ist vielleicht *auges* (vom arabischen *audj*) zu lesen.

De Imaginibus astronomicis, fehlt der, schon zu Fol. 380[19] angegebene Übersetzer JOHANNES HISPALENSIS. Zu den bekannten Mss. (Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, S. 333; bei LECLERC, l. c. II, 374 n. 7; WÜSTENFELD, *Übersetzungen arabischer Werke* S. 33 n. 11) kommt Ms. Berlin Fol. 192, f. 199. Der eigentliche Anfang lautet: »Dixit thebit ben corrah: Cum volueris aliquid operari de ymaginibus scito quod tradiderunt nobis philosophi», — ob echt? ALBERTUS MAGNUS (*de Mineralibus* lib. II, tract. III, Cap. 3) citirt über die Sculptur der Siegel: »Magor graecus et Germa [für Hermes?] Babylonicus et Hermes Egiptius ... postea Ptolomaeus et Geber Hispalensis,[1]) Tebith autem plenam tradidit artem».

Ich kenne noch immer nicht das Buch *De tribus figuris magicis,* gedruckt Francof. 1559; ist vielleicht daraus die Stelle über die Siegel bei PITRA, *Otia Solemnens.* III, 336? — Im Index nachzutragen ist das Schriftchen *De Figura sectore,* Qu. 349[16] (S. 585), wo der Namen CAMPANUS in das anonyme Ms. hineincorrigirt ist. Das oft besprochene Schriftchen ist n. 9 der Übersetzungen GERARDS VON CREMONA, s. die Citate in der Biblioth. Mathem. 1888, 112 und über den terminus meine *Hebräische Bibliographie* XXI, 86. — In Bezug auf das sehr zweifelhafte *de Proportionibus* von THABIT (Zeitschr. für Mathem. **19**, 1874, 96) sei noch bemerkt, dass ms. Paris Suppl. arab. 952[15] (f. 16) eine Abhandlung THABIT's »sur la composition des rapports» enthält (WOEPCKE, *Essai d'une restitution* etc. p. 6).

ZERGIS (S. 934), *de significatione 7 planetarum in 12 domibus,* Qu. 372[3] (S. 623) f. 50—54, Anfang: »Saturnus in oriente pro lege»; Ende: »remissius exponatur». Andere Mss. (Zeitschr. der deutsch. morgenl. Gesellsch. **18**, 1864, 119, 192, **25**, 1871, 385, 390; Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 370) beginnen, wie bei ALBERTUS MAGNUS: »Sol (si fuerit) in ascen-

dente», und enden anders. Der Autor wird auch *Jergis, Jergius, Zergius* etc. genannt. Von *Jergius* finden sich *andere* Excerpte in dem *Novem judices* Fol. 6[1], 18[2], 20[1], 21[1.3], 22[4], 25[3], 26[1.4], 34[2], 35[2.4], 43[4], 44[1], 53[1.2], 58[2], 60[4], 69[1.2], 74[4], 79[4], 94[3] (letzteres = ms. Wien 5474[b] *de pluviis*).

In der hebräischen Übersetzung von MASCHALLAH's *de Interpretationibus* wird *Jirgis* und seine Genossenschaft über Aufsuchung von Verborgenem (nicht in *Novem judices*) in einer Form citirt, welche auf das arabische *Djerdjis* (Georgius) führt. Wer ist aber dieser Astrolog? Woher stammen die Excerpte?

ZOËL (*Zohel, Zaël, Zabel*) BEN BUR (*ben Bris, Benibris*) *Israelita* (S. 934). SAHL. B. BISCHR (um 820) heisst in den lateinischen Drucken »Zaël IsMAelita»; in den Mss. ist der Namen in unglaublicher Weise bis zu *Ethelbront* entstellt (s. unten); Herr SCHUM hat eine ganz isolirte Form zum Schlagwort gewählt und eine Dublette mit abweichenden Namen nicht erkannt. Nachweisungen aller Art s. in meinem *Catalogus Bodl.* p. 2260; Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 388; meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* (im Index des Sonderabdrucks p. 100, Art. SAHL, fehlt p. 70, 93), *Etudes sur Zarkali* p. 86, 108.[19])

De astrorum judiciis Qu. 223[6] (S. 481), Anfang: »Scito quod signa sunt 12», ist identisch mit CHEHELBENBIS *in scientia judiciorum*, Qu. 361[31] (S. 604) und AZARCHELIS *lib. introductorius in tract. judiciorum*, Duod. 18[3] (S. 775); am Ende: »Azarcele»; es ist als ZAELIS *Introductorium de principiis judiciorum* gedruckt (s. Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 388[a]). Ms. Digby 72[2] beginnt: »Dixit *Kembris*» für *Benbris* (= BEN BISCHR). — ALBERTUS MAGNUS citirt mit demselben Anfang ein *liber Introductorius* von ZAËL. Ich glaube daher, dass Stücke desselben Buches in den mss. enthalten sind, welche *Introductorium* betitelt werden, wenn auch der Anfang nicht übereinstimmt; allein ms. Qu. 363[9] (S. 608), anf.: »Forcior omnibus locis circuli», Ende: »firdarie [d. h. Perioden], sicut diximus in libro mundi», ist mir verdächtig, da SAHL ein solches Buch nicht verfasst hat; vielleicht ist hier ein Fragment aus ABRAHAM IBN ESRA angefügt? Cf. oben unter ABRAHAM JUDAEUS. — Ms. Digby 47 enthält nach MACRAY's Catalog p. 42, 43, unter 5 f. 19—29: *Liber Archaselis introductorius ad lib. judiciorum Arabum libris duobus*, anf. »Omnibus planetis erraticis quae feruntur in signis», Ende nicht angegeben, auch in Sorbonne 980 (Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 390; meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* p. 70); ms. Digby 47[10]. *Zaelis lib. introductorius*

ad lib. judiciorum astronomiae etc. cum prooemio, Anfang: »Hactenus de circuli porcionibus stellisque«; s. unten unter »Praecepta«. Dann folgt »*Lib. judiciorum etc. cum prooemio*«, Anfang: »Deinceps ab hoc introitu«, — sieht nicht wie ein Anfang aus. MACRAY bemerkt: »Multa excerpta sunt ex ALKINDI, ADOMAR (für AOMAR), DOSITHEO (für DOROTHEO) et ARISTOTELE«. Dann folgen »Sententiae septem judicum«. Alles das scheint nur in Auszügen aus *Novem judices* zu bestehen?

De Domibus XII earumque virtutibus, Qu. 372[16] (S. 624), ist aus *Novem judices* f. 3[4], wie das im selben ms. vorangehende und nachfolgende von »Aomar« und »Haly«; s. unter OMAR u. ALI.

De Electionibus, Qu. 363[10] (S. 605), Anfang: »Omnes concordati sunt«, 1533 und 1551 gedruckt, erscheint in ms. Digby 47[7] und 194[4] unter dem Titel: *De concordia electionum* ALKINDI; ein Beispiel willkürlicher Substitution, das uns Vorsicht lehrt.

Praecepta 50, Anfang: »Hactenus de circuli portionibus«; wir haben oben denselben Anfang des *liber introductorius* in ms. Digby 47[10] gefunden! Die Sache scheint sich so zu verhalten, dass die *50 praecepta* — Anfang: »Scito quod significatrix (i. e. luna«, so auch bei ALBERTUS MAGNUS) — welche hinter dem *gedruckten liber introductorius* gedruckt sind, in ms. Digby 72[6] und ms. Sorb. 980 richtig als *liber secundus* bezeichnet sind, und dass die Worte: »Hactenus etc.« einem unedirten *Prooemium* angehören, das erste Buch (welches auch dem ARZACHEL beigelegt wird) nicht vollständig gedruckt sei, daher auch das *Prooemium* zum *liber secundus* wegblieb. Die *50 praecepta* finden sich übrigens *anonym* als »*Principia judiciorum*« und als »*Regulae astrologiae*« in mss. Amplon. Qu. 179[8] und Duod. 18[4] (S. 429 und 775)! Siehe auch Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 389 e. Vielleicht gehört auch hierher das Fragment *de Planetis* angeblich von ALGAZEL (s. unter diesem).

Lib. Temporum »scil. spatium tempori, *in Arabico* vero dicitur *hora* ubicunque est tempus«. Die Erklärung des Titels, wahrscheinlich vom Übersetzer herrührend, beweist, dass ich (im *Catalog. Bodl.* p. 2263) richtig vermuthete, der arabische Titel sei *Kitab al-Sa'ât,* d. h. »Buch der Stunden«, indem *Sa'âh* (Stunde) auch einen Moment, kleinen Zeittheil bedeutet. Anfang: »Scito quod tempora contingunt ex motibus«. Das gedruckte: *De temporum significatione ad judicia* beginnt: »Scito quod terra (! für tempora) excitat (lies excitant) motum (so)«; ALBERT MAGNUS (Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 389 c) citirt: *De significatione temporis,* mit dem, wiederum corrumpirten Anfang: »Et scito excitat (Variante: excitant) motus«.

[15]) Die Namen sind: ABENAIAT, MESSAHALA, DOROTHEUS, JERGRIS (lies JERGIS), ARISTOTILIS (so) ALBUMAZAR, AOMAR, ALKYNDI, ZAEL. Die gedruckten *Novem judices* haben für ALBUMAZAR PTHOLEMEUS (so), und andere Reihenfolge, die aber hier für das Buch gar keine Bedeutung hat, da es nach Materien geordnet ist. Der Anfang des ms. ist: »Celestis circuli forma sperica»; die Ausgabe beginnt: »Rerum omnium, quae sub lunari».

[16]) Ich gebe eine kurze Notiz über diese seltene Ausgabe: MESSAHALAH, *De scientia motus orbis*, Norimbergae MCCCCCIII, III. April per dom. Joannem Weissenburger (auf dem Stemma: »ductu Jo. STABII»). Auf dem Titelblatt ein Astrolog mit einem Globus etc.; Widmung an den Senator Jo. FUXMAGON (nebst Gedicht) worin es heisst: »Cum itaque MESSAHALA *de scientia motus orbis* Philosophiae ac sideralis scientiae professoribus jocundissimus (so) hactenus propter exemplariorum paucitatem nec non librariorum minus eruditorum ineptam transscriptionem quasi ad interitum corruisset curavi ea sedulitate qua potui . . . figuris etiam necessariis illius intentionem explicantibus commode exornare volui etc.» — Die Signaturen A, B enthalten je 8 Bl., C 4, D 5, also Summa 25 Bl. Keine Kapiteleintheilung (ed. 1549 zählt 27). Anfang: »Incipit liber in quo sunt *cause orbis et motus eius et natura eius* editione Messahalah. Et sermo in hoc quod orbis est prescitus creatus. Incipiam et dicam» (von hier ab wie 1549). Denselben, oder fast denselben, Anfang haben auch Ms. München lat. 234, 534 f. 16.

[17]) Ich habe darüber angefragt und Dr. NEUBAUER antwortete mir (24. Juli 1890), dass auch die Vorbemerkung in beiden ms. identisch sei.

[18]) Zeitschr. für Mathem. und Phys. **16**, 1871, 396: »Magot»? — GEBER HISPALENSIS ist IBN AFLA'H, der bekannte Astronom; siehe oben unter GEBER. Ein ihm wahrscheinlich beigelegtes Werk über die magische Palmenanwendung, nur in hebräischen Mss. erhalten, enthält eine, angeblich von König Salomo herrührende mantische Figur (s. meine Schrift *Zur pseudepigr. Literatur* S. 25). Das liegt aber zu ferne; man dürfte hier wohl eher an die, so häufige Verwechslung dieses GEBER mit dem arabischen Alchemisten GEBER (DJABIR BEN HAJJAN) denken.

[19]) Über eine Anführung im Commentar zum *Centiloquium* s. oben Anm. 8.

Zum bequemen Übersicht gebe ich ein Verzeichniss der behandelten Artikel mit eingeschalteten Verweisungen für die richtigen Namensformen und mit Angabe des Jahrgangs und der Seite, wo jedes Artikel sich befindet.

Historical sketch of the study of mathematics in the United States.

By F. CAJORI in Colorado Springs, Colo.

The history of the progress and teaching of mathematics in the United States of America may be conveniently divided into three periods: I. Colonial Times, extending from the earliest settlements to 1776, the year when the U. S. declared their independence from England; II. The Influx of English Mathematics, extending from 1776 to about 1820; III. The Influx of French Mathematics, extending from 1820 to within the last ten or fifteen years.

I. Colonial Times.

At an early date, colleges were founded in the New England states and one college also in Virginia. Since their prime object was to train young men for the ministry, much attention was given to the study of ancient languages and mental philosophy, while mathematics was neglected. Thus, at Harvard College in Cambridge, Massachusetts (founded in 1636) and at Yale College in New Haven, Connecticut (founded in 1701), no mathematics whatever was required for admission; nor was it studied, except during the last year of the college course, when the budding theologians did homage to the mathematical science by the study of arithmetic, elementary geometry (consisting chiefly of a course in surveying), and a little astronomy.

Newtonian ideas were slow in finding their way into American schools. From about 1725 to 1743 the physics of ROHAULT, a follower of the Cartesian theory, was used at Yale. The edition was that of SAMUEL CLARK, an Englishman who added numerous notes with a wiew of bringing the Cartesian system into disrepute by exposing its fallacies. The same work was used at the University of Cambridge, England. In 1726 GASSENDI's astronomy was used at Harvard. He died before the name of NEWTON had become known to science. In 1743 the complete victory of Newtonian ideas at Yale is seen in the adoption of GRAVESANDE's Philosophy as a text-book. Algebra was an unknown science to students of this college until 1742. At Harvard it appears to have been brought into the curriculum about the same time. But at a still earlier date (on or before

1724) it appeared in the course at William and Mary College in Williamsburg, Virginia. Favorite text-books in New England Colleges from 1700 to about 1776 were ALSTED's Geometry, EUCLID's Geometry, and JOHN WARD's Mathematics. All these books were imported. The era for the writing and printing of college text-books in the U. S. had not yet begun. During colonial times no original work whatever was done in pure mathematics, but some interest was shown in astronomy. The most distinguished astronomer of this period was DAVID RITTENHOUSE of Germantown, Pensylvania. He was entirely self-taught and one of the very few Americans of his time who pursued science out of pure love for it. On June 3, 1769, he observed the transit of Venus in a temporary observatory constructed by himself and he took notice of one phenomenon which escaped the attention of everybody else; namely, when the planet had advanced about one-half of its diameter upon the sun, that part of the edge of the planet which was off the sun's disc appeared illuminated, so that the outline of the entire planet could be seen. From this it follows that Venus has an atmosphere. This observation of RITTENHOUSE excited no attention for nearly a century until it was at last confirmed by other astronomers. RITTENHOUSE was celebrated for the wonderful orreries which he constructed.

II. Influx of English Mathematics.

During the 50 years after the Declaration of Independence, much real progress was made in education. After 1776 a large number of school-books was published in America. The number of arithmetics alone exceeded sixty. Many of them were reprints of English works. All American compilations were modelled after English patterns. The English algebras of JOHN BONNYCASTLE and THOMAS SIMPSON, ROBERT SIMSON's and PLAYFAIR's editions of EUCLID, VINCE's Fluxions, and HUTTON's Mathematics were books to be found in professors' libraries. The English are thus seen to have been our teachers although they themselves were then far behind the mathematicians of the European Continent.

The first American who compiled a course of mathematics for colleges was SAMUEL WEBBER (1801), professor at Harvard. In 1814 JEREMIAH DAY, then professor at Yale, began the publication of a mathematical series which became very popular.

Since about 1750, students began the study of mathematics in the Freshman instead of Senior year. Occasionally pupils

advanced far enough to enter upon the elements of fluxions, but this was of rare occurrence. During this second period, the instruction, though much superior to what it had been in colonial days, was still very inferior in quality. As a rule pupils took no interest in mathematical studies. The professors themselves never felt the glow of a new idea and were, generally, quite incompetent. The text-books taught rules rather than principles.

In 1804 was started the Mathematical Correspondent, the earliest mathematical journal in this country. Like several other periodicals which sprang into existence during this period, it had only a short life. These periodicals were devoted almost exclusively to the solution of problems and were, therefore, of merely educational value. Nothing in them added to the stock of mathematical knowledge, excepting a paper by ROBERT ADRAIN in No. IV of the Analyst, containing deductions of the Law of Probability of Error in Observations. This law was first stated in printed form by LEGENDRE in 1806, but ADRAIN, working independently of LEGENDRE, was the first to publish proofs of this law, of which he gave two. Until recently, ADRAIN'S work was quite unknown. The most distinguished mathematician of this time was NATHANIEL BOWDITCH. Like DAVID RITTENHOUSE, he was never in college either as pupil or teacher, but was wholly self-taught. He may fitly be called the morning star of American mathematics. With him began a new epoch.

III. The Influx of French Mathematics.

Trained in the school of poverty, possessed with indomitable energy, BOWDITCH mastered, while on long sea-voyages as a sailor, one branch of mathematics after another. Later in life he was an officer of insurance companies. He was the first American to study French works. In 1801 he published his *Practical Navigator*, and in 1829 began the publication of his translation and commentary of LAPLACE'S *Mécanique céleste*. At this time French and Swiss authors came into the ascendency among us.

Professor FARRAR of Harvard College translated LACROIX'S Algebra, prepared an Introduction to the Elements of Algebra, selected from the Algebra of EULER, LEGENDRE'S Geometry, LACROIX'S Trigonometry, BEZOUT'S Differential and Integral Calculus. These books appeared between 1818 and 1824. At this time EUCLID came to be discarded almost everywhere in favor of LEGENDRE or similar works. In the U. S. Military

Academy at West Point the most prominent professors were French and Swiss, or Americans who had studied in France. The course of study at that institution was remodelled somewhat after the plan of the Polytechnic School in Paris. The U. S. Military Academy was during this period the most influential mathematical school in the country.

The period under consideration was a bright one as compared with the preceding. Mathematical journals now occupied a higher level of merit. Marked improvements were made in text-books and in methods of teaching. Pestalozzian ideas found their way into elementary schools. The introduction of the black-board into the class-room doubled the instructor's power of teaching. The government established the U. S. Coast Survey of which FERDINAND HASSLER, trained in this line in Switzerland, was first superintendent. This work has been carried on with a high degree of efficiency. An astronomical observatory was founded by the government in Washington in 1842. By the munificence of wealthy men many other observatories have since been built in different parts of the country.

Notwithstanding this progress in various directions, the achievements were small indeed as compared to those of European countries. Ours was not the glory of the sun, but only of the moon. We imitated the French in some of their text-books, but we failed to catch their enthusiasm and to display originality of thought. The genius of our people was directed toward achieving material progress. The only really prominent mathematician of this period was BENJAMIN PEIRCE, professor at Harvard (died 1880). Professor ARTHUR CAYLEY calls him the father of American mathematics. His text-books for colleges were concise and elegant, and so full of novelties, that they never became widely popular. A much wider circulation was enjoyed by the works of CHARLES DAVIES, professor at the U. S. Military Academy, and ELIAS LOOMIS, professor at Yale, but they were quite defective in many respects. PEIRCE's Analytical Mechanics is an advanced work of much merit. His memoir on Linear Associative Algebra secures for him lasting fame. It is by far the most important original contribution to pure mathematics made in this country. PEIRCE did mutch work in mathematical astronomy. Distinguished in this line of work were also WILLIAM CHAUVENET (author of a spherical and practical astronomy, a trigonometry, and an elementary geometry — all three excellent works) and JAMES C. WATSON (author of a theoretical astronomy).

It was a fortunate circumstance for the progress of mathematics in the U. S. that when BENJAMIN PEIRCE was near his grave, there came to our shores an eminent mathematician to give new impetus to mathematical studies. This man was JAMES JOSEPH SYLVESTER, who in 1876 came to the Johns Hopkins University in Baltimore and during his seven years' stay there, by his genius and enthusiasm, inspired young men for the study of advanced mathematics. He was the first editor of the American journal of mathematics, the first periodical of its kind among us, which was devoted to higher mathematics exclusively. SYLVESTER's work is too well known to need any comment here. He may be said to have initiated a fourth period in the progress of mathematics in this country. The number of men engaged in the study of advanced mathematics at the present time is far greater than it was at any previous period and it can now no longer be said, as was said, that but a single important original contribution to pure mathematics has been made in America.

Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa.

Par V. V. Bobynin à Moskwa.

Le cours d'histoire générale des mathématiques à l'université de Moskwa a été institué en 1882. D'après le plan primitif, il devait durer quatre ans et comporter deux leçons d'une heure par semaine, mais ce plan a subi plus tard certaines modifications. Actuellement le cours est divisé en deux parties dont la première embrasse l'histoire des mathématiques en antiquité et au moyen âge, la seconde l'histoire des mathématiques modernes; les deux cours partiels sont donnés simultanément en une année scolaire avec une leçon par semaine pour chacun d'entre eux.

J'ai publié le programme actuel de mon cours dans le journal Физико-математическія науки 1890, p. 7—22. Sur la proposition de M. Eneström, je l'ai rédigé maintenant en français pour être publié dans la Bibliotheca Mathematica. La somme des leçons comporte 59, dont le 33 premières ont été consacrées à l'histoire des mathématiques en antiquité et au moyen âge, les autres 26 à l'histoire des mathématiques modernes.

1. Introduction. (Objet de l'histoire des mathématiques et son rôle: a) philosophique; b) scientifique; c) pédagogique; d) généralement instructif. — Commencement des recherches sur l'histoire des mathématiques. Aperçu de l'état littéraire de l'histoire des mathématiques en antiquité, au moyen âge et aux temps modernes.)

2. Origine et premier développement du calcul verbal. (Formation des notions numériques primitives. Développement du calcul mimique. Le fait de l'apparition postérieure du calcul verbal. Celui-ci dérivé du calcul sur les doigts.)

3. Origine des systèmes de numération. (Problème fondamental du calcul verbal. La solution en est naturelle et découle de la nature même des choses. Systèmes quinaire, décimal et vigésimal. Leurs formes pour les noms numéraux. Unités des ordres différents dont on voit se développer l'idée. Noms de ces unités. Limites atteintes par les différentes nations dans le calcul. Systèmes artificiels de numération.)

4. Origine et développement primitif du calcul graphique. (Premières applications de l'art graphique au calcul. Pour compter on se sert de pierres et d'autres objets semblables. Calcul de noeud chez les Chinois et les Péruviens. Table de Lochou; les quipos. Formes figuratives du calcul: la taille, l'écriture figurative des Indiens au Nord de l'Amérique, les hiéroglyphes des peuplades civilisées de l'Amérique centrale.)

5. Développement ultérieur du calcul graphique. (Principes généraux des systèmes de chiffres. Principes servant à exprimer les multiples des unités des ordres différents dans les nouveaux et anciens systèmes de chiffres: 1) le principe d'indication non systématique, 2) le principe additif, 3) le principe multiplicatif, 4) le principe élévatoire, 5) celui des colonnes, 6) celui de position.)

6. Les mathématiques chez les anciens Egyptiens. (L'Egypte et sa population en antiquité. Aperçu historique de ses dynasties les plus célèbres et des plus graves événements da sa vie politique. Trois sortes de signes graphiques employés en Egypte. Calcul graphique à l'aide des hieroglyphes. Le papyrus de Rhind. Résumé de son contenu.)

7. Les mathématiques chez les anciens Egyptiens (suite). (État des mathématiques en Egypte au temps de Papyrus de Rhind. Arithmétique. Calcul graphique. Transformation des fractions. Système dès signes. Addition et soustraction. Multiplication. Division. Elévation à la puissance. Division proportionnée. Rapport géométrique et commencement de la théorie des proportions. Moyenne arithmétique. Questions relatives à la progression arithmétique. Equations du 1er degré avec une inconnue. — Géométrie. Les connaissances géométriques des anciens Egyptiens ne s'élèvent pas à un haut degré. Angles. Lignes perpendiculaires et parallèles. Figures. Origine de la similitude. Mesurage des aires. Quadrature du cercle. Corps géométriques. Art de tracer. Les méthodes principales des mathématiques égyptiennes.)

8. Les mathématiques chez les anciens Egyptiens (fin). Ce que nous savons des connaissances mathématiques chez les habitants de l'ancienne Chaldée. (Insuffisance de nos connaissances sur l'état et le progrès des mathématiques en Egypte antique, à l'époque qui suivit le Papyrus de Rhind. Inscriptions du temple à Edfou et les conjectures qu'elles suggèrent. — L'ancienne Chaldée et sa population en antiquité. L'écriture

cunéiforme. Le calcul graphique. Système sexagésimal. Découverte de HINCKS. Tables des carrés et des cubes de Senkerah. Le principe de position se présente dans le calcul. Application de l'arithmétique et de la géométrie à la mystique. Ce que nous savons sur la géométrie des savants de la Chaldée. Division du cercle en degrés. Grandeur de π.)

9. Ecole Ionienne. (Les résultats scientifiques auxquels ont abouti les rapports des Grecs avec les peuples civilisés de l'Orient, à l'époque antérieure à l'école Ionienne. THALES. Sa vie et ses connaissances mathématiques. Etat des mathématiques sous ses successeurs. ANAXAGORAS. Etude des mathématiques en dehors de l'école. OINOPIDES. DEMOKRITOS.)

10. Ecole des Pythagoriciens. (PYTHAGORAS. Sa vie et son action scientifique. L'arithmétique des Pythagoriciens. Etudes des propriétés des nombres. Progressions arithmétiques. Proportions et moyennes.)

11. Ecole des Pythagoriciens (suite). (La géométrie des Pythagoriciens. Le théorème de PYTHAGORAS. Triangles rectangulaires rationnels. Lignes incommensurables et nombres irrationnels. Le rôle de l'idée d'irrationnalité dans la doctrine religieuse et philosophique des Pythagoriciens. »Application» des aires à une droite donnée. Figures équivalentes. La somme des angles intérieurs du triangle. Polyèdres réguliers. Polygones réguliers. Polygones étoilés. Forme, sujet et méthode de la géométrie pythagoricienne.)

12. Les mathématiques grecques au 5e siècle. (Démembrement de l'union pythagoricienne. Comment ce fait agit sur le progrès suivant de la géométrie grecque. Problème de la division d'un angle ou d'un arc en un nombre quelconque de parties égales. La trisection de l'angle, qui en fait un cas particulier. HIPPIAS d'Elis et ses travaux. Problèmes donnés par la duplication du cube et la quadrature du cercle. Vie et oeuvres de HIPPOKRATES. Les efforts d'ANTIFON et de BRYSON pour résoudre le problème de la quadrature du cercle. Les paradoxes de ZENON et leur importance historique dans la géométrie grecque. État des mathématiques en Grèce à la fin du 5e siècle. Commencement de la perspective. THEAITETOS et ses travaux.)

13. PLATON et son école. (La vie et les ouvrages de PLATON. Comment il envisage le rôle des mathématiques dans le domaine scientifique. Ses manières de diriger les études de

l'école. Ses propres travaux sur les mathématiques, leur méthodologie et leur philosophie. Activité des mathématiciens attachés à l'académie. LEODAMAS. Travaux des académiciens. DEINOSTRATOS, MENAICHMOS, EUDOXOS, HERMOTIMOS, ARISTAIOS. Ecole des péripatéticiens. Son zèle pour l'étude de l'histoire des mathématiques. EUDEMOS. THEOFRASTOS.)

14. EUKLIDES et ses travaux. (Ville d'Alexandrie. Protection largement accordée aux sciences par la dynastie de PTOLEMEUS. Ecole d'Alexandrie. Notice biographique sur EUKLIDES. Aperçu général des »Elementa» et résumé des parties séparées. But, degré d'originalité et forme d'exposition de l'ouvrage. Les copies parvenues jusqu'à nous sont-elles authentiques? Autres oeuvres d'EUKLIDES. Les »Fausses Conclusions»; les »Porismes»; les »Données»; le »Livre de la division des figures»; les »Positions à la surface»; les »Sections coniques». Ecrits attribués à EUKLIDES sur la musique, l'astronomie, l'optique et la mécanique.)

15. ERATOSTHENES et APOLLONIOS. (Notice biographique sur ERATOSTHENES. Lettre sur la duplication du cube. Mésolabe. Livre sur les quantités moyennes. Le crible d'ERATOSTHENES. Tentative de déterminer la grandeur de la terre. — APOLLONIOS. Ses travaux arithmétiques. 8 livres sur les sections coniques; 2 livres sur la »sectio rationis»; autres travaux.)

16. Les mathématiciens italiens. (Les mathématiques en Italie après le démembrement de l'union pythagoricienne. ARCHYTAS et ses travaux. Notice biographique sur ARCHIMEDES. Ce que nous possédons de ses oeuvres, leur tendance et leur caractère. Aperçu des travaux d'ARCHIMEDES dans le domaine de la géometrie, de l'arithmétique et de la mécanique.)

17. Dernière époque de progrès de la géométrie grecque. (Notes générales sur le caractère et les tendances, manifesté par les études mathématiques de l'époque. NIKOMEDES et sa conchoïde. DIOKLES et sa cissoïde. PERSEUS, ZENODOROS. HYPSIKLES. Travaux mathématiques de l'astronome HIPPARCHOS.

18. Recherches sur la mécanique et la géodésie. (HERO. Quand a-t-il vecu? Ses oeuvres sur la mécanique. Ses travaux géodésiques et géométriques. SEXTUS JULIUS AFRICANUS.)

19. Recherches sur la trigonométrie. (Les explorateurs de la géométrie depuis la fin du 1er siècle avant J. C. jusqu'à vers le milieu du 2d siècle après J. C.: GEMINOS; THEODOSIOS

DIONYSODOROS; SERENOS. MENELAOS et son livre »De la supputation des cordes«. PTOLEMEUS et ses travaux sur la géométrie et la trigonométrie.)

20. Progrès de l'arithmétique et de l'analyse indéterminée. (Les explorateurs de l'arithmétique à l'école néopythagoricienne: NIKOMACHOS; THEON de Smyrne. THYMARIDAS. Les mathématiciens de l'école néoplatonienne: PORFYRIOS; JAMBLICHOS. DIOFANTOS. Sujet de son »Livre arithmétique« et traits caractérisant l'ouvrage. Autre oeuvre de DIOFANTOS: »Sur les nombres polygonaux«.)

21. Décadence complète des mathématiques en Grèce. (Les représentants en sont tous des commentateurs. Origine et développement successif des commentaires dans les mathématiques grecques. PAPPOS y montre le plus de talent. Ses »Collections«. PATRIKIOS. THEON d'Alexandrie. HYPATHIA. Mathématiciens de l'université d'Athènes: PROKLOS; DAMASCIUS; EUTOKIOS; JOHANNES PHILOPONUS.)

22. Les Indous. Ce que nous savons de la littérature mathématique chez eux. (Origine, administration et traits nationaux des Indous. Leur culture. Rapports avec les Grecs et faits d'influence réciproque. L'ARYABHATTA et l'»Aryabhattyam«. BRAHMAGUPTA. Sujet des chapitres mathématiques de son oeuvre »Brahma-Sphuta-Sidhanta«. BHASKARA ACARYA. Sujet des chapitres »Lilavati« et »Widja-Ghanita« qui font les parties mathématiques de son oeuvre »Sidhanta-Siromani«.)

23. Les mathématiques des Indous. (Systèmes du calcul graphique. Les quatre règles fondamentales sur les nombres entiers. Les fractions. Règles et problèmes de l'arithmétique pratique. Arithmétique théorique. Algèbre. Système des signes. Polynômes. Nombres négatifs. Les équations du 2^d degré ont deux racines. Nombres irrationnels. Application de l'algèbre à la solution des problèmes géométriques. Equations. Analyse indéterminée. Notes générales sur les procédés dont les Indous se servent pour résoudre les problèmes indéterminés. Equations à deux inconnues du 1^er et 2^d degré. Procédé pour les résoudre en nombres entiers.)

24. Les mathématiques des Indous (suite). (Géométrie. Traits caractéristiques et principes de la géométrie indienne. Manière de démontrer le théorème de PYTHAGORAS. Calcul des triangles et des quadrilatères. Quadrature du cercle. Approximation de π. Trigonométrie. Les sinus et les sinus-versus,

leur emploi et leurs tables. Triangles rectangulaires, plans et sphériques. Caractère et domaine de l'influence des mathématiques indiennes. (Les Chinois, les Arabes, les Grecs, l'Europe Occidentale.)

25. (La littérature mathématique chez les Arabes. Puissance des Arabes et faits principaux de leur histoire politique. Influence primitive de la science indienne. Elle est remplacée par celle de la science grecque. Les anciens mathématiciens grecs sont traduits et commentés. Les astronomes et mathématiciens arabes au 9e, 10e et 11e siècles. Les mathématiciens d'Egypte. Les mathématiciens et astronomes arabes en Espagne. Les mathématiciens et les astronomes en Orient au 13e—15e siècles.)

26. Les mathématiques des Arabes. (Arithmétique. Calcul graphique. Art de compter. Regle de fausses positions. Extraction des racines. Propriétés des nombres. Carrés magiques. Séries. Solution de problèmes de l'analyse indéterminée. Formation des triangles rectangulaires rationnels. Résidus quadratiques et cubiques. Algèbre. Origine des noms »algorithme» et »algèbre». Terminologie et système des signes. Opérations sur les expressions algébriques. Nombres négatifs. Equations du 1r et du 2e degré. Equations des degrés supérieurs réduites au 2d. Equations cubiques et du 4e degré. Equations indéterminées.)

27. Les mathématiques des Arabes (suite). (Géométrie. Forme gréco-indienne de la géométrie arabe primitive. Oeuvres d'Alkharizmi, des trois fils de Musa ibn Schakir et d'Abul Wefa. Influence exclusive de la géométrie grecque. Questions de la trisection de l'angle, de la quadrature du cercle et des segments sphériques. Polygones réguliers. Sections coniques. Comment les Arabes envisageaient la géométrie pratique. Applications réciproques de l'algèbre et de la géométrie. Trigonométrie. Effet de l'influence indienne dans la trigonométrie arabe. Les sinus et les sinus-versus. Les tangentes et les cotangentes. Tables trigonométriques. La trigonométrie sphérique.)

28. Etat des mathématiques chez les peuples qui furent les premiers conducteurs de la sciences mathématique grecque en Europe Occidentale. (Bysance. Caractère et représentants de la littérature bysantine du 7e au 15e siècle. Les Romains. La littérature mathématique romaine depuis son origine au 2e siècle avant J. C., jusqu'à la chute de l'empire romain.)

29. Etudes dans les couvents. (CASSIODORUS. BOETIUS et ses oeuvres. ISIDORUS d'Espagne et ses *Origines*. BEDA le Venerable. ALCUIN. Oeuvre civilisatrice de CHARLEMAGNE. Etat des mathématiques en Europe Occidentale à la fin du 9e et au commencement du 10e siècle.)

30. GERBERT. (Notice biographique. Commencement de l'influence des Arabes. L'abacus et les méthodes de division. Littérature de l'abacus.)

31. Oeuvres mathématiques des Arabes traduites en Latin. (L'influence des Arabes sur l'Europe Occidentale se développe successivement à l'époque antérieure aux Croisades. Travaux d'ATELHARD de Bath. PLATON de Tivoli. GÉRARD de Crémone. Traducteurs de rang secondaire au 12e siècle. Le mouvement scientifique est secondé par l'empéreur Frédéric II et par Alphonse X, roi de Castille. GIOVANNI CAMPANO.)

32. LEONARDO PISANO. (Notice biographique. Oeuvres de LEONARDO et ce qu'elles ont pour objet.)

33. Appropriation des connaissances scientifiques, transmises par les Arabes à l'Europe occidentale. (L'enseignement des mathématiques aux universités du moyen âge. Un développement progressif s'y manifeste au 14e et au 15e siècle. Littérature mathématique de l'époque et ses principaux représentants.)

34. Mouvement mathématique en Italie. (Effets produits par l'invention de l'imprimerie et la chute de Bysance sur les progrès scientifiques de l'Europe Occidentale. Oeuvres des mathématiciens grecs commentées et traduites. Solution des équations cubiques par FERRO, TARTAGLIA et CARDANO. Notices biographiques sur ces savants et leurs autres travaux.)

35. Mouvement mathématique en Italie (suite). (Solution des équations du 4e degré. FERRARI, sa vie et ses oeuvres. Méthodes pour déterminer les racines des équations numériques. Ce que l'on savait des nombres négatifs et des racines négatives et imaginaires des équations. BOMBELLI et son »Algèbre«. Comment il résout le cas irréductible de la formule de CARDANO.)

36. VIÈTE. (Notice biographique. Oeuvres. Recherches sur l'algèbre et sur l'analyse indéterminée. Travaux sur la transformation des équations et sur la relation entre les coefficients et les racines. VIÈTE découvre un moyen général et fondé sur le principe de la réduction, pour résoudre les équations du 2d, du 3e et du 4e degré.)

37. VIÈTE (suite). (Le procédé de VIÈTE servant à calculer les racines des équations numériques. Applications de l'algèbre à la géométrie. VIÈTE résout le cas irreductible de la formule de CARDANO à l'aide d'une relation trigonométrique. Ses recherches sur la division d'un angle en un nombre impair de parties égales. Effets de ces recherches sur le progrès de l'algèbre. Travaux de VIÈTE sur la géométrie et la trigonométrie.)

38. L'algèbre en Allemagne, en Angleterre et en Hollande. État de la géométrie au 16ᵉ siècle. (STIFEL et son »Arithmetica integra». Algébristes de rang secondaire, contemporains de VIÈTE. Ses successeurs. GIRARD et ses oeuvres. HARRIOT et son »Artis analyticae praxis». Le premier membre d'une équation égalé à zéro est décomposé en multiplicateurs linéaires. Tendance et caractère des travaux géométriques au 16ᵉ siècle. VERNER de Nuremberg. Recherches sur la géométrie de TARTAGLIA et de COMMANDINO. MAUROLICO et ses oeuvres originales dans le domaine géométrique. Travaux de RAMUS. Détermination du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Travaux sur la géométrie et le calcul des tables trigonométriques. Tables de RHAETICUS.)

39. Progrès de l'arithmétique. (L'application de l'algèbre à la géométrie a pour résultat la tendance de réduire et de faciliter les calculs. Les fractions décimales. Elles sont appliquées au calcul et l'emploi en devient général à partir de STEVIN. Les logarithmes. L'idée fondamentale en apparaît en premier lieu dans le livre de STIFEL: »Arithmetica integra». Notice biographique sur NEPER. Développement de ses idées sur les logarithmes. Ses tables, leurs éditions en Angleterre et leurs reproductions dans les autres pays de l'Europe. BRIGGS et ses tables. Ouvrage de VLACQ. BÜRGI découvre les logarithmes indépendamment de son contemporain NEPER. Différence des buts poursuivis par l'un et par l'autre.)

40. DESCARTES. Avec lui la géométrie fait partie des sciences qui se développent à l'aide de l'algèbre. (Notice biographique. Oeuvres mathématiques. Sujet de la »Géométrie». Recherches dans le domaine de l'algèbre et leurs résultats. Nature et signification des racines négatives des équations. Méthode des coefficients indéterminés. Application de l'algèbre à la géométrie. Application de l'algèbre à la théorie des courbes. Les tangentes.)

41. Progrès de l'analyse indéterminée et de la théorie des nombres. — Origine de la théorie des probabilités. (État de l'analyse indéterminée dans la seconde moitié du 16^e siècle. Traductions de l'»Arithmétique» de DIOFANTOS. BACHET DE MEZIRIAC et ses oeuvres. Notice biographique sur FERMAT. Ses travaux sur la théorie des nombres. PASCAL. Notice sur sa vie et ses ouvrages. La théorie des probabilités traitée dans ses questions primitives par PASCAL et FERMAT.)

42. Développement de l'analyse infinitésimale. (Introduction: Méthode d'exhaustion chez EUKLIDES et ARCHIMEDES.)

43. Les origines de l'analyse infinitésimale. (Comment les mathématiciens de l'Europe Occidentale envisagaient au 16^e siècle la méthode d'exhaustion des anciens. KEPLER pose les premiers principes de l'analyse infinitésimale. Le rôle, réservé à son livre »Nova stereometria doliorum vinariorum», dans l'histoire du progrès de cette analyse.)

44. Méthode des indivisibles. (CAVALIERI et ses oeuvres. La méthode des indivisibles et les objections qu'elle suggère. Successeurs de CAVALIERI. Ce que les travaux de CAVALIERI ont fait pour le progrès de l'analyse infinitésimale.)

45. Autres méthodes des quadratures et des cubatures. (Les circonstances au milieu desquelles ces méthodes se développent. La méthode de FERMAT. Vie et oeuvre de ROBERVAL. Sa méthode des indivisibles et le livre qui la contient. Travaux de PASCAL dans le domaine en question et leur importance pour l'analyse infinitésimale. La méthode de WALLIS exposée par l'auteur dans son oeuvre »Arithmetica infinitorum». MERCATOR, GRÉGOIRE DE S:T VINCENT et leurs travaux.)

46. Les méthodes des tangentes et celles des maxima et minima. (Comment les géomètres grecs définissent la tangente. Méthode de ROBERVAL. Méthode des maxima et minima de FERMAT et celle qui sert à déterminer les tangentes des courbes, basée sur la première.)

47. NEWTON et sa méthode de fluxions. (Notice biographique sur NEWTON. Ses ouvrages. Méthode de fluxions.)

48. Calcul différentiel et calcul intégral. (Notice biographique sur LEIBNIZ et ses oeuvres mathématiques. Les idées fondamentales de l'analyse infinitésimale développées dans ses premiers mémoires inédits. Ses mémoires publiés. Controverse

avec NEWTON. La part que LEIBNIZ prend au développement des calculs fondés par lui.)

49. L'analyse infinitésimale à la fin du 17e et au commencement du 18e siècle. (La méthode des fluxions se répand parmi les mathématiciens anglais. TAYLOR. MACLAURIN. Objections contre les principes fondamentaux des calculs différentiel et intégral. Ces calculs se répandent parmi les mathématiciens du continent. JACQUES BERNOULLI et ses recherches sur l'analyse infinitésimale.)

50. L'analyse infinitésimale à la fin du 17e et au commencement du 18e siècle (suite). (JEAN BERNOULLI et ses recherches sur l'analyse infinitésimale. Marquis de l'HÔPITAL. COTES. MOIVRE.)

51. Le calcul des variations dans son premier développement. (Problème de la brachistochrone et celui des isopérimètres. Querelle entre les frères JACQUES et JEAN BERNOULLI.)

52. EULER. (Vie et oeuvres d'EULER.)

53. Oeuvres d'EULER (fin). Les principaux mathématiciens entre ses contemporains.

54. LAGRANGE. (Vie et oeuvres de LAGRANGE.)

55. Oeuvres de LAGRANGE (fin).

56. Les géométres du 17e siècle. (MYDORGE. DESARGUES. PASCAL. GRÉGOIRE DE ST. VINCENT. LAHIRE. HUYGENS. NEWTON.)

57. Les géomètres du 18e siècle. (MACLAURIN. HALLEY. ROBERT SIMSON. STEWART. LAMBERT.)

58. MONGE. (Vie et oeuvres de MONGE. Importance de ses travaux pour le développement de la géométrie synthétique.)

59. CARNOT et PONCELET. (CARNOT et sa »Géométrie de position». PONCELET et son »Traité des propriétés projectives des figures». La géométrie n'est plus soumise à la nécessité d'employer l'analyse pour son futur progrès. Ce que ce fait signifie dans l'histoire des mathématiques.)

Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données.

Par G. Eneström à Stockholm.

Lorsque, dans la 2e moitié du 17e siècle, la notion de fonction commençait à être débarassée de la forme géométrique, sous laquelle elle se présentait dans la *Géométrie* de Descartes, on ne pensait pas immédiatement à choisir pour cette notion un symbole convenable.[1] Ainsi p. ex. Jean Bernoulli désignait en 1694[2] par la lettre n une fonction quelconque de z, et en 1695[3] Jacques Bernoulli représentait par p et q deux fonctions quelconques de x. Le premier pas vers une notation plus rationnelle fut fait par Jean Bernoulli, qui proposait en 1698 de désigner des fonctions de x par les lettres X et ξ, afin qu'on pût voir de suite quelle était la variable indépendante.[4] Cette notation fut approuvée par Leibniz; néanmoins celui-ci faisait observer que, quand on aurait affaire en même temps à plusieurs fonctions différentes de x, il serait nécessaire d'avoir recours à d'autres signes, et il proposait d'employer dans ce cas les symboles $\overline{x\rceil}\underline{\lfloor 1 \rfloor}$, $\overline{x\rceil}\underline{\lfloor 2 \rfloor}$, etc.[5] Autant que je sache, ces symboles n'ont jamais été utilisés, ni par Leibniz, ni par ses contemporains; d'autre part, la notation proposée par Jean Bernoulli fut employée par son frère, qui dans son *Analysis magni problematis isoperimetrici* (Basileæ 1701) représentait par B, F, G, C les valeurs que prenait une même fonction pour les valeurs b, f, g, c de la variable indépendante. Cette notation fut employée aussi très souvent au 18e siècle, et elle a été gardée encore de nos jours dans des cas convenables.

L'introduction d'un symbole particulier pour désigner une fonction d'une variable donnée paraît être due aussi à Jean Bernoulli. Déjà en 1706, dans le mémoire: *Solution du problême proposé par M. Jacques Bernoulli* etc.,[6] il représentait par ΔRO la dérivée d'une fonction de RO, toutefois sans donner à cette fonction même un signe particulier. Mais douze ans plus tard, dans le mémoire: *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problêmes sur les isoperimetres,*[7] où il employait le même symbole pour la dérivée, il donna aussi à la fonction le signe φ. Cette notation fut acceptée bientôt par quelques autres mathématiciens p. ex. Clairaut, qui en 1734 dans son mémoire: *Solution de plusieurs problèmes* etc.,[8] se servit

des signes Πx, Φx, Δx pour représenter différentes fonctions quelconques de x. Enfin Euler, vers le milieu du 18e siècle, commençait à employer aussi la lettre f dans le même sens.[9]

Pour des fonctions quelconques de deux variables Leibniz proposait en 1698[10] les signes $\overline{x;y}\lfloor\underline{1}\rfloor$, $\overline{x;y}\lfloor\underline{2}\rfloor$, etc., mais ce n'est que vers le milieu du 18e siècle qu'on semble avoir introduit des symboles particuliers pour ces fonctions. En effet, les premiers écrits où j'ai trouvé de tels symboles sont les *Réflexions sur la cause générale des vents* (Paris 1747) de d'Alembert, où des fonctions de u et s sont désignées (p. 164) par $\Delta u, s$, $\Gamma u, s$, et les *Remarques sur le mémoire précédent de M. Bernoulli*[11] d'Euler, où une fonction de x et t est représentée par $\Phi:(x, t)$.

En terminant, je me permets de faire observer que l'usage des symboles f, φ, ψ, etc. pour des fonctions quelconques de variables données a été répandu principalement par les écrits de Lagrange et en premier lieu par sa *Théorie des fonctions analytiques*.

[1] M. Ball (*A short account of the history of mathematics*, p. 280) indique que Sluse introduisit les signes f_x et f_y pour les dérivées partielles de $f(x, y)$, mais cette indication est incorrecte; Sluse n'a employé aucun signe particulier ni pour $f(x, y)$, ni pour ses dérivées partielles.

[2] Joh. Bernoulli, *Additamentum effectionis quadraturarum et rectificationum per seriem quandam generalissimam.* Acta eruditorum 1694, p. 437.

[3] Jac. Bernoulli, *Explicationes, annotationes et additiones* etc. Acta eruditorum 1695, p. 553.

[4] Leibnitii *et* Joh. Bernoullii *commercium philosophicum et mathematicum.* I (Lausannæ 1745), p. 392. — Cf. Joh. Bernoulli, *De conoidibus et sphæroidibus* etc. Acta eruditorum 1697, p. 115.

[5] Leibnitii *et* Bernoullii *commercium* etc. I, p. 399.

[6] Mém. de l'acad. des sciences de Paris 1706, p. 2[illegible]

[7] Mém. de l'acad. des sciences de Paris 1718, p. 1[illegible]

[8] Mém. de l'acad. des sciences de Paris 1734, p. 1[illegible]

[9] Voir Euler, *Sur la vibration des cordes.* Mémoires [illegible] l'académie des sciences de Berlin 1748, p. 78.

[10] Voir le passage cité ci-dessus dans la note [5].

[11] Mém. de l'acad. des sciences de Berlin 1753, p. 2[illegible]

RECENSIONEN. — ANALYSES.

W. Schultz. DIE HARMONIE IN DER BAUKUNST. NACHWEISUNG DER PROPORTIONALITÄT IN DEN BAUWERKEN DES GRIECHISCHEN ALTERTUMS. ERSTER TEIL. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DES ANGEWENDETEN PROPORTIONIERUNGS-SYSTEMES. Mit 60 Holzschnitten. Hannover-Linden, Verlagsanstalt von C. Manz 1891. 4°, IV + 124 p.

Das Bestreben, die den antiken und mittelalterlichen Architekturdenkmälern zu grunde liegenden Massgesetze wieder aufzufinden, ist ein durchaus natürliches, und es fehlt nicht an sehr tüchtigen Arbeiten, welche das Problem, jede nach ihrer Art, zu lösen versuchten. Die Namen ZEISING, PFEIFER, HULTSCH, um nur einige zu nennen, mögen zur Bekräftigung des Gesagten dienen. In die gleichen Bahnen tritt die vorliegende Monographie ein, welche sich als erste Abteilung eines umfänglicheren Werkes über den mathematischen Charakter der alten Baukunst einführt. Man merkt es dem Verf. an, dass er gründliche Studien auf seinem Gebiete angestellt und nicht nur die archaeologische Litteratur herangezogen, sondern sich auch mit der *Geschichte der Mathematik*, soweit sie für seine Zwecke in betracht kam, bekannt gemacht hat. Bei VITRUV suchte er zuerst Aufschluss über die ihn beschäftigenden Fragen zu erhalten, und als ihm dies misslang, ging er erst daran, die Gedanken, welche sich ihm bei der Vergleichung griechischer Tempelmasse aufgedrängt hatten, zu einem selbständigen Systeme auszugestalten. Ausdrücklich aber hebt er hervor, dass er nicht gesonnen sei, seine Gesetze in dem Sinne deuten zu wollen, dass etwa der Baumeister durch deren Kenntnis den Mangel künstlerischer Befähigung auszugleichen vermöge; mache doch auch der Generalbass den Musiker nicht, so wenig letzterer auf die ihm durch die Theorie der Klangharmonie gebotene Hilfe verzichten dürfe.

An der Hand zahlreicher Pläne glaubt sich der Verf. zu dem Schlusse berechtigt, dass das »harmonische Rechteck» die Grundlage abgäbe, von welcher man in allen Fällen ausgegangen sei. Der neue Begriff ist nicht mit wenigen Worten zu definieren, vielmehr sind einige vorhergehende Erörterungen dazu notwendig. Wenn man unter d die Diagonale eines Rechteckes, unter g und k $(g > k)$ dessen Seiten versteht, so dass also die drei Grundzahlen durch die Gleichung $d^2 = g^2 + k^2$ zusammengehalten werden, so kann man gewisse Proportionen bilden, in denen resp. die vier Grössen d, g, k und $(g-k)$ als Verhältnis-

glieder auftreten, und jedes Rechteck, für dessen Bestimmungsstücke eine dieser Proportionen gilt, fällt unter die obige Bezeichnung. Der Verf. ist mit der hellenischen Proportionenlehre, wie sie zumal bei NICOMACHUS abgehandelt wird, wohl vertraut und betrachtet zunächst solche Proportionen, welche für g, k und $(g-k)$ stetig sind, d. h. in welche nur diese drei und nicht vier Glieder eingehen. Dann sind zehn Verhältnisgleichungen möglich, welche aber nur fünf unter sich verschiedene Werte für den echten Bruck $k:g$ liefern. Die harmonische Proportion $g:(g-k)=[g-(g-k)]:[k-(g-k)]$ ergibt z. B. $k:g=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, wodurch die bekannte Relation des goldenen Schnittes angedeutet ist, wogegen aus der Proportion $k:(g-k)=[g-(g-k)]:(g-k)$ nur die Identität $k=k$ resultiert. Ungleich werwickelter werden die Bestimmungsgleichungen natürlich dann, wenn auch die Diagonale mit eintritt; dieselben steigen zum dritten und vierten, ja sogar zum achten Grade an und sind nur zum teile reduzibel. Sämtliche errechnete Werte konstruiert der Verf. geometrisch in sehr eleganter Weise, und wir glauben nicht, dass er an planimetrischen Kenntnissen und Fertigkeiten mehr voraussetzt, als in der That von einem griechischen Geometer, wenigstens der euklidischen Periode, vorausgesetzt werden darf. Die neueren Untersuchungen über angenäherte Berechnung von Irrationalzahlen bei den Alten scheinen dem Verf. nach dem, was er hierüber sagt (S. 52), nicht bekannt geworden zu sein.

Aus dem harmonischen Grundrechtecke lassen sich neue Rechtecke ableiten, welche einzelne, in sich abgeschlossene Teile eines jeden Bauwerkes umfassen und, da sie zur proportionalen Gliederung der Teile dienen, ebenfalls wieder als harmonisch im vorhin festgesetzten Sinne zu betrachten sind. Auf diese Gesetzmässigkeiten hin werden nunmehr vom Verf. die Abmessungen einiger Tempel durchmustert, welche als Musterbeispiele dienen können. Es sind dies der Stadt- und der Burgtempel von Selinus, der Theseustempel von Athen, der bekannte kleine Tempel von Paestum und das der Eintracht geweihte Heiligtum zu Agrigent. Es gelingt, und zwar, wie wir zugeben müssen, in ungezwungener Weise, allenthalben jene Zahlenverhältnisse wiederzuerkennen, welche vorher den Gegenstand der Diskussion gebildet haben.

Ob es möglich ist, aus angenäherter Übereinstimmung zwischen gewissen Linienverhältnissen der aegyptischen Pyramiden mit jenen Werten eine durch THALES und PYTHAGORAS angebahnte Beziehung zwischen dem Wissen der Griechen und

dem des Landes, welches jene als das Mutterland ihrer eigenen Bildung verehrten, herzuleiten, das möchten wir hier dahingestellt sein lassen. Wohl aber halten wir den Umstand für sehr beachtenswert, dass Herr SCHULTZ die Hypothese HAUCKS von der Kurvatur gewisser horizontaler Gebälke adoptiert und scharfsinnig mit seinen eigenen Aufstellungen verknüpft.

München. S. GÜNTHER.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1891: 2. — [Analyse de l'année 1890;] Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 10—19. [V. V. BOBYNIN.] — [Analyse des cahiers 1 et 2 de l'année 1891:] El progreso matem. **1**, 1891, 183—184.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
10 (1891): 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
36 (1891): 3.

Ball, W. W. R., Newton's classification of cubic curves.
Biblioth. Mathem. 1891, 35—40. — Résumé du mémoire publié dans les Transactions of the London mathematical society **20**, 1891, 104—143.

БОБЫНИНЪ, В. В., Изъ біографіи НИЛЬСА-ГЕНРИКА АБЕЛЯ.
Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 1—9. — BOBYNIN, V. V., De la biographie de N.-H. ABEL. (Séjour à Paris; retour à la Norwège.)

БОБЫНИНЪ, В. В., Приложенія исторіи математики къ рѣшенію и постановкѣ нѣкоторыхъ вопросовъ преподаванія математическихъ наукъ.
Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1891, 71—76. — BOBYNIN, V. V., Usage de l'histoire des mathématiques pour la résolution et la décision de quelques questions relatives à l'enseignement des sciences mathématiques.

Braunmühl, A. v., Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom. Bamberg, Buchner 1891.
8°, 92 p. — [1.40 Mk.] — [Analyse:] Deutsche Litteraturz. **12**, 1891, 1247—1249. (E. WOHLWILL.)

Curtze, M., Commentar zu dem »Tractatus de numeris datis« des Jordanus Nemorarius. (Fortsetzung.)
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 81—95, 121—138.

Eneström, G., Gumersindo Vicuña (1840—1890).
Biblioth. Mathem. 1891, 33—34.

Favaro, A., La torre pseudo-galileiana di Ponte Molino.
| Rassegna padovana di sc., lett. ed arti **1**, 1891. 9 p.

Favaro, A., Sopra una scrittura inedita di Giovanni Keplero intorno al sistema Copernicano.
| *Roma*, Accad. dei Lincei, Rendiconti **7**: 2, 1891, 18—24.

Gerhardt, K. J., Leibniz über die Determinanten.
| *Berlin*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1891. 17 p.

°**Graf, J. H.,** Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in bernischen Landen von Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Drittes Heft (zweite Abtheilung): Das 18. Jahrhundert, 2. Hälfte. Bern 1891.
8°, 7 + 280 p. + 2 portr. + 2 pl. — [2.40 M.] — [Analyse:] Liter. Centralbl. 1891, 499—500. (—z—k.)

°**Haberland, M.,** Zur Geschichte der Null.
Monatsschrift für den Orient (Wien) **16**, 1890.

Halsted, G. B., On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas.
Biblioth. Mathem. 1891, 53.

León y Ortíz, E., Discurso leído en la universidad central en la solemne inauguración del curso académico de 1890 á 1891. Madrid 1890.
8°, 75 p. — Etude historique sur le problème de la figure de la terre.

Loria, G., Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **5**, 1891, 236—251. — Réimpression, avec quelques additions, de la notice publiée dans la Biblioth. Mathem. 1891, 1—12. A la liste bibliographique y insérée, M. Loria a ajouté deux notices biographiques traduites de l'allemand par Casorati et une *Nota di matematica pura* publiée en 1881 dans les Transunti della r. accademia dei Lincei.

МАРАКУЕВЪ, Ньютонъ, его жизнь и труды. Изд. 2:e. Москва 1890.
8°, 205 p. — Marakoueff, Newton, sa vie et ses oeuvres.

°**Peveling, J.,** Geschichte der Gesetze von der Erhaltung der Materie und Energie. Aachen 1891.
4°, 40 p. — (1.50 Mk.)

ПРЕДТЕЧЕНСКIЙ, Е., Галилей, его жизнь и научная деятельность. Бiографическiй очеркъ. С.-Петербургъ 1891.
8°, 95 p. — [25 kop.] — Predtetchenskij, E., Galilei, sa vie et action scientifique. Esquisse biographique.

Schultz, W., Die Harmonie in der Baukunst. Nachweisung der Proportionalität in den Bauwerken des griechischen Altertums. Erster Teil. Mathematische Grundlagen des angewendeten Proportionirungs-Systemes. Hannover-Linden, Manz 1891.
4°, IV + 124 p.

Steinschneider, M., Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. (Fortsetzung.)
Biblioth. Mathem. 1891, 41—52.

Strauss, E., Aus Galileis Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme. Frankfurt a/M. 1891.
4°, 26 p.

Tannery, P., Les autographes de Descartes à la bibliothèque nationale. (Continuation.)
Bullet. d. sc. mathém. **15**$_2$, 1891, 111—120.

ВАСИЛЬЕВЪ, А., Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.
Kazan, Fiziko-matem. obchtch., Isvjestija **1**$_2$, 1891, 1—21. — Wassilieff, A., Sur l'histoire et la philosophie de la notion de nombre entier positif. — [Résumé:] Vjestnik elem. matem. **10**, 1891, 224—228.

Wiedemann, E., Über die Naturwissenschaften bei den Arabern. Vortrag. Hamburg 1890.
8°, 32 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 73—74. (P. Treutlein.)

Question 34 [sur l'histoire de certaines courbes].
Biblioth. Mathem. 1891, 64. (Académie des sciences de Madrid.)

Apollonii Pergaei quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Volumen I. Lipsiæ, Teubner 1891.
Deutsche Litteraturz. **12**, 1891, 595. (M. Curtze.)

Diophantus, Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim. Leipzig, Teubner 1890. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 97—98. (Cantor.)

Fine, H. B., The number-system of algebra treated theoretically and historically. New York, Leach 1891. 8°.
Biblioth. Mathem. 1891, 54. (G. Eneström.)

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660—1661. La Haye, Nijhoff 1890. 4°.
Liter. Centralbl. 1891, 977. (—z—r.)

Loria, G., Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico. (Memorie dell' accad. delle scienze di Torino **40**$_2$.) Torino 1890. 4°.
Biblioth. Mathem. 1891, 55—60. (H. Künssberg.)

MANITIUS, K., Des Geminos Isagoge nach Inhalt und Darstellung kritisch beleuchtet. Sonderabdruck aus den »Commentationes Fleckeiseniananae». Leipzig, Teubner 1890. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 96—97. (CANTOR.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1890. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 110—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1891, 61—64. — Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 20—32. — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 107—109.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

35. Dans plusieurs traités de l'histoire des mathématiques des indications inexactes sont données sur l'introduction des différentes signes de multiplication. Ainsi p. ex. M. BALL (*A short account of the history of mathematics*, p. 213) indique que HARRIOT s'est servi du croix de multiplication (×), et que le point de multiplication (·) a été employé en 1637 par DESCARTES, bien que HARRIOT, dans son *Artis analyticae praxis*, n'a fait usage que du second signe, et que, d'autre part, ce signe ne se trouve pas dans la *Géométrie* de DESCARTES.

On demande une notice historique sur les différents signes de multiplication dont les mathématiciens se sont servis.

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1891.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK HERAUSGEGEBEN VON | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 5. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

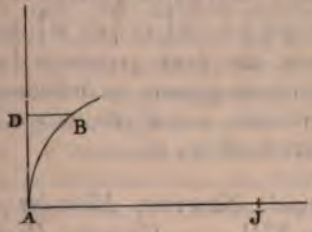
NOUVELLE SÉRIE. 5. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton.

Par G. VIVANTI à Mantova.

Aujourd'hui, où l'on poursuit avec activité l'étude des classes de grandeurs contenant des éléments infiniment petits et infiniment grands, il n'est pas peut-être sans intérêt de rappeler, que NEWTON a eu lieu de considérer une classe de cette nature. On lit en effet dans les *Philosophiae naturalis principia mathematica*[1] (lib. I, sect. I, scholium ad lemma XI):

Caeterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem;



hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse, nec infinite magnam, seu intervallum AJ [le diamètre du cercle osculateur] finitae esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum A inter

tangentem AD et curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, etc., habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat DB successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, etc., habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est eiusdem generis cum circularibus, secundus infinite maior, et quilibet posterior infinite maior priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite maior minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 et AD^3, inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$ etc. Et rursus inter binos quosvis angulos huius seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Voici la traduction en langage moderne de ce passage. Considérons toutes les courbes tangentes à l'axe des x à l'origine, et dont les équations dans le voisinage de ce point ont par conséquent la forme $y=ax^m$, où x est une constante quelconque et $m > 1$. Bornons-nous de plus aux branches où $x > 0, y > 0$, c. à. d. supposons toujours $a > 0$. A toute courbe

$$y=ax^m \qquad (a>0, m>1)$$

nous pouvons faire correspondre un concept (*angulus contactus*) dénotant le degré d'intimité du contact entre la courbe et l'axe des x. Ces concepts, qu'on peut désigner par $\{a, m\}$, sont des grandeurs dans l'acception générale de ce mot; deux de ces grandeurs, telles que $\{a, m\}$ et $\{a', m\}$, sont comparables entre elles, au contraire des deux grandeurs $\{a, m\}$ et $\{a', m'\}$ la première est infiniment grande ou infiniment petite par rapport à l'autre suivant que $m < m'$ ou $m > m'$, quelles que soient d'alileurs les valeurs de a, a'.

[1] Comparez aussi: NEWTON, *Methodus fluxionum*, probl. V, ex. IV, cor. VIII; — GRANDI, *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus*, prop. VI.

Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche.

Di Gino Loria a Genova.

La risoluzione delle equazioni algebriche generali determinate dei primi quattro gradi dimostrò l'esistenza nel campo degli ordinarî numeri complessi di un ente analitico soddisfacente ogni relazione di tale natura. Da questo fatto, gli scienziati del secolo passato, con una generalizzazione frettolosa quanto ingiustificata, conclusero che esso si sarebbe ripetuto in equazioni di grado qualunque e si servirono di questo risultato come di cosa indiscutibilmente assodata; così fece A. Girard[1] nell' esporre le formole che dànno le somme delle potenze simili delle radici di un' equazione in funzione dei coefficienti, così fecero Leibniz[2] e Giovanni Bernoulli[3] insegnando a integrare le frazioni razionali. Non tardarano però a sorgere degli scrupoli sulla legittimità di quell'estensione, sicchè Eulero[4] asserì di essere in grado di dimostrare quello che oggi si considera come il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, mentre D'Alembert[5] (n:o 1) esponendone una dimostrazione, buona se non perfetta, indusse parecchi a dare a quella proposizione il nome di *teorema di D'Alembert*. Al geometra dell' Enciclopedia tengono dietro, ma con mediocre successo, Eulero (n:o 2) ed il suo commentatore Daviet de Foncenex (n:o 3); si provano invano a fare altrettanto Lagrange (n:o 4) e Laplace (n:o 5; cfr. n:o 20); viene finalmente Gauss (n:o 6) il quale, dopo avere messo a nudo le imperfezioni delle argomentazioni anteriori, ne insegna una che soddisfa anche i critici più rigorosi e persuade non pochi scienziati ad accordare il nome di *teorema di Gauss* alla proposizione di cui ci occupiamo. A partire da questo momento le dimostrazioni di questa proposizione si succedettero con grande frequenza, sicchè oggi il loro numero è divenuto legione. E siccome non tutte sono essenzialmente distinte, nè tutte si riconoscono per conclusive se esaminate al lume di una critica rigorosa, così sembrò opportuno farne l'inventario, la stima e il bilancio, col fine di concludere quali di esse siano originali e soddisfacenti. Un tale studio fu da me tentato nello scritto intitolato *Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche* recentemente apparso nel primo volume della Rivista di matematica diretta da G. Peano;

e per aderire all'invito fattomi dall' egregio direttore della Bibliotheca Mathematica, ne esporrò quì per sommi capi il contenuto, aggiungendovi qualque nuovo dato.

I. La prima dimostrazione di GAUSS, nella sua forma primitiva (n:o 6) si applica soltanto ad un' equazione

$$f(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

a coefficienti reali e si fonda sulla sostituzione della tesi da dimostrare (l'esistenza di una radice) coll' altra: le due curve

$$T \equiv r^m \cos m\varphi + a_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \ldots + a_{m-1} r \cos\varphi + a_m = 0$$
$$U \equiv r^m \operatorname{sen} m\varphi + a_1 r^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi + \ldots + a_{m-1} r \operatorname{sen}\varphi = 0$$

hanno sempre almeno un punto (reale) comune. Ma il concetto fondamentale di essa, non solo è capace di guidare a tutte le radici della equazione proposta, ma è applicabile anche ad equazioni con coefficienti complessi: allora però le funzioni reali T e U delle variabili reali r e φ sono definite dall' identità

$$f(re^{i\varphi}) = T + iU.$$

Tale possibilità già indicata da GAUSS nella citata pubblicazione, venne da lui completamente dimostrata cinquant'anni più tardi (n:o 32) in un lavoro il quale porse l'occasione al PEROTT (n:o 71) di imaginare un'altra argomentazione avente il medesimo intento, simile ma differente da quella di GAUSS e che non mi sembra ad essa preferibile, fra l'altro, perchè presuppone nota l'esistenza di un minimo di una certa funzione reale di due variabili reali. Un'altra e migliore trasformazione del ragionamento gaussiano, propose il DUTORDOIR (n:o 60), che, arrivando a dimostrare la possibilità di far tendere simultaneamente e indefinitamente verso zero le due funzioni reali T e U delle variabili reali t e u definite dall'identità $f(t+iu) = T + iU$, potè concludere il teorema di cui trattiamo.

Minor divario esiste fra il ragionamento di GAUSS, nella sua seconda forma, e quello del DRONKE (n:o 44), onde ci dispensiamo dall' arrestarci su questo.

II. Indipendentemente da GAUSS, R. ARGAND dimostrò il teorema fondamentale in uno scritto (n:o 7; cf. n[i] 10 e 11) celebre perchè contiene la prima esposizione della rappresentazione degli ordinarî numeri complessi sui punti reali del piano. Il ragionamento ivi proposto poggia appunto su questa rappresentazione; esso consiste nel costruire la linea poligonale che comincia nell' origine delle coordinate ed ha per lati consecutivi le rette rappresentatrici dei numeri complessi che, per

dato valore della variabile, sono i varî termini del primo membro dell' equazione data; e a mostrare che se per un certo valore della variabile questa linea non si chiude, si può alterare questo valore sicchè il lato di chiusura risulti nel secondo caso minore che nel primo. Da ciò l'ARGAND conclude la possibilità di ottenere, per certi speciali valori della variabile, una linea chiusa e sostiene di avere così dimostrato il teorema, malgrado le sensate obbiezioni del SERVOIS. Queste obbiezioni, benchè giuste, non annientano il nerbo del ragionamento di ARGAND: questo non è errato, ma presuppone l'esistenza di un minimo per il lato di chiusura della linea poligonale dianzi costruita; dopo avere colmata questa lacuna, si ottiene un'argomentazione di cui si può tuttora servirsi (cfr. anche i n[i] 39, 49, 68 e 72).

III. Un affinità profonda (e secondo taluno non fortuita) esiste fra il ragionamento di ARGAND e quelli scaturienti dall'osservazione, fatta da LEGENDRE (n:o 8), che, data l'equazione $f(z)=0$, se si definiscono le due funzioni reali P e Q di x e y col mezzo dell'identità $f(x+iy)=P+iQ$ e si attribuiscono ad x, y dei valori speciali, si possono dare ad essi degli incrementi tali che il rapporto dei valori assunti da $f(z)$ corrispondentemente a queste due coppie di valori di x, y sia arbitrariamente piccolo (cfr. n:o 36). Questo non basta certo (come pensava LEGENDRE) a concludere la esistenza di valori per x, y che annullino $f(z)$ epperò non a torto il PEACOCK (cfr. n:o 20) era dubbioso nell'ammettere che le parole di LEGENDRE formassero una dimostrazione del teorema fondamentale; noi pure ci accostiamo a questo modo di vedere; ma crediamo doversi attribuire a quelle parole qualche valore pel potere che ebbero di spingere CAUCHY (n[i] 14, 15 e 17) ad escogitare quella dimostrazione che, sotto forme più o meno diverse (v. STURM nel *Traité élémentaire d'algèbre* di CHOQUET e MAYER, V ed., 1849, p. 396—402; YOUNG, *Theory and solutions of algebraic equations of higher order*, II ed., 1843, p. 32—39; BALZER, *Elementi di matematica, trad.* CREMONA, Parte III, 1875, p. 125; n[i] 27 e 77), venne adottata dai più e che, quando sia completata dalla previa dimostrazione dell' esistenza di un minimo per $|f(z)|^2$ (v. n:o 43), fu considerata come conclusiva anche dai giudici meno indulgenti (cfr. THOMAE, *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Variabeln*, 1880, p. 88; STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, II. Th., 1886, p. 117) e potè anche servire a concludere il teorema analogo della »Würfentheorie» (n:o 46); chi non lo conosce dopo la lucida esposizione fattane dal SERRET nel suo *Cours d'algèbre supérieure*?

Alla dimostrazione di CAUCHY collegansi i tentativi fatti dal BURG (n:o 19; cfr. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig 1878, p. 12) e del SUSSMANN (n:o 33) per dimostrare l'esistenza di un minimo nullo per la funzione $|f(z)|^2 = P^2 + Q^2$ applicando la notissima regola suggerita dal Calcolo differenziale per la determinazione dei valori estremi di una funzione di due variabili; nonchè il tentativo fruttifero fatto dal WALTON nel medesimo senso (n:o 42).

Osserviamo ora che l'obbiezione mossa al ragionamento di CAUCHY si può evitare, tanto assodando in precedenza la necessaria esistenza di un minimo per $|f(z)|^2$, quanto insegnando un metodo per costruire una serie illimitata di numeri soddisfacenti alle due condizioni di tendere ad un limite determinato e di far prendere a $|f(z)|^2$ dei valori decrescenti con continuità e senza limite. Un metodo di tal natura venne insegnato una prima volta dal LIPSCHITZ (n:o 48; cfr. n:o 53) ed una seconda dal MERTENS (n:o 74): l'uno ammettendo per vero il teorema fondamentale in equazioni di grado inferiore ad un certo numero n ed estendendone la portata fino a questo numero, l'altro applicando il metodo di approssimazione di NEWTON ad equazioni aventi per coefficienti dei numeri complessi razionali. Le dimostrazioni così ottenute si distinguono per rigore, non per semplicità.

IV. Il carattere comune delle pseudodimostrazioni proposte per il teorema fondamentale da EULERO (n:o 2), DE FONCENEX (n:o 3), LAGRANGE (n:o 4), LAPLACE (n:o 5), BURG (n:o 18) è di reggersi sulla deduzione dall' equazione proposta di un' altra equazione avente almeno una radice in evidenza; l'errore comune a tutte risiede nel venire tale equazione ottenuta e le sue proprietà stabilite considerando le radici dell' equazione primitiva, presupponendo cioè appunto il teorema da dimostrarsi; il modo per renderle conclusive risiede in un artifizio che guidi a quell'equazione ed alle sue proprietà senza invocare in alcun modo le radici. Tale espediente fu rintracciato da GAUSS nella teoria delle *quantità indeterminate* (n:o 12). Lo spazio ci manca per delineare, anche solo nei suoi contorni, l'argomentazione nè breve nè semplice del grande geometra; facciamo però osservare che la fecondità dei germi ivi gittati è messa in luce, fra l'altro, dal numero e dal valore delle altre dimostrazioni dello stesso teorema che essi fruttarono (n[i] 29, 47, 52, 54, 56).[a]

V. Non meno originale della seconda è la terza dimostrazione scoperta da GAUSS per il teorema fondamentale. Essa è di natura apagogica in quanto consiste nel far vedere che, su

ponendo una equazione algebrica esente da radici, in un certo integrale doppio non si potrebbe invertire l'ordine delle integrazioni quantunque la quantità posta sotto il segno $\int\int$ si conservasse sempre continua e finita nel campo d'integrazione (n:o 13).

Della medesima natura è un' argomentazione assai più moderna ed avente il medesimo fine (n:o 58), in cui però l'assurdo dell' ipotesi contraria alla tesi da provare emerge dalla contraddizione in cui essa si trova con un teorema della teorica delle funzioni di una variabile complessa scoperto da Riemann (*Inaugural-Dissertation* § 10, *Ges. Werke*, 1876, p. 20).

VI. Per opera del Mourey (n:o 16; cfr. n:o 25) la Francia ha fornito una seconda dimostrazione geometrica del teorema fondamentale, distinta da quella di Argand e meritevole di non minore considerazione. In essa si parte dalla supposizione che il teorema sia già stato verificato in equazioni di grado $\leqq m-1$; per concluderlo riguardo allo equazione

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0$$

si osserva potersi scrivere, in forza dell' ipotesi fatta,

$$z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} = (z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{m-1}),$$

e si riduce così la questione ad accertare che si può scegliere z in modo che questo prodotto moltiplicato per z risulti eguale a $-a_m$. Si ponga a tale scopo

$$z=\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \qquad -a_m = R(\cos\Phi + i \operatorname{sen}\Phi)$$

$$z-c_k=\rho_k(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k) \qquad (k=1,2,\ldots,m-1)$$

e si noti che, se M rappresenta nel modo consueto la variabile complessa z, e $A_1, \ldots, A_{m-1}$ i numeri complessi $c_1, \ldots, c_{m-1}$, saranno $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{m-1}$ le lunghezze delle rette MO, MA_1, $\ldots$, MA_{m-1} e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ gli angoli da esse formati coll' asse polare: si vedrà allora che la questione anzidetta rientra nella ricerca di una posizione di M tale che si abbia ad un tempo

$$\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1} = R, \qquad \varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{m-1} \equiv \Phi (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Orbene l'esistenza di questa posizione si può verificare mediante considerazioni geometriche non complicate, che a vero dire il Mourey espose con poca esatezza, ma su cui mi credo dispensato dell' insistere perchè furono messe sotto forma soddisfacente (e indipendentemente da quanto aveva fatto il Mourey) dall'Holst (n:o 69)[1] in un epoca assai vicina a noi. Vogliamo però rilevare come l'argomentazione Moureyana sia stata adattata a provare la proposizione analoga della teoria dei quater-

nioni da W. R. HAMILTON (n:o 37), il quale, senza disconoscerne i difetti di forma, ne seppe pregiare le doti sostanziali.

VII. Vi è un gruppo di dimostrazioni del teorema fondamentale le quali hanno la loro base nella trasformazione dell'equazione proposta in altra od in altre. Escludendo quelle del BURG (n:o 22; cfr. MATTHIESSEN, l. c. p. 11) e del MACNIE (n:o 50), perchè imperfette, se ne possono distinguere due tipi. Dell' una — inventata successivamente da CLIFFORD (n:o 40), MALET (n:o 51) e WALECKI (n^{i} 59 e 62) — l'andamento generale è il seguente: nell' equazione proposta $f(z)=0$ di grado $m=2^{\lambda}m'$, m' dispari, si ponga $z=x+y$ e si ordini il risultato secondo le potenze di x; riunendo i termini, che diremo A, con potenze pari e ponendo x a fattore dei rimanenti, che diremo B dopo che furono divisi per x, facendo $x^2=\xi$ e $m=2n$ ed eguagliando a 0 separatamente l'insieme dei termini A e l'insieme dei termini B, si avranno due equazioni di grado n in ξ aventi per coefficienti delle funzioni algebriche razionali intere di y, e tutto è ridotto a dimostrare la possibilità di scegliere per y un valore tale che queste due equazioni abbiano una radice comune. A tale scopo si osservi che il risultante delle equazioni anzidette (supposto definito mediante il determinante a cui conduce il metodo dialitico di SYLVESTER) eguagliato a 0 dà un'equazione in y di un grado avente la forma $2^{\lambda-1}m'_1$, con m'_1 dispari; quindi ove il teorema fosse noto per equazioni il cui grado contiene un fattore $2^{\lambda-1}$, si concluderebbe subito per equazioni il cui grado contenga un fattore 2^{λ}. Ora, per $\lambda-1=0$ il teorema si dimostra direttamente senza difficoltà perchè si ha in tal caso un'equazione di grado dispari; quindi si concluderà in generale. L'altra dimostrazione è dovuta al BRISSE (n:o 67) e si fonda sulla sostituzione in $f(z)=0$ a z del prodotto yz e nella osservazione che la decomposibilità in fattori di $f(z)$ sarà assicurata quando siasi verificata l'esistenza di un valore di y che faccia acquistare un fattore comune a $f(z)$ e $f(yz)$. Ora il risultante (definito come sopra) di queste due funzioni, liberato dal fattore $(y-1)^m$ ed eguagliato a 0 dà un'equazione reciproca di grado $\frac{m(m-1)}{2}$; questo grado contiene il fattore 2 un numero di volte minore del numero delle volte che 2 entra in m come fattore: onde giunti a questo punto si potrà applicare l'induzione completa in modo analogo a quello indicato nella dimostrazione precedente.

VIII. CAUCHY ha fatto cenno (v. la memoria litografata a Torino il 27 sett. 1831 e presentata a quell'Accademia

17 nov. dell' anno stesso, oppure n:o 23), STURM e LIOUVILLE dimostrarono (n:o 21) la possibilità di dedurre il teorema fondamentale come corollario della seguente proposizione (dovuta a CAUCHY stesso): »Sia $f(z)=P+iQ$ una funzione algebrica razionale intera della variabile complessa $z=x+iy$; P et Q saranno funzioni reali delle variabili reali x et y. Si segni nel solito piano di rappresentazione una linea chiusa l che non passi per alcun punto radice dell' equazione $f(z)=0$ e si supponga che da un punto mobile venga completamente descritta sempre nello stesso senso. In ogni posizione del punto mobile il rapporto $\frac{P}{Q}$ avrà un determinato valore, il quale sarà o nei punti ove $P=0$ e ∞ in quelli ove $Q=0$; se k è il numero delle volte in cui questo rapporto passa annullandosi dal campo positivo al negativo, e k' il numero di volte in cui accade il passaggio inverso, sara $k \geq k'$, e la differenza $k-k'$ eguaglierà il doppio del numero di radici di $f(z)=0$ situate entro la linea l». Vi sono delle dimostrazioni di ULLHERR (n:o 30), DE MORGAN (n:o 34), AIRY (n:o 35) e SOCHOCKI (n:o 64) in cui ho creduto ravvisare qualche lineamento comune colla deduzione precedente: l'angustia dello spazio, scusi il laconismo di questo cenno.

IX. Siccome dimostrare l'esistenza di radici in un' equazione algebrica $f(z)=0$ a coefficienti reali, val quanto dimostrare l'esistenza di un fattore quadratico reale nel primo membro di essa, così la verità del teorema fondamentale sarà posta fuor di dubbio quando sarà provata la possibilità di determinare le costanti b e c in guisa che, posto

$$f(x)=(x^2-bx+c)Q(x)+(tx+u),$$

risulti ad un tempo $t=0$ e $u=0$. Tale possibilità fu chiarita per la prima volta da E. COLLINS (n:o 24) supponendo di grado pari l'equazione proposta. Più tardi il JOURJON (n:o 70) tentò di procedere in un'analoga direzione, ma il suo ragionamento presenta dei nèi di una certa gravità. E nell'anno stesso in cui scriviamo, il PHRAGMÉN (n:o 79) fece uso di un concetto somigliante cercando e riuscendo a persuadere che si è in grado di dimostrare il teorema fondamentale anche quando si voglia proibirsi l'uso di funzioni trigonometriche e di numeri complessi.

X. Il teorema fondamentale enunciato sotto la seguente forma più generale: »ogni funzione algebrica razionale intera di una variabile complessa è suscettibile di qualunque valore» è stato provato in più modi, che conviene distribuire in due gruppi. Un primo gruppo racchiude dimostrazioni analitiche. Esso

comprende un ragionamento che non è se non un facile corollario di proposizioni fondamentali nella teoria delle funzioni di una variabile affatto libera; ed uno, proposto dal KINKELIN (n:o 41), più elementare ed algebrico, il quale però ha d'uopo di qualche ritocco prima di venire accolto. — Un secondo gruppo abbraccia delle argomentazioni geometriche tendenti a far vedere che, rappresentate su due piani le variabili complesse z e $w=f(z)$, i punti w corrispondenti a tutte le possibili posizioni di z, coprono tutto il relativo piano; una di esse fu suggerita da SCHREIBNER (v. n:o 38), mentre un'altra fu indicata la prima volta del DEHANA (n:o 26) nel 1840. Questa fu poi esposta una seconda volta e sotto forma differente sei anni dopo dall' ULLHERR (n:o 30); il concetto che la informa nel 1883 apparve originale all' HOCKS (n:o 61) il quale eresse su di esso una dimostrazione del teorema fondamentale che, non solo manca di novità, ma ha bisogno di correzioni (cfr. n:o 75); e negli anni 1884, 1885 e 1887 s'incontrano non meno di quattro nuove redazioni di essa (v. n^i 63, 65, 66 e 73): il gran numero di volte in cui venne publicata, ci autorizza a supporla nota ai lettori almeno nel suo andamento generale.

Alle sette versioni citate della dimostrazione di DEHANA, unisco la dimostrazione che H. SCHEFFLER fece conoscere nel T. XV dell' Archiv für Mathematik und Physik e che ha di recente ripubblicata sotto forma più perfetta (n:o 80): essa però la vince sulle analoghe perchè conduce, non soltanto ad una, ma a tutte le radici dell' equazione proposta.

Non potrei chiudere meglio quest' articolo che accennando alla dimostrazione di ZEUTHEN (n:o 76), che a torto io un tempo ho creduta somigliantissima a quella di DEHANA e seguaci. Rappresentiamo nel modo solito i valori della variabile z sui punti del piano e chiamiamo $\varphi(z)$ una funzione continua ma plurivalente di z. Come si sa, quando dopo che z ha descritta una linea chiusa l, si trova che $\varphi(z)$ non ha al principio ed al termine del suo movimento lo stesso valore, forza è concludere che entro l esiste qualche punto di diramazione di $\varphi(z)$. Ciò premesso si prenda

$$\varphi(z) \equiv \sqrt{z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m};$$

i punti di diramazione di questa funzione, se esistono, son qu
che annullano il polinomio situato sotto il segno di radice, on
per dimostrare il teorema fondamentale è sufficiente assicur
dell' esistenza di punti dell' anzidetta specie. Ora, in forza
quanto si è notato prima, a tale scopo basta trovare un c
torno chiuso tale che quando z lo percorre, $\varphi(z)$ non ripre

lo stesso valore all' origine e alla fine del movimento. E siccome è facile vedere che per tale contorno si può scegliere una circonferenza di raggio infinito, così esistono valori di z che annullano

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m. \qquad \text{Q. e. d.}$$

[1] GIRARD, *Invention nouvelle en l'Algèbre.* Amsterdam 1629 (reimpression par D. BIERENS DE HAAN, Leiden 1882).

[2] LEIBNIZ, *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas.* Acta Eruditorum 1702 e 1703, oppure G. G. LEIBNITII *opera omnia,* ed. DUTENS, T. III (Genevae 1768) p. 373.

[3] JEAN BERNOULLI, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral.* Histoire de l'académie des sciences 1702 (Paris 1720) p. 296.

[4] Miscellanea Berolinensia, **7**, 1743.

[5] Il numero in parentesi serve a richiamare lo scritto che porta lo stesso numero nell' *Elenco* posto al termine di questo articolo.

[6] Il KRONECKER ha annunciata un' altra sua dimostrazione del teorema fondamentale, basata su principî differenti.

[7] Cfr. LORIA, *Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques,* Acta mathematica **9**, 1886, p. 71.

Elenco di pubblicazioni relative al teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.

1. D'ALEMBERT, Recherches sur le calcul intégral, 1^re partie. Histoire de l'académie des sciences et belles lettres, année 1746 (Berlin 1748), p. 183.

2. EULER, Recherches sur les racines imaginaires des équations. Histoire de l'académie des sciences et belles lettres, année 1749 (Berlin 1751), p. 222.

3. DAVIET DE FONCENEX, Réflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis, t. I (1759), p. 113.

4. LAGRANGE, Sur la forme des racines imaginaires des équations. Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin 1772, p. 222. V. anche: Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris 1798. (2^de éd. 1808; 3^e éd. 1826.)

5. LAPLACE, Leçons de mathématiques données à l'École Normale (1795). Journal de l'école polytechn., 7^e et 8^e cah., 1812.

6. GAUSS, Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii 1799, oppure GAUSS' Werke, III. Bd. (Göttingen 1866), p. 1—30.

7. ARGAND, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806. (2e édition 1874.)

8. LEGENDRE, Essai sur la théorie des nombres, 2e édition. Paris 1808.

9. DUBOURGET, Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations. Annales de mathématiques, **2**, 1811—1812, p. 338.

10. ARGAND, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Annales de mathématiques, **4**, 1813—1814, p. 133.

11. ARGAND, Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse. Annales de mathématiques, **5**, 1814—1815, p. 197.

12. GAUSS, Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Commentationes recentiores (Gottingae) **3**, 1816, oppure GAUSS' Werke, III. Bd., p. 31—56.

13. GAUSS, Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. Commentationes recentiores (Gottingae) **3**, 1816, oppure GAUSS' Werke, III. Bd., p. 57—64.

14. CAUCHY, Sur les racines imaginaires des équations. Journal de l'école polytechnique, 18e cah., 1820, p. 411.

15. CAUCHY, Cours d'Analyse de l'école polytechnique, 1re partie. Paris 1821.

16. MOUREY, La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence. Paris 1828. (2e éd. 1861.)

17. CAUCHY, Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination. Exercices de mathématiques, 4e année (1829).

18. BURG, Ueber die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten. Journal für Mathematik **5**, 1830, p. 182.

19. BURG, Compendium der höheren Mathematik. Wien 1833.

20. PEACOCK, Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. Report of the third meeting of the British Association. London 1834.

21. STURM et LIOUVILLE, Démonstration d'un théorème de Cauchy relatif aux racines imaginaires des équations. Journal de mathématiques **1**, 1836, p. 278.

22. BURG, Über die Existenz der Wurzeln einer höheren Gleichung. Jahrb. des k. k. polytechn. Instituts (Wien) **17**, 1832, p. 141; **19**, 1837, p. 155.

23. CAUCHY, Calcul des indices des fonctions. Journal de l'école polytechnique, 25ᵉ cah., 1837, p. 177.

24. COLLINS, Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade. Journal für Mathematik **18**, 1838, p. 119.

25. LIOUVILLE, Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques. Journal de mathématiques **4**, 1839, p. 501.

26. DEHANA, Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten. Journal für Mathematik **20**, 1840, p. 337.

27. STERN, Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Gleichungen. Journal für Mathematik **23**, 1842, p. 370.

28. FAURE, Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités imaginaires. Paris 1845.

29. v. STAUDT, Beweis der Satzes, dass jede algebraische ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann. Journal für Mathematik **29**, 1845, p. 97.

30. ULLHERR, Zwei Beweise für die Existenz der Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen. Journal für Mathematik **31**, 1846, p. 231.

31. SERRET, Cours d'algèbre supérieure. Paris 1849.

32. GAUSS, Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **4**, 1850, oppure GAUSS' Werke, Bd. III, p. 71—102.

33. SUSSMANN, Vereinfachung des Beweises von Cauchy, dass jede Gleichung n^{ten} Grades wenigstens eine Wurzel hat. Journal für Mathematik **44**, 1852, p. 57.

34. DE MORGAN, A proof of the existence of a root in

every algebraic equation: with an examination and extension of Cauchy's theorem on imaginary roots, and remarks on the proofs of the existence of roots given by Argand and by Mourey. Transactions of the Cambridge philosophical society, **10**: 1, 1857, p. 261.

35. AIRY, Suggestion of a proof of the theorem that every algebraic equation has a root. Transactions of the Cambridge philosophical society, **10**: 1, 1858, p. 283.

36. FOSCOLO, Sulla necessaria esistenza di una radice reale o imaginaria in ogni equazione algebrica. Giornale di matematiche **2**, 1864, p. 13.

37. W. R. HAMILTON, Elements of quaternions. Dublin 1866.

38. HANKEL, Vorlesungen über die complexen Zahlen. I. Leipzig 1867.

39. A. TRANSON, Démonstration de deux théorèmes d'algèbre. Nouvelles annales de mathématiques $\mathbf{7}_2$, 1868, p. 97.

40. CLIFFORD, Proof that every rational equation has a root. Proceedings of the Cambridge philosophical society **2**, 1870, p. 156, oppure Mathematical papers (London 1882), p. 20.

41. KINKELIN, Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. Mathematische Annalen **1**, 1870, p. 502.

42. WALTON, A demonstration that every equation has a root. Quaterly journal of mathematics, **11**, 1871, p. 178. — Démonstration du théorème de Cauchy: *toute équation a une racine*. Nouvelles annales de mathématiques $\mathbf{10}_2$, 1871, p. 509.

43. DARBOUX, Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions.. Bulletin des sciences mathém. **3**, 1872, p. 307.

44. DRONKE, Einleitung in die höhere Algebra. Halle 1872.

45. MÉRAY, Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872.

46. LÜROTH, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Mathematische Annalen **8**, 1874, p. 147.

47. GORDAN, Ueber den Fundamentalsatz der Algebra. Matematische Annalen **10**, 1876, p. 572.

48. LIPSCHITZ, Lehrbuch der Analysis. I. Bd. Bonn 1877.

49. HOÜEL, Cours de calcul infinitésimal. T. I. Paris 1878.

50. MACNIE, Proof of the theorem that every equation has a root. The Analyst **5**, 1878, p. 80.

51. Malet, On a proof that every algebraic equation has a root. Transactions of the Irish academy **26**, 1878, p. 453.

52. König, Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme. Mathematische Annalen **15**, 1879, p. 161.

53. Mansion, Toute équation algébrique a une racine. Annales de la société scientifique de Bruxelles **4**, 1880, oppure Mélanges mathématiques par P. Mansion (Gand 1882).

54. Netto, Beweis der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen. Journal für Mathematik **88**, 1880, p. 14.

55. Hammond, Proof that an equation must have at least n roots. Educational Times **36**, 1882, p. 115.

56. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Journal für Mathematik **92**, 1882, p. 1.

57. Mandl, Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln. Anzeiger der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien (Mathem.-naturwiss. Classe) 1882, p. 185.

58. Stieltjes, Bewijs van de Stelling, dat een geheele rationale Functie altijd, voor zekere reële of complexe Waarde van de veranderlijke, de waarde Nul aanneemt. Nieuw Archief voor Wiskunde **9**, 1882, p. 196.

59. Walecki, Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1882, p. 772.

60. Dutordoir, Toute équation algébrique a une racine; démonstration nouvelle. Annales de la société scientifique de Bruxelles **7**, 1883. — Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. Comptes rendus etc. **97**, 1883, p. 742.

61. Hocks, Ueber den Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen. Zeitschrift für Mathematik und Physik **28**, 1883, p. 123.

62. Walecki, Démonstration du théorème de D'Alembert. Nouvelles annales de mathématiques $\mathbf{2}_3$, 1883, p. 241.

63. Rausenberger, Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. Leipzig 1884.

64. Sochocki, Rozwiezywanie rǒwnán liczebnych. Warszawa 1884.

65. Schmitz, Die Erweiterung des Fundamentalsatzes der Algebra. Blätter für das bayer. Gymnasialschulw. **21**, 1885, p. 47.

66. WOODHOUSE, Principio fundamental da theoria des equacões algebraicas. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas **6**, 1885, p. 177.

67. BRISSE, Démonstration du théorème de D'Alembert. Journal de l'école polytechnique **56**, 1886, p. 163.

68. FIELDS, A proof of the theorem: the equation $f(z)=0$ has a root where $f(z)$ is any holomorphic function of z. American journal of mathematics **8**, 1886, p. 178.

69. HOLST, Beweis des Satzes dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. Acta Mathematica **8**, 1886, p. 155.

70. JOURJON, La divisibilité des fonctions entières démontrée sans les imaginaires ou la divisibilité de $F(x)$ par $(x-a)^2+b^2$ ramenée à la divisibilité de $F(a+bz)$ par z^2+1. Paris 1886.

71. PEROTT, Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Journal für Mathematik **99**, 1886, p. 141.

72. JUEL, Om Argand's Bevis for Algebraens Fundamentalsaetning. Tidsskrift for Mathematik **5**$_5$, 1887, p. 161.

73. LAISANT, Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations. Bulletin de la société mathématique de France **15**, 1887, p. 42.

74. MERTENS, Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sitzungsberichte der Akadem. der Wissenschaften zu Wien (Mathem. Cl.) **97**, 1888, p. 1505.

75. V. DALGWIGK, Ueber einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Zeitschrift für Mathematik und Physik **34**, 1889, p. 185.

76. ZEUTHEN, Bevis for, at en algebraisk Ligning altid har en Rod. Nyt Tidsskrift for Mathematik **1**, 1890, p. 65.

77. AMIGUES, Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations. Comptes rendus etc. **112**, 1891, p. 212.

78. MÉRAY, Méthode directe fondée sur l'emploi des séries pour prouver l'existence des racines des équations entières à une inconnue par la simple exécution de leur calcul numérique. Bulletin des sciences mathématiques **15**$_2$, 1891, p. 236.

79. PHRAGMÉN, Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Öfversigt af vetenskaps-akademiens förhandlingar (Stockholm) 1891, p. 113.

80. SCHEFFLER, Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Leipzig 1891.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

7. Boëtius.

Die *Histoire littéraire de la France* t. **30** (1888) enthält (p. 270 ff.) einen Artikel von HAURÉAU über BOËTIUS »maître ès arts» in Paris um 1277. Dieser BOËTIUS citirt (p. 279): »sicut diximus in *Mathematica* nostra». Ist etwa eine, dem alten BOËTIUS, beigelegte Schrift diesem jüngeren zu vindiciren? Oder ist dieses Citat ein entlehntes? Die neuesten Controversen über den alten BOËTIUS habe ich nicht verfolgen können. Eine Abhandlung: *De l'origine des traditions sur le christianisme de Boèce* enthalten die *Excursions historiques et philosophiques par* CH. JOURDAIN (Paris 1888).

Der jüngere BOËTIUS ist übrigens nicht eine Entdeckung HAURÉAU's. Schon AIMABLE JOURDAIN in den berühmten *Recherches critiques sur l'âge etc. des traductions d'Aristote* (1819 p. 66, ed. II, 1843 p. 57) holt den Frater BOËTIUS *ex provincia Daciae* hervor. Der hebräische Übersetzer der nikomachischen Ethik des ARISTOTELES nennt als lateinischen Übersetzer »BOËTIUS», welchen ich mit dem jüngeren identisch vermutete (*Catal. libr. hebr. in Bibl. Bodl.* p. 803, wo die Änderung bei JOURDAIN p. 60 in ed. II. p. 63 über ROBERT unbeachtet blieb). Ich bin in meinem, unter der Presse befindlichen Werke über die hebräischen Übersetzungen (S. 211) davon zurückgekommen und meine, dass der hebräische Übersetzer ein lateinisches ms. benutzt hat, welches den Namen des alten BOËTIUS führte, oder etwa andre Schriften des BOËTIUS enthielt.

8. Aegidius de Columna.

Der Philosoph dieses Namens (gestorben in Avignon 22. Dec. 1316, l. citando p. 441) ist Gegenstand eines Artikels, *Gilles de Rome*, von F. LAJARD in der *Histoire littéraire de la France* t. **30** p. 421 ff. Daselbst p. 550 n. 82 wird eine Schrift *de Cometis* oder *de significatione Cometarum* angegeben welche als ms. in Cambridge vorhanden sei, ohne nähere Nachweisung. Ich vermute den Ursprung dieses offenbaren Irrthums im Index des *Catalogus Mss. Angliae* etc. T. I P. III sub voce AEGIDIUS ROMANUS, der uncorrect ist, so z. B. gehört n. 1874 zu dem vorangehenden Arzte AEGIDIUS CORBOLIENSIS. Die

Nummern 1993 und 2282 geben nur den Namen AEGIDIUS an; in 2282 folgt *de Cometis* auf das *Quadripartitum* PTOLEMAEI *cum commentario* HALY [das ist ALI IBN RIDHWAN], welchem Buche in den Ausgaben die Vorrede des Übersetzers AEGIDIUS DE THEBALDIS vorangeht (s. meine Noten zu BALDI, *Vite di matematici arabi* p. 42; bei WÜSTENFELD, *Lateinische Übersetzungen* S. 91, ist diese Übersetzung nachzutragen). Ob die Abhandlung über die Cometen etwa der Schluss des *Centiloquium* sei, lasse ich dahingestellt. AEGIDIUS DE COLUMNA ist sicherlich nicht der Verfasser, so weit sich seine anderweitige Thätigkeit aus der erschöpfenden Artikel LAJARD's übersehen lässt.

9. Kardaga (Kramadja).

M. KLAMROTH — dessen frühzeitiger Tod vielfach zu bedauern ist — gab in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft Bd. **42** (1888) den IV. (letzten) Artikel: *Über die Auszüge aus griechischen Schriftstellern bei al-Jâqubi* (um 872): *Mathematiker und Astronomen* (S. 1—44). Daselbst S. 4 wird das unbekannte *Kurdadjat* (dort mit arabisch. Lettern gegeben), welches ein persisches Lehnwort sein müsste in *Daradjat* (Grade) emendirt. Allein das Wort im Singular *Kardadja*, ist das indische *Kramadja*, und als *Kardaga* durch GERARD VON CREMONA auch in das Lateinische eingedrungen, wie REINAUD schon 1847 nachgewiesen hat. Weiteres in Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft Bd. **24**, 1870, S. 372; Bd. **25**, 1871, S. 419: »Kardaga est portio circuli constans ex 15 gradibus«; *Études sur Zarkali* p. 79; cf. HERM. HANKEL, *Storia delle matematiche presso gli Arabi.* Bullettino di bibliogr. d. sc. matem. **5**, 1872; p. 8 des Sonderabdrucks; s. auch *Fihrist* II, 131; ALBERUNI's *India. English edition by* E. SACHAU (London 1888), I, 245, 275. II, 205.

10. Der Commentar des Johannes de Saxonia zur "Introductio Alcabitii".

Dieser Commentar ist gedruckt im *Libellus isagogicus Abdilazi* (sic) etc. *scriptumque in eundem a* JOANNE *Saxoniae editum* etc. (Venetiis 1521, 4°).

f. 29ᵇ: *Commentum* IO. DE SAXONIA *super textum* ALCABITII etc., beginnt: »Vir sapiens dominabitur astris: Dicit PTOLEMAEUS in sapientiis Almagesti: Et potest declarari sic etc.«. Diese Einleitung schliesst f. 34. Citirt werden darin: PTOLEMAEUS im *Centiloquium*, mit dem Commentar des HALY, und im *Quadri-*

partitum (f. 31b), f. 30 ALBUMAZAR, *Introductorio suo magno* (ist nicht die edirte gekürzte; cf. f. 35) über die 10 »Sectae« bis f. 33b. JOHANNES meint zuletzt, man könnte eine 11. Parthei hinzufügen, »et sunt illi, qui dicunt quod ista scientia (die Astrologie) sit contra fidem«; diese Leute haben die Bücher der alten Weisen nicht gelesen, welche die Weltschöpfung annehmen; mit Berufung auf HALY ALBENRAGEL (so) »in prima parte sui libri in cap. de natura Iovis« [ist C. 4, f. 10 ed. 1551]. Bis dahin citirt JOHANNES f. 30a: ARISTOTELES primo elenchorum (f. 32 in primo peri hermenias), ALANUS DE INSULA, »Commentator« [wahrscheinlich AVERROËS] secundo metaphysicae; f. 30b Philos. [ARISTOTELES] septimo politicae; f. 31: »quod advertens SOCRATES aurum projecit in mare sicut narrat VALERIUS«. — Die Eintheilung der Astronomie erledigt er kurz nach ALBUMAZAR's *Introductio magna* mit Benutzung von PTOLEMÄUS' *Quadripartitum* mit dem Commentar des HALY. Die »ars judiciorum astronologiae« theilt er in 4 partes principales: 1° »de interrogationibus«, 2° »de nativitatibus«, 3° »de revolutionibus annorum«, und zwar annorum mundi und annorum nativitatum, 4° »de electionibus«. »In istis quatuor partibus HALY ABENRAGEL fecit unum librum completum«; PTOLEMAEUS habe im *Quadripartitum* die *interrogationes* und *horarum electiones* weggelassen; aber HALY, im Commentar, entschuldige ihn. Ausser jenen 4 gebe es noch andere »partes judiciorum«, nämlich: *de conjunctionibus magnis, de imaginibus, de sigillis,* »de quibus parum vel nihil habemus«. Hat JOHANNES das Buch *de Mineralibus* von ALBERTUS MAGNUS, wie das demselben beigelegte *Speculum* und die daselbst schon angeführten Schriften über *imagines* und *sigilli* nicht aus eigener Ansicht gekannt? Warum übergeht er ALBUMASAR's *de magnis conjunctionibus* in 8 Tractaten, welche in der Übersetzung des JOHANNES HISPALENSIS erhalten ist? Man sieht auch hier, dass die »grossen Conjunctionen« einen bestimmten Terminus bilden, und dass WÜSTENFELD (*Übersetzungen arabischer Werke* S. 30) mit Unrecht das Wort »magnis« beanstandet und »*Liber* major« dafür setzen möchte, weil es ein »liber minor« giebt. — Wegen der Schwierigkeit des Gegenstandes empfiehlt JOHANNES das Studium der *libri introductionis* »in quibus posuerunt principia et exposuerunt terminos«. Unter den »magistri judiciorum« sei ALCHABITIUS »magis approbatus apud modernos. Ideo dimissis aliis de ipso ad praesens intendimus. His visis ad literam descendamus« (f. 34).

Aber damit ist nur die allgemeine Einleitung erledigt; es folgt nämlich: »Postulata Domino [Anfang des ALCHABITIUS].

In principio istius libri septem possunt quaeri» — das sind die Vorfragen (Kephalaia), welche die Scholiasten eines Buches zu behandeln pflegen, gewöhnlich sind es 8.

Aus dem Commentar selbst hebe ich Folgendes hervor: f. 40 »Dixit ABRAHAM AVENNEZRA (so!) quod si conjunctione ... Hoc inveni per experientiam: sed postea hoc inveni in libro ABR. AVENNEZRE (also wieder NN) et multum gavisus fui quia magis fui certus de veritate». Derselbe wird auch f. 41 (*aspectus* und *projectiones radiorum* bis 45 mit Beispielen) 48, 51, 52[b], 34[b], 92[b] angeführt. Da drängt sich die Betrachtung auf, dass von genialen Autoren oft die Träumereien mehr Geltung gewinnen als ihre verdienstlichen Arbeiten.

Fol. 45[b] »HALY in Commento 206. proposit. primae part. Quadrip. Illi de Aegypto fuerunt sapientes magi [l. magni?] qui fuerunt ab antiquo tempore etc. Et scimus hoc per *chronicam sapientum antiquorum* etc.»

F. 47 über Einteilung der Regionen; das Aequinoctium wird zu 66° 26′ 30″ angegeben.

F. 47[b] »Constat autem quod Almani [Alemanni] sunt homines iracundi et furiosi de natura Martis ... Brittania et terra de Salacia: Credo deberet dici de *Sclavia* et Germania». Diese Stelle wird noch anderweitig ihre Verwerthung finden. Ich möchte hier nur gelegentlich auf eine, vielleicht bisher wenig beachtete Parthie der astrologischen Werke hinweisen, auf die Beiträge zur astronomischen Geographie und zur Charakteristik der Nationen. Ich hebe als Beispiel hervor die Längen- und Breitentafel bei ABENRAGEL (VIII, C. 37) als deren Autor »*Harix*» genannt wird. Ich habe in der Zeitschrift der deutsch. morgenl. Gesellsch. (**24**, 1870, 333) die Vermuthung ausgesprochen, dass er mit JAKOB BEN TARIK identisch sei, was im Original zu untersuchen und mit den Angaben in ALBERUNI's *India* zu vergleichen wäre. Jedenfalls haben wir hier ein sehr altes Document.

Fol. 53. »Dicit (JOHANNES) HISPALENSIS in electionibus primae domus»; cf. f. 54[b], 55, 56, 89[b]; ohne Zweifel aus der *Epitome totius astrologiae*.

Uber JOHANNES DE SAXONIA haben in neurer Zeit der Verf. dieser Notiz, BONCOMPAGNI und GÜNTHER gehandelt; Einiges bieten die mss Amplon.; ein Artikel über ihn ist wohl noch in der *Histoire littéraire de la France* zu erwarten.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M. Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. ZWEITER BAND. VON 1200—1668. ERSTER THEIL. Leipzig, Teubner 1892. 8°, 499 p.

Le premier tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR, paru en 1880, contient l'histoire des mathématiques depuis les temps les plus reculés jusque vers l'an 1200. La première partie du second tome, qui vient d'être publiée, embrasse le temps 1200 —1550; elle est divisée en 26 chapitres traitant respectivement les matières suivantes:

LEONARDO PISANO et son *Liber Abaci*. — Les autres écrits de LEONARDO. — JORDANUS NEMORARIUS; son *Arithmetica* et l'*Algorithmus demonstratus*. — JORDANUS NEMORARIUS (continuation); *de numeris datis, de triangulis*. — JOHANNES DE SACROBOSCO, JOHANNES CAMPANUS et autres mathématiciens du 13[e] siècle. — Mathématiciens anglais 1300—1400. — Mathématiciens français 1300—1400. — Mathématiciens allemands 1300—1400. — Mathématiciens italiens 1300—1400. — Arithméticiens allemands 1400—1450. JOHANN VON GEMUNDEN. GEORG VON PEURBACH. — NICOLAUS CUSANUS. — Mathématiciens italiens 1400—1450. — Le calcul sur les lignes. Le »Bamberger Rechenbuch». — JOHANNES WIDMANN et les origines de l'algèbre allemande. — Les universités allemandes 1450—1500. REGIOMONTANUS. — L'edition des éléments d'EUCLIDES par RADOLT. ALBERTI. LEONARDO DA VINCI. Le traité d'arithmétique de Treviso. — LUCA PACIUOLO. — Autres mathématiciens italiens 1450—1500. Les mathématiciens français CHUQUET et LEFÈVRE. — Mathématiciens français, espagnols et portugais 1500—1550. — Mathématiciens aux universités allemandes 1500—1550. — Professeurs allemands d'arithmétique et d'algèbre en dehors des universités. — MICHAEL STIFEL. — Géomètres allemands et mathématiciens anglais 1500—1550. — Mathématiciens italiens 1500—1550. L'équation du 3[e] degré. — Les premiers écrits de CARDANO. — Les écrits de TARTAGLIA. Les écrits ultérieurs de CARDANO.

L'ouvrage de M. CANTOR contient une foule de renseignements, tirés des écrits mêmes des mathématiciens dont il s'agit ou des nombreux mémoires historiques publiés dans ces derniers temps. En particulier M. CANTOR a approfondi l'étude des écrits de LEONARDO PISANO, JORDANUS NEMORARIUS, NICOLAUS CUSANUS, REGIOMONTANUS, PACIUOLO, STIFEL, CARDANO et TAR-

TAGLIA; quant aux mathématiciens du 2[d] ou 3[e] ordre, il est naturel qu'il y aura ça et là dans l'exposition de M. CANTOR de petites lacunes à combler. Ainsi p. ex. PETRUS DE DACIA a écrit, outre le traité sur le calendrier indiqué à la page 114, un *Commentum super Algorismum prosaicum Johannis de Sacro Bosco* et composé une *Tabula ad inveniendum propositionem cuiusvis numeri* (cf. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **17** (1885), p. 5); la *Tabula* contient tous les produits depuis 1.1 jusqu'à 49.49 (cf. Biblioth. Mathem. 1890, p. 32) et l'indication de M. CANTOR à la page 191: »bei BELDOMANDI ist, so weit bekannt, erstmalig eine Ausdehnung zum grossen Einmaleins vorgenommen» doit par conséquent être modifiée en faveur de PETRUS DE DACIA. — Quant à GUGLIELMO DE LUNIS, M. CANTOR lui attribue (p. 90) une traduction en italien d'une algèbre arabe; il convient de faire observer que le manuscrit du traité de GUGLIELMO DE LUNIS gardé à la bibliothèque nationale de Florence est écrit *en latin* (cf. Biblioth. Mathem. 1891, p. 32).

Nous attendons avec impatience la fin du 2[d] tome des *Vorlesungen*, et nous espérons que M. CANTOR sera en état de continuer encore plus loin son excellente exposition de l'histoire des mathématiques.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1891: 3.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
36 (1891): 4—5.

Bobynin, V. V., Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa.
Biblioth. Mathem. 1891, 79—88. — [Compte rendu:] El progreso matem. **1**, 1891, 233—234. (Z. G. DE GALDEANO.)

Cajori, F., Historical sketch of the study of mathematics in the United States.
Biblioth. Mathem. 1891, 74—78.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Erster Theil. Leipzig, Teubner 1892.
8°, 499 p.

Eneström, G., Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonction quelconques de variables données.
Biblioth. Mathem. 1891, 89—90.

Galilei, G., Opere. Editione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume II. Firenze 1891.
4°, 611 + (1) p. — Edition publiée sous la direction de M. A. Favaro.

Kronecker, L., Über eine Stelle in Jacobi's Aufsatz »Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes«.
Journ. für Mathem. **107**, 1890, 349—352.

Kronecker, L., Über die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobischen Thetaformeln.
Journ. für Mathem. **108**, 1891, 325—334.

Loria, G., Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla storia critica dell' algebra.
Rivista di matem. **1**, 1891, 185—248.

Steinschneider, M., Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. (Schluss.)
Biblioth. Mathem. 1891, 65—73.

Question 35 [sur les différents signes de multiplication].
Biblioth. Mathem. 1891, 96. (G. Eneström.)

Fine, H. B., The number system of algebra, treated theoretically and historically. New York 1891. 8°.
New York, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1891, 26. (G. Eneström.) — Reproduction, en traduction anglaise, avec quelques additions, de l'analyse insérée dans la Biblioth. Mathem. 1891, 54.

Schultz, W., Die Harmonie in der Baukunst. Nachweisung der Proportionalität in den Bauwerken des griechischen Altertums. Erster Teil. Mathematische Grundlagen des angewendeten Proportionirungs-Systemes. Hannover-Linden, Manz 1891. 8°.
Biblioth. Mathem. 1891, 91—93. (S. Günther.) — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 172—175. (Cantor.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1891. 93—96. — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 158—160, 199—200.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

36. En 1610 Horky a publié un écrit intitulé: Martini Horky *a Lochovic Brevissima peregrinatio contra Nuncium Sidereum nuper ad omnes philosophos et mathematicos emissum a Galilaeo Galilaeo patritio florentino, academiae pataviensis mathematico publico* (Excusum Mutinae, 1610, apud Julianum Cassianum, impensis ipsius auctoris). Est-ce qu'il en existe aujourd'hui un exemplaire dans quelque bibliothèque publique ou privée?

(A. Favaro.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON / PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892.

NEUE FOLGE **6.** / NOUVELLE SÉRIE **6.**

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1892.

[redacted]

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892.

NEUE FOLGE 6. NOUVELLE SÉRIE 6.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. 1892.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

ERRATA.

Page	*ligne*	*au lieu de:*	*lisez:*
85	27	$-A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)}$	$-A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)} + A_{\omega-1}$.
87	31	méthode une	méthode est une
89	26	$n + \omega$	n
90	23	Moser	Maser.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 6. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques.

Par V. V. Bobynin à Moskwa.

Analogue à celui de toutes les sciences, le progrès des mathématiques se fait par les nations qui tiennent le premier rang dans le domaine intellectuel de l'humanité. Or il en est de ces dernières, comme il en est de tous les individus qui les composent. Arrivée au point culminant de sa grandeur, une nation de premier rang subit généralement un état de décrépitude ou de vieillesse, et passe par une décadence complète avant de disparaître tout à fait. Nous trouvons donc le progrès des mathématiques non incessant dans le cours de l'Histoire universelle, mais interrompu à des intervalles plus ou moins longs, pendant lesquels s'effectue pour ainsi dire la transition du savoir. Le rôle historique d'une grande nation une fois accompli, des nationalités plus jeunes s'en approprient le domaine scientifique pour en devenir les successeurs.

L'état actuel de l'Histoire des mathématiques nous permet d'observer le cercle complet de l'activité mathématique chez un seul peuple, chez les Grecs. Le progrès futur y fera joindre peut-être les Egyptiens, les Chaldéens et les Indous. En attendant, voila l'oeuvre des Grecs dans le domaine mathématique. L'époque suivant après le bannissement des Hyksos de l'Egypte et durant jusqu'à Platon et son Académie, cette époque est consacrée tout entière à l'appropriation des connaissances que

l'humanité possédait déjà. Le progrès humain n'a jamais été sujet à de brusques changements dans ses degrés successifs, bien au contraire, la transition s'en est toujours opérée petit à petit, d'une manière à peine remarquable. La science mathématique des Grecs nous donne des preuves d'une création originale, bien avant même que l'époque de l'appropriation ait touché à sa fin, nommément au temps de Pythagoras et de son école. Ces manifestations deviennent de plus en plus fréquentes vers le 5[e] siècle, qui nous montre le génie mathématique des Grecs parfaitement déterminé dans ses tendances et dans son caractère. Il penche ostensiblement pour les investigations géométriques.

Platon et son Académie ouvrent une ère nouvelle et complétement indépendante de la science grecque. Le progrès entier des mathématiques, ou tout au moins celui de la géométrie, s'y trouve concentré. Ce progrès touche à son point culminant dans l'oeuvre d'Archimedes et des grands mathématiciens d'Alexandrie, tels que Euklides, Eratosthenes et Apollonios de Perge.

Ensuite c'est la décadence qui commence. Les travaux des mathématiciens grecs encourent le reproche d'être superficiels. Il n'est plus question de créer des voies nouvelles ou de résoudre les difficultés, présentées par l'époque, mais de combler les lacunes, laissées par le progrès rapide de la science si insignifiantes qu'elles fussent. A ce premier degré de sa décadence le génie mathématique des Grecs a pourtant assez de forces pour tenir tête aux influences étrangères qui viennent l'assaillir. Un siècle avant J. C. il n'en est plus ainsi, et l'activité originale de la science grecque peut être regardée comme terminée.

Une nouvelle phase de décadence se manifeste par le progrès rapide de la direction appliquée, si étrangère au génie grec, et qui apparaît tout d'abord dans les recherches sur la Géodésie par Heron d'Alexandrie. Les travaux des mathématiciens qui suivent, témoignent de la direction arithmético-algébrique encore plus étrangère à l'esprit grec. Elle vient des écoles néopythagoricienne et néoplatonienne, elle est surtout développée par Diofantos d'Alexandrie dont les oeuvres sont comme une dernière flamme du génie défaillant des Grecs. Elles en rappellent une fois encore le passé glorieux pour conduire à l'époque des commentateurs et des savants bysantins.

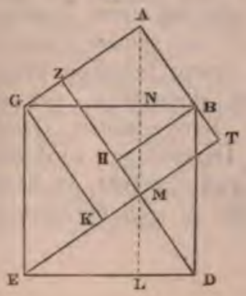
Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe.

Von H. Suter in Zürich.

Jene Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, welche die Gleichheit der Quadrate über den Katheten und der Rechtecke, in welche das Hypotenusenquadrat durch die Fortsetzung der Höhe getheilt wird, durch das Mittelglied von Rhomboiden statt von Dreiecken (wie beim Euklidischen Beweis) darlegen, sind in den Werken von I. I. Hoffmann (*Der pythagoreische Lehrsatz*, Mainz 1819) und Jury Wipper (*Sechs und vierzig Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, aus dem Russischen übersetzt von* F. Graap, Leipzig 1880) theils jüngern Autoren zugeschrieben, theils ohne Angabe des Ursprungs. Wir haben dieselben aber höchst wahrscheinlich, wenn sie nicht noch älter sind, dem in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts lebenden bekannten persischen Mathematiker und Astronomen Nassir ed-Din aus Thus zu verdanken, denn sie befinden sich in einem Scholion zum pythagoreischen Lehrsatz in seiner arabischen Ausgabe der Euklidischen Elemente (gedruckt zu Rom 1594). Der Hauptbeweis ist der bekannte Euklidische; dann beginnt das Scholion mit den Worten: »Dieser Satz hat verschiedene Fälle, denn das Hypotenusenquadrat kann entweder unterhalb des rechtwinkligen Dreiecks fallen oder dieses bedecken (d. h. oberhalb fallen), und in diesen beiden Annahmen können wiederum die beiden Kathetenquadrate ausserhalb des Dreieckes liegen, oder beide dasselbe bedecken, oder das kleinere kann es bedecken, das grössere nicht, oder umgekehrt, und das sind im Ganzen 8 Fälle». Er bespricht und beweist sodann die einzelnen Fälle (aber nicht alle ausführlich); ich gebe im Folgenden die Figuren zu zwei Fällen wieder.

1. Die beiden Kathetenquadrate bedecken das Dreieck, das Hypotenusenquadrat nicht (Fig. 1). Diese Figur ist im ara-

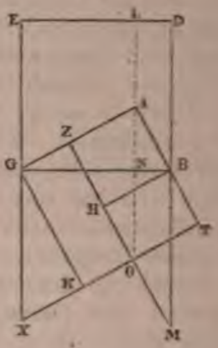
Fig. 1.



bischen Druck unvollständig, es fehlen die Linien HD und KE; dass sie aber NASSIR ED-DIN in seinem Manuskript ursprünglich gezeichnet hatte, ergibt sich aus dem Text des Beweises, den ich hier seiner Weitschweifigkeit wegen nicht ausführlich gebe. Nachdem er die Geraden HD und KE gezogen hat, zeigt er die Kongruenz der Dreiecke GKE, BHD und ABG, schliesst hieraus, dass ZD und TE gerade Linien seien und sich in Punkte M der Linie AL schneiden; hieraus folgt dann sofort, dass Quadrat $ABHZ$ = Rhomboid $ABMD$ = Rechteck $BNLD$ ist, u. s. w. — (Es ist noch zu bemerken, dass NASSIR ED-DIN hier, wie bei allen andern Fällen, drei Unterfälle, jeden mit besonderer Figur, unterscheidet, nämlich $AB \gtreqless AG$.)

2. Alle drei Quadrate bedecken das Dreieck (Fig. 2).

Fig. 2.

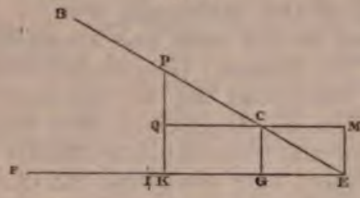


Nachdem DB und ZH bis zum Durchschnitt in M verlängert worden sind und ebenso LN bis O, zeigt er die Kongruenz der Dreiecke ABG und BHM, woraus die Gleichheit von BG oder BD und BM folgt; hieraus ergibt sich dann, dass Quadrat $ABHZ$ = Rhomboid $ABMO$ = Rechteck $LDBN$ ist, u. s. w.

Die NASSIR ED-DIN'sche Bearbeitung der Elemente enthält ausserdem noch hie und da einen Zusatz, der von Interesse ist; ich erinnere nur noch an seinen Versuch, das 13. Axiom zu beweisen, den er in einem Scholion zum 28. Satze des ersten Buches darlegt. Von demselben, der sehr weitschweifig ist, gibt KÄSTNER in 1. Bande seiner *Geschichte der Mathematik*, pag. 375—381 eine Darstellung, wird aber in der Kritik desselben NASSIR nicht ganz gerecht, ja bezichtigt ihn sogar einer Erschleichung oder wie er sich nachher milder ausdrückt, einer

Selbstbetruges. Dieser Vorwurf ist ungerechtfertigt. Der Beweis besteht nämlich aus 3 Hülfssätzen und dem Hauptsatze, der wieder in 3 Theile zerfällt, und jeder Satz folgt logisch aus dem vorhergehenden. Nun greift KÄSTNER den Beweis des ersten Theils des Hauptsatzes an, welcher zeigt, dass, wenn (Fig. 3)

Fig. 3.



$PC = CE$ und PK senkrecht auf EF ist, $KG = GE$ sein muss. Er behauptet (pag. 380), dieser Beweis sei nicht erbracht; ich behaupte das Gegentheil; man lese übrigens seine (mit Ausnahme einiger falscher Buchstaben) im Allgemeinen richtige Darstellung des Beweisganges und man wird mir Recht geben, man wird höchstens aussetzen, NASSIR hätte noch den Schlusssatz hinzufügen sollen: also kommt es auf dasselbe hinaus, ob man $PC = CE$ macht und PK senkrecht auf EF fällt, oder ob man $PC = CE$ und $KG = GE$ macht und P mit K verbindet; oder er hätte sagen können, das Perpendikel von P aus treffe in den Punkt I, und dann die Identität von I und K nachweisen können. Diese Lücken des Beweises rechtfertigen aber gewiss nicht die Behauptung KÄSTNER's: »Daran hat NASSIR nicht gedacht, so fängt sich sein Beweis mit einer Erschleichung an«. Die Kritik KÄSTNER's ist nur richtig, soweit sie sich auf den ersten Hülfssatz bezieht; da ist eben NASSIR passiert, was bis jetzt Allen, die dieses Axiom beweisen wollten, dass sie nämlich ein neues Axiom aufgestellt haben, das nur etwas anschaulicher und selbstverständlicher war, als das zu beweisende, aber eben doch wieder ein Axiom war, denn der erste Hülfssatz, für den ich den Leser auf KÄSTNER pag. 375 verweise, ist von NASSIR nicht bewiesen worden; er fügt auch am Ende hinzu: »Diese Schlüsse (Urtheile) sind principielle, sie sind auch als solche von ältern und neuern Geometern angewendet worden«. Es mag hier noch erwähnt werden, dass der von CLAVIUS in seiner Euklidausgabe (Köln 1591) pag. 50—54 versuchte Beweis des 13. Axioms höchst wahrscheinlich dem NASSIR ED-DIN'schen nachgebildet ist, (denn er weicht nur wenig von

diesem ab) obgleich er bemerkt (pag. 50): »Id quod in EUCLIDE quodam arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixe illud iterum atque iterum ab eo, qui eum EUCLIDEM arabicum possidet, flagitavi. Quare hanc quae sequitur excogitavimus». Ebenso dürfte ein von CLAVIUS in einem Scholion zum pythagoreischen Lehrsatz (pag. 84) gegebener zweiter Beweis dieses Satzes nicht ganz von NASSIR ED-DIN unabhängig sein.

Zum Schlusse sei mir noch eine Ehrenrettung NASSIR ED-DIN's gestattet. Hr. HEIBERG (*Literargeschichtliche Studien über Euklid*, pag. 6) beschuldigt ihn, wie überhaupt die arabischen Autoren (und diess im Allgemeinen nicht ohne Grund), »der Sucht, die grossen und hochgeschätzten Meister der griechischen Literatur mit Arabern oder wenigstens mit dem Orient in Verbindung zu bringen», und führt als schlagenden Beleg hiefür an, dass »NASSIR ED-DIN, der selbst aus Thus gebürtig war, auch den EUKLID *Thusinus* nennt» (er folgt hier der Ausgabe der Euklidischen Elemente durch AUGUST, I, pag. 295). Nun steht aber in meinem Exemplar von NASSIR ED-DIN's EUKLID sowohl als in demjenigen der Stadtbibliothek Zürich (und wahrscheinlich in allen) *as-Suri* d. h. der Tyrier, oder von Tyrus gebürtig, wie auch andere Quellen haben; aus Thus gebürtig heisst *at-Thusi*. Also aus Tyrus soll EUKLID nach NASSIR und anderen Autoren stammen — sollte dieses unmöglich sein? Sind nicht auch APOLLONIOS von Pergae, NIKOMACHOS von Gerasa, THEON von Smyrna etc. aus Asien?

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

11. Simplicius, der Mathematiker.

Unter dem Namen des SIMPLICIUS ist ein Erklärer des ARISTOTELES bekannt. Das Buch *Fihrist* von NADIM erwähnt diesen als Commentator der Bücher der Categorien und von der Seele (S. 255). Aber auch unter den Mathematikern (S. 268) erscheint »SIMPLICIUS der Grieche« (*Rumi*)[1] mit Angabe von 2 Schriften: 1° Commentar über den Anfang (*Sadr*)[2] des Buches EUKLID »welches ist die Einleitung in die Geometrie«; 2° Commentar über den IV. Tractat(!) der Categorien.

Noch wunderlicher ist es, dass diese beiden Titel bei WENRICH (*De auctorum graecorum versionibus*, p. 200) unter dem Artikel AUTOLYCUS erscheinen. Hat vielleicht in seinem Exemplar des *Fihrist* die Überschrift SIMPLICIUS gefehlt, so dass er diese Schriften dem vorangehenden AUTOLYCUS beigelegt glaubte? Allein er lässt den zweiten Titel in seinem Artikel über SIMPLICIUS p. 297 weg, obschon er sich auch bei HAGI KHALFA VI, 97 findet, weil KIFTI dafür das arabische Wort *wa-geirahu* d. h. »und Anderes« (Buch, oder Bücher) gesetzt hat.[3] Für KIFTI ist aber SIMPLICIUS gar nicht der Philosoph, sondern nur ein griechischer Geometer, von welchem er in allgemeinen Phrasen spricht.[4]

LECLERC (*Histoire de la médecine arabe* I, 219) bemerkt, dass der Commentar der Elemente des EUKLID (die Einschränkung auf die Einleitung lässt er weg) citirt sei in dem Pariser Ms. supplément arabe 955. Diese Anführung könnte allerdings aus dem *Fihrist* oder aus KIFTI geflossen sein. Ich hatte in dem Artikel des *Fihrist* eine Confusion vermutet, und geglaubt, der Commentar zu EUKLID setze SIMPLICIUS an die Stelle von HYPSIKLES, der die Tractate »IV oder V« verbessert oder redigirt haben soll, allerdings nach einer falschen Lesart des *Fihrist*.[5] Diese Zahl 4 wäre dann irrtümlich in den zweiten Titel geraten, wo sie jedenfalls unrichtig ist, da die Categorien nur aus 3 Tractaten bestehen. Ich fand aber weitere Spuren eines Mathematikers SIMPLICIUS, der zu EUKLID citirt wird. Ms. Digby 168[28] (Catalog v. MACRAY p. 175) enthält ein Stück: *De expositione lib. Euclidis de geometria secundum Auarizum* (sic), beginnend: »*Sanbelichus etc.*«; letzterer Namen ist ohne Zweifel eine

aus dem Arabischen stammende Umschreibung von Simplicii. In dem Namen *Anaritius* steckt höchst wahrscheinlich Anaritius, d. i. der bekannte Commentator Neirizi; in der Liste der Übersetzungen Gerard's von Cremona, N. 15, heisst es »*Liber Anaritii super Euclidem tr. I*».[4] Eine Handschrift dieser Übersetzung ist allerdings bis jetzt noch nicht nachgewiesen. Sollte Ms. Digby ein Fragment derselben enthalten? Eine weitere Spur des Simplicius habe ich in einer hebräischen Quelle entdeckt. In einem hebräischen ms. der Bodleiana (hebr. 4), woraus mir Dr Neubauer vor zwei Jahren eine Stelle mitteilte, wird בקלינם als Corrector des Buches von אבלניס (ohne Zweifel Apollonius) genannt. Ich sehe auch hier eine Verstümmelung des Wortes Simplicius, da im Arabischen die Buchstaben jenes Namens denen des Simplicius (arab. *Sinblikus*) sehr ähnlich sind.

[1] Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 462.

[2] Dieses Wort fehlt in einigen Mss. des biographischen Wörterbuches von Kifti.

[3] In den Varianten p. 24 scheint die Angabe ungenau, das Wort »und» ist zu streichen.

[4] Der unedirte Artikel des Kifti wird nun hoffentlich bald in der Ausgabe des Werkes durch Aug. Müller zu finden sein; ich kenne ihn nur aus der Berliner Handschrift.

[5] Siehe meine Abhandlung *Euklid bei den Arabern*, S. 83.

[6] S. über ihn *Euklid bei den Arabern*, S. 86; »Anarizeo» bei Rico y Sinobas, *Libros del Saber de astronomia*, II, p. VII. [Vgl. P. Tannery, *La géométrie grecque*, I, p. 167, wo p. 175 auch der Mathematiker Simplicius erwähnt ist. (G. E.)]

Notice historique sur la théorie des ensembles.

Par G. VIVANTI à Mantova.

1. La théorie des ensembles trouve sa raison d'être dans le besoin, depuis longtemps éprouvé dans les mathématiques, d'introduire le concept de mesure dans le champ des grandeurs infinies. La possibilité de mesurer et de comparer entre elles les grandeurs infiniment grandes a été l'objet de nombreuses et intéressantes discussions, auxquelles prirent part les philosophes et les mathématiciens les plus distingués; et sans entrer dans la riche littérature de cette matière, nous citerons seulement l'ouvrage de GUIDO GRANDI: *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus* (Pise 1710), où l'on trouve un résumé des opinions des contemporains sur la question dont il s'agit, — et les *Élémens de la géométrie de l'infini* de FONTENELLE (Paris 1727). Mais la théorie des ensembles a mis en lumière ce fait curieux et inattendu, que l'application des procédés ordinaires de mesure et de comparaison aux grandeurs infinies conduit, en général, à des résultats contradictoires, ou tout au moins insignifiants. Ainsi, par exemple, si AB est un segment rectiligne, pris sur une droite indéfinie, on ne peut pas dire que le segment infini qui se trouve à droite du point A soit plus grand que celui qui se trouve à droite du point B, car non seulement on peut faire coincider les deux segments dans toute leur étendue, mais on peut même les disposer de telle façon que le deuxième contienne dans son intérieur le premier. Pareillement on ne peut pas dire que la série infinie $1, 2, 3, \ldots$ contienne plus d'éléments que la série $2, 4, 6, \ldots$, quoique les termes de cette dernière série ne constituent qu'une partie de la première, car on peut faire correspondre les deux séries terme à terme, de façon qu'on pourrait dire qu'elles ont même nombre d'éléments, et l'on peut tout aussi bien faire correspondre aux termes $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de la première série les termes $4, 6, 8, \ldots, 2n+2, \ldots$ de la deuxième, de façon qu'il y ait dans cette dernière série un terme correspondant à chaque terme de la première et en outre un terme auquel il ne correspond pas de terme dans celle-ci *.

* Il est juste de rappeler que ce fait avait été déjà remarqué par B. BOLZANO (voir: *Paradoxien des Unendlichen*, § 20). Ce savant est peut être le seul, qui ait entrevu quelques-unes des vérités qui ont été ensuite découvertes et établies rigoureusement par M. G. CANTOR.

2. La première occasion à l'étude des ensembles de points s'est présentée à M. GEORGES CANTOR lors de ses recherches sur les séries trigonométriques (n° 1)*. En s'efforçant d'étendre la validité d'un théorème relatif à ces séries, il éprouva la nécessité de considérer des groupes infinis de points disposés sur une ligne droite. Ce sont ces groupes qu'il nomma *ensembles linéaires de points* (*lineare Punktmannigfaltigkeiten*). Étant donné un ensemble P de cette nature, il y a dans la droite qui le contient des points, appartenant ou non à P, caractérisés par cette propriété, qu'il n'y a pas d'intervalle, si petit qu'il soit, contenant un de ces points, qui ne contienne une infinité de points de P. On dit que ces points sont des *points limites* (*Grenzpunkte*) de l'ensemble P, et l'on désigne leur ensemble par P' (*premier dérivé* [*Ableitung*] de P). Si l'ensemble P' n'est pas composé d'un nombre fini de points, il aura à son tour un premier dérivé, qu'on pourra désigner par P'' (*second dérivé* de P), et ainsi de suite. Tous les points d'un ensemble dérivé d'ordre quelconque sont contenus aussi dans tous les dérivés d'ordre inférieur. Il peut arriver qu'après un nombre fini n de dérivations on parvienne à un ensemble $P^{(n)}$ composé d'un nombre fini de points, et qui par suite n'a point d'ensemble dérivé; on dit alors que P est un ensemble du premier *genre* (*Gattung*) et de la $n^{\text{ième}}$ *espèce* (*Art*).

3. Après avoir ainsi posé les premiers fondements de la théorie des ensembles, M. CANTOR eut bientôt une nouvelle occasion d'en approfondir l'étude (n° 2). En appelant *nombre algébrique réel* toute racine réelle d'une équation algébrique à coefficients rationnels, il trouva que l'ensemble de tous les nombres algébriques réels peut être disposé en une série simple de la forme $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ En même temps il démontra que, si un ensemble de nombres réels jouit de cette propriété, l'on peut dans tout intervalle donné d'avance trouver une infinité de nombres n'appartenant pas à cet ensemble. L'application de ce théorème aux nombres algébriques réels montre que l'ensemble de ces nombres ne constitue, pour ainsi dire, qu'une partie négligeable de l'ensemble de tous les nombres réels; ce qui doit sembler bien étrange, attendu que l'ensemble des nombres algébriques réels est *condensé* (*überalldicht*) dans tout intervalle, c. a. d. qu'il n'y a pas d'intervalle, si petit qu'il soit, qui ne contienne quelque élément de cet ensemble.

* Les numéros entre les parenthèses se rapportent à la liste bibliographique qui se trouve à la fin de cette note.

Il nait d'ici la question d'établir en quoi consiste vraiment la différence de nature entre un ensemble P pouvant être disposé en série simple et un ensemble tel que celui R de tous les nombres réels. On peut caractériser cette différence en disant qu'on peut faire correspondre tout ensemble tel que P, élément à élément, à la série des nombres entiers positifs $1, 2, 3, \ldots$, tandis que cela n'est pas possible pour un ensemble tel que R.

Si l'on peut établir entre les éléments de deux ensembles une correspondance réciproque et complète, on dit qu'ils ont même *puissance* (*Mächtigkeit*), ou qu'ils appartiennent à la même *classe* (*Klasse*).

C'est ici qu'apparaissent certaines propriétés imprévues et paradoxales des ensembles infinis, qui montrent clairement que le fini et l'infini sont deux choses *spécifiquement* diverses. Le concept de *puissance* coïncide, pour un ensemble fini, avec celui de *nombre d'éléments;* deux ensembles finis ont même puissance toujours et seulement lorsqu'ils contiennent un nombre égal d'éléments. Pour un ensemble infini au contraire, le concept de nombre d'éléments n'a plus un sens bien défini, et il peut arriver qu'un ensemble ait même puissance avec une partie de soi-même; ainsi p. ex. l'ensemble de tous les nombres entiers positifs et celui des nombres pairs, l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $0-1$ et celui de tous les nombres irrationnels de ce même intervalle, ont respectivement même puissance. Mais il y a plus. On peut établir une correspondance univoque et complète entre tous les points d'un segment rectiligne fini et tous les points d'un espace fini à un nombre quelconque de dimensions (n° 3). Il faut toutefois remarquer que cette correspondance est nécessairement discontinue (n^os^ 5, 6, 7, 9).

4. Le théorème dernièrement rappelé réduit, pour ce qui se rapporte à la notion de puissance, l'étude des ensembles de points contenus dans un espace à un nombre quelconque de dimensions à celle des ensembles linéaires. Il se pose maintenant le problème fondamental: quel est le nombre des classes des ensembles linéaires de points? M. CANTOR (n^os^ 3, 18, 23) affirme que ces ensembles se divisent en deux classes seulement, dont la première comprend tous les ensembles dont les éléments peuvent être disposés en série simple (p. ex. l'ensemble $1, 2, 3, \ldots$), la deuxième tous les ensembles ayant même puissance avec l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $0-1$. Il n'y a pas de difficulté à établir que ces

deux classes sont effectivement différentes (voir n° 8); quant à la question s'il n'y en a pas d'autres, beaucoup de points de la théorie des ensembles font pressentir qu'il doit en être vraiment ainsi, mais on n'en a pas encore une démonstration rigoureuse, malgré la tentative faite en ce sens par M. P. TANNERY (n° 32).

5. Les résultats obtenus dans la nouvelle théorie encouragèrent M. CANTOR à en essayer une exposition systématique, ce qu'il fit dans une suite de 6 articles sous le titre commun: *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten* (nos 8, 10, 11, 12, 18, 23). Après avoir rappelé les dénominations introduites dans ses travaux précédents, il considère un ensemble quelconque P appartenant au deuxième genre; c. à d. dont aucun dérivé ne contient un nombre fini de points. Alors, puisque chaque dérivé successif est compris dans tous les précédents, il y aura des points appartenant en même temps à tous les dérivés de P. En appelant $P^{(\omega)}$ l'ensemble de ces points, et en désignant en général par $\mathfrak{D}(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble des éléments communs aux ensembles $P, Q, R, \ldots$, on aura (n° 10):

$$P^{(\omega)} = \mathfrak{D}(P', P'', P''', \ldots).$$

Soient en outre $P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots, P^{(\omega+n)}, \ldots$ les dérivés successifs de $P^{(\omega)}$, et posons

$$P^{(\omega.2)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, P^{(\omega+3)}, \ldots),$$

et de même:

$$P^{(\omega^2)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega.2)}, P^{(\omega.3)}, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(\omega^\omega)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega^2)}, P^{(\omega^3)}, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous aurons défini par là une suite d'ensembles, qui s'étend à l'infini, mais dont chaque terme est parfaitement déterminé par les précédents; et il n'y a pas de difficulté à désigner ces ensembles comme les dérivés de P des ordres $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots, \omega.2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$ Il y a effectivement des ensembles dont on peut pousser la dérivation aussi loin que l'on veut sans parvenir jamais à un ensemble fini; tel est p. ex. l'ensemble de tous les points de l'intervalle $0-1$, dont tous les dérivés sont identiques à l'ensemble primitif. Quant au symbole ω, qui s'est glissé ici, pour ainsi dire, par hasard, il acquerra dans la suite une bien autre importance. Mais n'anticipons pas.

6. Les ensembles de la première classe, qu'on appelle aussi *dénombrables* (*abzählbar*) parce qu'on peut faire correspondre leurs éléments d'une façon univoque et complète aux termes de la suite naturelle des nombres, se présentent dans beaucoup de recherches et ont une grande importance. Les deux théorèmes géométriques suivants, qui s'y rapportent, sont particulièrement remarquables (n° 11):

S'il y a, dans un espace continu à n dimensions, un ensemble d'espaces partiels continus à n dimensions, séparés l'un de l'autre et ne se touchant tout au plus qu'à leurs limites, cet ensemble est dénombrable.

S'il y a, dans un espace à n dimensions, n étant $\geqq 2$, un ensemble dénombrable P de points, on peut joindre entre eux deux points quelconque de cet espace par une ligne continue ne passant par aucun point de P. En d'autres termes, on peut enlever tous les points de l'ensemble P, sans que le passage continu d'un point à un autre quelconque de l'espace considéré cesse d'être possible.

Nous citerons aussi le théorème suivant, qui a reçu de nombreuses applications dans l'analyse (n° 12):

Si le premier dérivé P' d'un ensemble linéaire de points P est dénombrable, on peut renfermer les points de P dans un ensemble fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant plus petite qu'une grandeur donnée d'avance.

7. Pour poursuivre l'étude des ensembles de points, il faut maintenant introduire un concept nouveau, celui des *nombres transfinis* (*überendliche* ou *transfinite Zahlen*) (n^os^ 18, 49). Soit donné un ensemble *bien ordonné* (*wohlgeordnet*) d'éléments, c. à. d. un ensemble disposé de telle façon, qu'il existe un premier élément et que pour chaque élément ou groupe, fini ou infini, d'éléments on puisse assigner un élément immédiatement successif. En faisant abstraction de la nature particulière des éléments qui composent cet ensemble, on obtient le concept de *nombre ordinal* (*Ordnungszahl*); en d'autres mots, on dit que deux ensembles bien ordonnés ont *un même nombre ordinal*, si l'on peut en faire correspondre les éléments d'une façon univoque et complète, en sorte que les éléments correspondants se trouvent disposés dans le même ordre dans les deux ensembles.

Considérons d'abord un ensemble bien ordonné P contenant un nombre fini d'éléments; si l'on fait correspondre ses éléments aux termes de la série $1, 2, 3, \ldots$, le terme n de cette série correspondant au dernier élément de P sera le *nombre*

ordinal de P; en outre tous les ensembles bien ordonnés qu'on pourra obtenir en déplaçant d'une façon quelconque les éléments de P auront ce même nombre ordinal n. Au contraire, si l'ensemble bien ordonné P contient une infinité d'éléments, aucun des nombres de la série $1, 2, 3, \ldots$ ne peut être le nombre ordinal de P, et il faut par suite tenter d'étendre plus loin cette série. Pour cela, introduisons d'abord un symbole ω représentant le nombre ordinal de la série $1, 2, 3, \ldots$, prise dans toute son extension et considérée comme un ensemble infini bien ordonné, et par conséquent aussi le nombre ordinal de toute série de la forme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ On peut regarder ω comme le plus petit de tous les nombres ordinaux appartenant à des ensembles infinis bien ordonnés, c. a. d. comme le plus petit des *nombres transfinis*. Si nous considérons maintenant l'ensemble bien ordonné P qu'on obtient en faisant suivre à la série $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, prise dans toute son extension, un autre element β_1, le nombre ordinal de cet ensemble ne sera plus ω, car en faisant correspondre les éléments par ordre à ceux de la série $1, 2, 3, \ldots$, celle-ci sera complétement épuisée lorsqu'il restera encore dans l'ensemble P l'élément β_1; il sera donc bien naturel de désigner le nombre ordinal de P par $\omega + 1$. On peut définir analoguement les symboles $\omega + 2$, $\omega + n$, $\omega . 2$, $\omega . 3$ comme les nombres ordinaux des ensembles bien ordonnés:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots;$$

et de même le symbole ω^2 comme le nombre ordinal de l'ensemble bien ordonné constitué par une serie simple d'ensembles $S_1, S_2, \ldots$, dont chacun a la forme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ On voit aisément qu'en poursuivant ainsi l'on peut définir des nombres transfinis toujours nouveaux, et que la formation de ces nombres n'a pas de limite. En effet, après avoir formé tous les nombres transfinis possibles dont le symbole se compose au moyen de ω et des nombres finis, nous n'aurons qu'à introduire un nombre *entièrement nouveau* Ω, et à le combiner ensuite avec les précédents; et ainsi de suite.

Il y a encore une remarque à faire au sujet des ensembles infinis. Les ensembles bien ordonnés qu'on obtient en déplaçant d'une façon quelconque les éléments d'un ensemble infi-

ont en général des nombres ordinaux différents; ainsi par exemple de l'ensemble $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dont le nombre ordinal est ω, on obtient les ensembles:

$$a_2, a_3, \ldots, a_1;$$

$$a_3, a_4, \ldots, a_1, a_2;$$

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n;$$

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_2, a_4, a_6, \ldots,$$

dont les nombres ordinaux sont respectivement $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + n$, $\omega . 2$.

8. En examinant de près la façon dont ont été engendrés les nombres transfinis, on voit qu'il y a deux *principes de formation* (*Erzeugungsprincipe*), à savoir, l'addition d'une unité à un nombre connu, et la création d'un nombre qui doit faire suite à tous les nombres déjà définis. On dit qu'un nombre est de la premiére ou de la deuxième *espèce* (*Art*), suivant qu'il est engendré par le premier ou par le deuxième principe. Mais il faut introduire un troisième principe, qu'on peut nommer *principe d'arrêt* ou *de limitation* (*Hemmungsprincip, Beschränkungsprincip*).

Nous avons déjà rappelé, que deux ensembles infinis, dont l'un contient l'autre, peuvent toutefois avoir même puissance. Si cela n'arrive pas, on dit que le premier ensemble a une puissance plus grande que le deuxième. La plus petite puissance des ensembles infinis est évidemment celle des ensembles dénombrables, et par suite aussi de la série $1, 2, 3, \ldots$ Si l'on ajoute à cette série successivement les termes $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots, \omega . 2, \omega . 3, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$, on peut démontrer qu'elle ne cesse pas d'avoir la première puissance. Nous dirons que tous les nombres finis constituent la classe I de nombres, et que tous les nombres transfinis, qui, ajoutés à la série $1, 2, 3, \ldots$, n'en changent pas la puissance, constituent la classe II; ou, ce qui est la même chose, les nombres de la classe II sont ceux qui appartiennent comme nombres ordinaux à tous les ensembles possibles ayant la première puissance. Mais la formation des nombres transfinis ne peut pas s'arrêter ici, car nous connaissons des ensembles de puissance supérieure à la première; il nous faut donc étendre encore plus loin la série des nombres, de façon à y trouver des nombres ordinaux pour les ensembles de cette nature. Pour cela nous introduisons (ainsi que nous l'avons déjà dit) un nombre *entièrement nouveau* Ω, en le définissant par cette propriété, que la

série des nombres depuis 1 à un quelconque des nombres inférieurs à Ω constitue un ensemble fini ou de la première puissance, et que la série de tous les nombres inférieurs à Ω constitue un ensemble de la deuxième puissance. Cela est tout à fait analogue à ce qu'on a fait lors de l'introduction de ω, qui jouit de cette propriété, que la série de tous les nombres depuis 1 à un quelconque des nombres inférieurs à ω est finie, et que la série de tous les nombres inférieurs à ω a la première puissance. Le principe de limitation consiste donc en ceci, que l'introduction d'un nombre *entièrement nouveau* (tel que ω ou Ω) doit avoir lieu toujours et seulement lorsque l'ensemble de tous les nombres déjà formés a une puissance supérieure à celle de l'ensemble de tous les nombres inférieurs à un quelconque de ces nombres. Au moyen de ce principe la série indéfiniment étendue des nombres se divise en classes, dont chacune a cette propriété, que les nombres dont elle se compose sont les nombres ordinaux de tous les possibles ensembles bien ordonnés ayant une même puissance, et de ceux-ci seulement. On peut encore ajouter, que les éléments de l'un quelconque de ces ensembles (abstraction faite des ensembles finis) peuvent être disposés en série bien ordonnée de façon à avoir pour nombre ordinal un quelconque des nombres de la classe correspondante.

Les nombres transfinis coincident avec les symboles de dérivation dont nous avons déjà parlé, en ce sens, que les dérivés d'un ensemble P forment un ensemble bien ordonné de telle nature, que la série de ces dérivés depuis 1 jusqu'à $P^{(\alpha)}$ a le nombre ordinal α.

9. Les nombres transfinis offrent le moyen d'étudier les ensembles de points ayant une puissance quelconque. Nous en trouvons tout de suite une application dans le théorème suivant, qui a été démontré par MM. CANTOR (nos 18, 19, 23) et BENDIXSON (n° 20):

Si le premier dérivé P' d'un ensemble P est dénombrable, il y a un nombre α de la classe I ou II, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est nul; si P' n'est pas dénombrable, il y a un nombre α pour lequel $P^{(\alpha)}$ est parfait.

On nomme *parfait* (*perfect*) un ensemble qui est identique avec son premier dérivé, et, par conséquent, avec tous ses dérivés. Tout ensemble parfait a la puissance du continu (nos 18, 19, 20, 23, 25, 30). Le continu lui-même est un ensemble parfait; mais il y a des ensembles parfaits qui ne sont pas continus, et il y en a même qui ne sont condensés dans aucun

intervalle, si petit qu'il soit. En quoi donc le continu diffère-t-il des autres ensembles parfaits? En ceci, qu'il est en même temps un ensemble *bien enchaîné*. On dit qu'un ensemble est *bien enchaîné* (*zusammenhängend*), si, t et t' étant deux points quelconques de cet ensemble, on peut trouver un nombre fini n de points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ appartenant à l'ensemble considéré, de façon que les distances $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_{n-1}t_n, t_nt'$ soient toutes moindres qu'une longueur donnée d'avance (n° 18).

10. Les ensembles parfaits sont le trait-d'union entre deux familles plus générales d'ensembles, les ensembles *condensés en soi* (*insichdicht*) et les ensembles *fermés* (*geschlossen*). On dit qu'un ensemble est *condensé en soi*, s'il est contenu dans son premier dérivé; on dit au contraire qu'il est *fermé* s'il le contient. Tout ensemble qui est le dérivé d'un autre ensemble est évidemment fermé; mais il est important de remarquer, que tout ensemble fermé peut-être regardé, d'une infinité de façons différentes, comme le premier dérivé d'un autre ensemble (n° 23). De là et de ce que nous avons dit précédemment, il découle une propriété remarquable des ensembles fermés (n^os 23, 38), à savoir, que, si un ensemble fermé P est dénombrable, il y a un nombre α de la classe I ou II, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est nul, et que, si P n'est pas dénombrable, il y a un nombre α, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est parfait. Dans ce dernier cas on peut décomposer l'ensemble P d'une façon unique en deux ensembles partiels R et S, dont S est parfait et coïncide avec $P^{(\alpha)}$, et R est dénombrable et n'a aucun élément commun avec $R^{(\alpha)}$. Il suit de là immédiatement qu'un ensemble fermé ou est dénombrable, ou a même puissance avec le continu (n^os 23, 25, 30).

11. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il y a des ensembles pouvant être renfermés dans des intervalles en nombre fini, dont la somme est si petite que l'on veut. C'est là un nouveau point de vue, auquel on peut se placer pour l'étude des ensembles de points. On peut dire sans difficulté que l'ensemble de tous les points d'un espace continu et fini, à n dimensions, ayant le volume v, a lui même le *volume* ou la *grandeur* (*Inhalt*) v; mais on peut aussi étendre ce concept à un ensemble quelconque de la façon suivante (n^os 23, 25). Soit P un ensemble de points contenu dans un espace fini à n dimensions A, et décrivons autour de chaque point de P ou de P' comme centre une hypersphère de rayon ρ. La partie de l'espace A qui est contenue dans l'intérieur de ces sphères est une fonction de ρ, $F(\rho)$ qui [ainsi qu'il a été démontré par M. STOLZ (n° 34) et par HARNACK (n° 39)] tend à une

limite déterminée, positive ou nulle, lorsque ρ tend à zéro; cette limite est ce qu'on appelle le *volume* ou la *grandeur* de l'ensemble P. Un ensemble a même volume avec un quelconque de ses dérivés; d'où il suit, en vertu d'un théorème énoncé plus haut, qu'étant donné un ensemble quelconque P, dont le volume n'est pas nul, on peut toujours trouver un ensemble parfait ayant même volume avec P.

12. Quoique l'on puisse admettre, en toute probabilité, qu'il n'y a que deux seules classes d'ensembles de points, l'existence d'ensembles appartenant à des classes différentes de celles-ci n'est point du tout inconcevable. Cela justifie les recherches très générales de M. CANTOR, dont nous allons dire quelques mots (n° 38).

Soit P un ensemble quelconque; on peut le décomposer en deux ensembles partiels:

$$P = Pa + Pc,$$

dont le premier Pa (*adhérence* de P) contient tous les points de P qui n'appartiennent pas à P', le second Pc (*cohérence* de P) tous les points communs à P et à P'. On peut tout aussi bien décomposer Pc en deux ensembles partiels:

$$Pc = Pca + Pc^2,$$

et ainsi de suite; on obtient de cette façon:

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \ldots + Pc^{\nu-1}a + Pc^{\nu},$$

où Pc^{ν} est la *cohérence ν-ième* de P. Si α est un nombre transfini, on définit la cohérence α-ième de P comme la cohérence de la cohérence $(\alpha-1)$-ième, ou comme l'ensemble des points communs à toutes les cohérences d'ordre inférieur à α, suivant que α est de la première ou de la deuxième espèce; on a en tout cas:

$$P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a + Pc^{\alpha}.$$

Or il est toujours possible de trouver un nombre α de la classe I ou II, pour lequel Pc^{α} soit un ensemble condensé en soi; si l'on décompose cet ensemble en deux ensembles partiels U, V, dont le second contient les points de Pc^{α} dans le voisinage desquels il y a un ensemble non dénombrable de points de P, et si l'on désigne par R l'ensemble dénombrable $\sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$, on aura:

$$P = R + U + V.$$

L'ensemble R n'a de points communs ni avec U' ni avec V'; en outre U et V' n'ont aucun point commun. Il va sans dire que, si P est dénombrable, l'ensemble partiel V est nul. L'ensemble R, ou Pr, est le *résidu* de P; $U+V$, ou Pi, est l'*inhérence totale* de P, U ou Pi_1, l'*inhérence de premier ordre*. Quant à V, en supposant possible l'existence d'ensembles ayant une puissance quelconque, on peut le décomposer en une multiplicité finie ou infinie d'ensembles partiels *homogènes,* c. a. d. de telle nature, que l'ensemble des points de P qui se trouvent dans le voisinage d'un point quelconque de l'ensemble considéré ait une même puissance.

13. La théorie des ensembles est entrée depuis quelques années dans le domaine commun, et l'on trouve l'exposition, plus ou moins étendue, de ses éléments dans plusieurs traités, tels que ceux de MM. MEYER (n° 41), BIERMANN (n° 47) et DICKSTEIN (n° 56), ainsi que dans les travaux de MM. GUTBERLET, KERRY et TANNERY dont nous parlerons plus bas. M. LORIA a dédié un article (n° 48) à ces théorèmes de la théorie des ensembles qui ont trait à la question de la continuité de l'espace.

Quant aux applications et aux généralisations auxquelles a donné lieu cette théorie, nous nous bornons à en indiquer les plus importantes. M. DINI (n° 4) est peut-être le premier, après M. CANTOR lui-même (n° 1), qui ait introduit dans la théorie des fonctions d'une variable réelle la considération des ensembles de points. Ensuite M. VELTMANN (n° 16) et SCHEEFFER (n^{os} 28, 29) ont appliqué à quelques points de cette même théorie les concepts de M. CANTOR; MM. MITTAG-LEFFLER (n^{os} 13, 24) et GUICHARD (n° 22) ont pris ces concepts pour base de l'étude des singularités des fonctions analytiques. MM. ASCOLI (n° 33) et ARZELÀ (n° 54) ont tenté d'étendre la théorie des ensembles de points aux ensembles de courbes planes; M. DE PAOLIS (n° 55) en la combinant avec l'*analysis situs,* en a fait le fondement d'une théorie générale des correspondances.

14. L'étude de certaines questions relatives à l'intégrabilité des fonctions a amené DU BOIS-REYMOND à des conceptions très semblables à celles de M. CANTOR. Les principes de ses recherches à ce sujet se trouvent exposés dans son ouvrage: *Die allgemeine Functionentheorie* (n° 14); mais comme il n'y a là guère que de simples définitions, et comme en outre la nomenclature y est tout à fait différente de celle de M. CANTOR, nous nous abstenons d'en parler davantage.

15. Le concept de nombre transfini possède un si haut

degré de généralité, qu'il semble peut-être étrange qu'on puisse le comprendre sous un concept mathématique encore plus général. Et toutefois il en est vraiment ainsi; le nombre transfini n'est qu'un cas particulier du *type ordonné* (*Ordnungstypus*).

Soit donné (n° 49) un ensemble d'éléments ordonnés en n sens, de façon qu'on sache toujours si l'un de deux éléments quelconques de l'ensemble a rang égal, supérieur ou inférieur par rapport à l'autre dans chacun de n sens. Si l'on fait abstraction de la nature des éléments de l'ensemble, on obtient le concept de *type ordonné à n dimensions*. On peut donc dire que deux ensembles ordonnés en n sens ont *même type*, lorsqu'on peut faire correspondre leurs éléments, en sorte que les éléments correspondants des deux ensembles soient ordonnés de la même façon dans chacun des n sens.

Les nombres transfinis sont les types des ensembles linéaires bien ordonnés; ils sont donc des types spéciaux à une dimension.

Etant donné un ensemble quelconque E ordonné en n sens, on peut construire dans l'espace à n dimensions un ensemble de points E_1 ayant même type avec E. Il suffit pour cela de faire correspondre à chaque élément A de E un point A_1, de façon que, A, A_1 et B, B_1 étant deux couples quelconques d'éléments correspondants, la ν-ième coordonnée de A_1 soit $\gtreqless$ celle de B_1 suivant que le rang de A dans le ν-ième sens est supérieur, égal ou inférieur à celui de B.

M. CANTOR a défini l'addition et la multiplication des types, et a montré que ces opérations ne sont pas commutatives. Il a étudié avec détail les types finis, c. a. d. les types auxquels appartiennent les ensembles finis, et il a résolu par rapport à ces types le problème fondamental de déterminer le nombre de tous les types possibles à n dimensions contenant un même nombre donné m d'éléments.

M. H. SCHWARZ (n° 51) a traité dans sa dissertation inaugurale diverses questions au sujet des types finis; et l'auteur de cet article (n° 53) a exposé systématiquement les principes de la théorie des types ordonnés en y ajoutant quelques résultats nouveaux.

A la théorie des types ordonnés se rattachent dans le concept — tout en étant antérieures au mémoire de M. CANTOR sur cet argument — deux notes de HARNACK (n° 35) et de M. BETTAZZI (n° 52), ayant pour objet la détermination des ensembles dont aucune partie n'est continue et qui ont même type avec l'ensemble de tous les points de l'intervalle $0-1$.

16. Il est bien naturel qu'une théorie, qui se fonde essentiellement sur le concept d'infini, ait ranimé les anciennes discussions philosophiques sur la possibilité et sur la nature des grandeurs infiniment grandes et infiniment petites. M. Cantor lui-même, dans ses *Grundlagen* (n° 18), a réfuté quelques-unes des objections qui ont été soulevées contre l'infini, en montrant que toutes ces objections contiennent une *petitio principii*, consistant en ceci, qu'on attribue implicitement à l'infini toutes les propriétés du fini. On croit par exemple d'établir que le nombre infini n'est pas possible, en démontrant que, s'il existait, il devrait être au même temps pair et impair, — sans réfléchir qu'on ne peut pas transporter *a priori* ces propriétés des nombres finis au nombre infini, ou tout au moins qu'on ne peut pas affirmer qu'elles soient nécessairement disjonctives pour ce dernier nombre pour cela seulement qu'elles le sont pour le nombre fini.

Parmi les écrits qui s'occupent de la théorie des ensembles au point de vue philosophique nous citerons ceux de MM. Gutberlet (n° 40), Kerry (n° 42) et Tannery (n° 43). M. Cantor est revenu à plusieurs reprises dans de courtes notes (voir n° 45) sur les fondements philosophiques de sa théorie; plus récemment, il a publié dans un travail plus étendu (n° 49) quelques-unes des lettres qu'il a eu occasion d'écrire à divers savants à ce sujet.

17. Nous rappellerons enfin, que M. Cantor, qui dit d'avoir été animé dans ses recherches sur les ensembles par l'espoir de pouvoir en faire l'application à la physique mathématique et à d'autres sciences, émet l'hypothèse (n° 38) que les monades (atomes) de la matière constituent un ensemble P de la première puissance, et que celles de l'éther constituent un ensemble Q de la deuxième puissance. D'après ce qu'on a dit plus haut, ces deux ensembles se décomposeraient de la façon suivante:

$$P = Pr + Pi_1, \qquad Q = Qr + Qi_1 + Qi_2;$$

et les actions réciproques des 5 ensembles partiels Pr, Pi_1, Qr, Qi_1, Qi_2 donneraient naissance aux différents phénomènes physiques et chimiques.

Liste bibliographique des écrits sur la théorie des ensembles.

1. G. CANTOR. Über die Ausdehnung eines Satzes aus des Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathem. Ann. 5, 1872, 123—132. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 336—348.

2. G. CANTOR. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. Journ. für Mathem. **77**, 1874, 258—262. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 305—310.

3. G. CANTOR. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. für Mathem. **84**, 1877, 242—258. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 311—328.

4. U. DINI. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878.

5. J. THOMAE. Sätze aus der Functionentheorie. Nachr. von der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1878, 466—468.

6. J. LÜROTH. Über gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander. Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen **10**, 1878, 190—195.

7. G. CANTOR. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Nachrich. von der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1879, 127—135.

8. G. CANTOR. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. Mathem. Ann. **15**, 1879, 1—7. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 349—356.

9. E. NETTO, Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. für Mathem. **86**, 1879, 263—268.

10. G. CANTOR. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. II. Mathem. Ann. **17**, 1880, 355—358. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 357—360.

11. G. CANTOR. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. III. Mathem. Ann. **20**, 1882, 113—121. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 361—371.

12. G. CANTOR. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. IV. Mathem. Ann. **21**, 1882, 51—58. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 372—380.

13. G. MITTAG-LEFFLER. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, *passim*.

14. P. du Bois Reymond. Die allgemeine Functionentheorie. I. Tübingen 1882. — Traduction française par G. Milhaud et A. Girot. Paris 1887.

15. W. Veltmann. Über die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 176—179.

16. W. Veltmann. Die Fourier'sche Reihe. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 193—235.

17. W. Veltmann. Zur Theorie der Punktmengen. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 313—314.

18. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V. Mathem. Ann. **21**, 1883, 545—591. — Ce mémoire a aussi été publié à part sous le titre: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre» (Leipzig 1883). — Un extrait en français en a été inséré dans les Acta mathem. **2**, 1883, 381—408.

19. G. Cantor. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication. Acta mathem. **2**, 1883, 409—414.

20. I. Bendixson. Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Acta mathem. **2**, 1883, 415—429.

21. I. Bendixson. Några studier öfver oändliga punktmängder. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar (Stockholm) **40**, 1883, n° 2: 31—35.

22. M. Guichard. Théorie des points singuliers essentiels. Annales de l'école normale [de Paris] **12**, 1883, 301—394.

23. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. VI. Mathem. Ann. **23**, 1884, 453—488.

24. G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta mathem. **4**, 1884, 1—79.

25. G. Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta mathem. **4**, 1884, 381—392.

26. E. Phragmén. Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta mathem. **5**, 1884, 47—48.

27. E. Phragmén. En ny sats inom teorien för punktmängder. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar **41**, 1884, n° 1: 121—124.

28. L. Scheeffer. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. Acta mathem. **5**, 1884, 49—82.

29. L. SCHEEFFER. Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. Acta mathem. **5**, 1884, 183—194, 279—296.

30. I. BENDIXSON. Sur la puissance des ensembles parfaits de points. Bihang till vet. akad. handlingar (Stockholm) **9**, 1884, n° 6.

31. I. BENDIXSON. Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles. Bihang till vet. akad. handlingar **9**, 1884, n° 7.

32. P. TANNERY. Note sur la théorie des ensembles. Bullet. de la soc. mathém. de France **12**, 1884, 90—96.

33. G. ASCOLI. Le curve limite di una varietà data di curve. Mem. dell' accad. dei Lincei (Roma) $\mathbf{18}_3$, 1884, 521—586.

34. O. STOLZ. Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. Mathem. Ann. **23**, 1884, 152—156.

35. A. HARNACK. Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige. Mathem. Ann. **23**, 1884, 285—288.

36. M. LERCH. Prispevek k nauce o mnozinach bodu v rovine. Sitzungsber. der böhmischen Gesellsch. der Wissensch. (Prag) 1884, 176—178. — Contribution à la théorie des ensembles.

37. E. PHRAGMÉN. Über die Begrenzungen von Continua. Acta mathem. **7**, 1885, 43—48.

38. G. CANTOR. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mittheilung. Acta mathem. **7**, 1885, 105—124.

39. A. HARNACK. Über den Inhalt von Punktmengen. Mathem. Ann. **25**, 1885, 241—250.

40. C. GUTBERLET. Das Problem des Unendlichen. Zeitschr. für Philosophie und philosophische Kritik (Halle) **88**, 1885, 179—223.

41. F. MEYER. Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle 1885.

42. B. KERRY. Über G. Cantor's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen. Vierteljahrsschr. für wissensch. Philosophie **9**, 1885, 191—232.

43. P. TANNERY. Le concept scientifique du continu: Zénon d'Elée et Georg Cantor. Revue philosophique (Paris) Octobre 1885.

44. G. ENESTRÖM. Om G. Cantors uppsats: Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actualunendlichen Zahlen. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar **42**, 1885, n° 10: 69—70.

45. G. CANTOR. Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen. Bihang till vet. akad. handlingar **11**, 1886, n° 19. — Le commencement de cet écrit a été reproduit dans la »Zeitschr. für Philosophie und philosoph. Kritik» **88**, 1886, 224—233, et dans le journal »Natur und Offenbarung» (Münster) **32**, 1886, 46—49. — Un tirage à part de la fin porte le titre: »Zur Frage des actualen Unendlichen».

46. M. LERCH. O soustavách bodu a jich vyznamu v analysi. [Sur les ensembles de points et leurs signification pour l'analyse.] Casopis pro pestov. mathem. (Prag) **15**, 1886, 211.

47. O. BIERMANN. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

48. G. LORIA. La definizione dello spazio a *n* dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor. Giorn. di matem. **25**, 1887, 97—108.

49. G. CANTOR. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. Zeitschr. für Philosophie und philos. Kritik **91**, 1887, 81—125, 252—270; **92**, 1887.

50. K. BECKMAN. Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för matematiken. Upsala 1888.

51. H. SCHWARZ. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Halle 1888.

52. R. BETTAZZI. Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari. Annali di matem. $\mathbf{16}_2$, 1888, 49—60.

53. G. VIVANTI. Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. Annali di matem. $\mathbf{17}_2$, 1889, 1—35.

54. C. ARZELÀ. Funzioni di linee. Rend. dell' accad. dei Lincei (Roma) $\mathbf{5}_4$, 1889, 1: 342—348.

55. R. DE PAOLIS. Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. Mem. della soc. ital. delle scienze (detta dei XL) $\mathbf{8}_3$, 1890.

56. S. DICKSTEIN. Poiecia i metody matematyki. I. Warszawa 1891.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Le opere di **Galileo Galilei.** Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua Maestà il Re d'Italia. Volumi I, II. Firenze 1890, 1891. 4°, 423 + (2) + 611 + (1) p.

Il y a quatre ans, nous avons rendu compte dans ce journal (voir Biblioth. Mathem. 1888, p. 90) du plan adopté pour la nouvelle édition des oeuvres de Galileo Galilei que le gouvernement italien a chargé M. A. Favaro de rédiger. D'après ce plan, l'édition comprendra 20 volumes dont les neuf premiers seront consacrés aux écrits scientifiques rangés en ordre chronologique. Dans les volumes I et II, parus respectivement en 1890 et en 1891, nous avons donc à chercher les premiers résultats de l'action scientifique de Galilei.

Le volume I contient six écrits, savoir: *Iuvenilia; Theoremata circa centrum gravitatis solidorum; La bilancetta; Tavole delle proporzioni delle gravità in specie de i metalli e delle gioie pesate in aria ed in aqqua; Postille ai libri de sphaera et cylindro di Archimede; De motu.* Le premier écrit, qui se compose de deux commentaires sur la philosophie naturelle d'Aristoteles, est publié ici pour la première fois d'après un autographe (1584) de Galilei, mais comme le fait observer M. Favaro, il n'est pas mis hors de doute que le grand savant florentin en soit l'auteur; en effet, il est très probable qui le manuscrit ne soit qu'une copie faite par Galilei d'après les leçons de quelqu'un de ses professeurs, p. ex. Buonamici. Parmi les autres écrits, le plus grand est celui intitulé *De motu,* qui se compose de plusieurs notes sur la théorie du mouvement; elles ont été rédigées par Galilei vers 1590 et comprendent les germes de plusieurs des découvertes importantes faites plus tard par lui.

Si le volume I renferme principalement des documents servant à faire ressortir la marche des premières recherches scientifiques de Galilei, le volume II offre un intérêt plus direct au point de vue scientifique. Ce volume contient les écrits suivants: 1° *Breve istruzione all' architettura militare;* 2° *Trattato di fortificazione;* 3° *Le mecaniche;* 4° *Lettera a Iacopo Mazzoni;* 5° *Trattato della sfera ovvero cosmografia;* 6° *De motu accelerato;* 7° *Frammenti di lezioni e di studi sulla nuova stella dell' ottobre 1604;* 8° *Considerazione astronomica circa la stella nova dell' anno 1604, di Baldesar Capra, con postille di Galileo;* 9° *Dialogo de Cecco di Ronchitti da Bruzene in perpuosito de la stella nuova;* 10° *Del compasso geometrico e militare;* 11° *Le operazioni del compasso geometrico e militare;* 12° *Usus et fabrica*

circini cuiusdam proportionis, opera et studio Balthesaris Caprae, con postille di Galileo; 13° *Difesa contro alle calunnie ed imposture di Baldessar Capra;* 14° *Le matematiche nell' arte militare.* Parmi ces écrits, les n^{os} 11 et 13 ont été publiés par GALILEI lui-même en 1606 et 1607; le n° 9 est une brochure parue en 1605 et rédigée probablement par G. SPINELLI sous la direction de GALILEI; les n^{os} 8 et 12 sont deux ouvrages de CAPRA, qui sont nécessaires pour l'intelligence des n^{os} 8 et 13. Tous les autres écrits ont été publiés pour la première fois après la mort de GALILEI (n° 3 en 1649, n° 5 en 1656, les autres seulement au 19^e siècle) ou sont restés inédits.

Chacun des écrits contenus dans ces deux volumes est précédé par une savante introduction bibliographique et historique. Il faut ajouter aussi que la collation des manuscrits ou des éditions originales a été faite avec la plus grande précision, que les figures sont reproduites avec beaucoup de soin, que la disposition du texte est très heureuse et que l'exécution typographique en général mérite tous les éloges. Par conséquent, la nouvelle édition des oeuvres de GALILEI, une fois achevée d'après le plan adopté, sera un monument digne de l'éminent savant et pourra être mise à côté des meilleures éditions des ouvrages de grands mathématiciens parues jusqu'à présent.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von | journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1891: 4. — [Analyse de l'année 1890 (fin):] Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 38—43. (V. V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

10 (1891): 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

36 (1891): 6.

°**Adam, W.**, Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Quedlinburg 1891.

8°. — [2.40 M.]

Ball, W. W. R., Mathematical recreations and problems of past and present times. London, Macmillan 1892.
8°, XII + 240 p. — [7 sh.]

Ball, W. W. R., Mersennes numbers.
Messenger of mathem. **21**, 1891, 34—40, 121.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. XXXII. Proeve eener bibliographie van de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.
Amsterdam, Akademie van wetensch., Verslagen en Mededeel. (Afd. Natuurkunde) 9_3, 1891, 4—47.

Birkenmajer, L., Krakowskie tablice syzygijów na r. 1379 i 1380. Przyczynek do dziejów astronomii w polsce XIV wieku.
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **21**, 1891, 259—285. — Tables des syzygies, calculées à Krakow pour les années 1379 et 1380. Contribution à l'histoire de l'astronomie en Pologne au XIVe siècle.

Börjesson, G. O., Ur talbeteckningens historia.
Redogörelse för Göteborgs arbetareinstituts verksamhet 1890—91 (Göteborg 1891), 20—26.

°**Breusing, A.,** Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten. Bremen, Silomon 1890.
8°, 46 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 175. (CANTOR.)

Cajori, F., The study of Diophantine analysis in the United States.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 39—47.

Cajori, F., Historical note on the differentiation of a logarithm.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 96.

Cajori, F., A mathematical error in the Century dictionary.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 97. — Remarque relative aux logarithmes de NEPER.

Del Gaizo, M., Contributo allo studio della vita e delle opere di Giovanni Alfonso Borelli.
Napoli, Accad. Pontaniana, Memorie **20**, 1890, 1—48.

Eisenlohr, A., Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt. Zweite Ausgabe. Leipzig 1891.
4°, 2 + 278 p. — [12 M.]

Favaro, A., Nuovi studi Galileiani. Venezia 1891.
4°, 430 p.

Favaro, A., Capitolo inedito e sconosciuto di Galileo Galilei contro gli aristotelici.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 3_7, 1892, 1—12.

Favaro, A., Di alcuni recenti lavori su Leonardo da Vinci.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 3_7, 1892, 13—47.

Favaro, A., Cronologia Galileiana raccolta ed ordinata.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **8**, 1892. 41 p.

Favaro, A., Serie settima di scampoli Galileiani.
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie **8**, 1892. 41 p.

Galdeano, Z. G. de, Edouard Lucas.
El progreso matem. **1**, 1891, 291. — Nécrologie.

Glaisher, J. W. L., The method of quarter-squares.
Nature (London) **40**, 1889, 573—576. — Notice historique.

Hathaway, A. S., Early history of the potential.
New York, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1891, 66—74.

Hentschel, H., Kurzer Abriss einer Geschichte der Physik. Löbau 1891.
8°, 24 p. + 2 pl.

Holst, E., Sophus Lie.
Skilling-Magazin (Kristiania) **57**, 1891, 781—783. — Notice biographique, avec portrait.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome quatrième. Correspondance 1662—1663. La Haye, Nijhoff 1891.
4°. (6) + 587 + (1) p. + 3 pl. — [Analyse des tomes I—III:] Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{16}_2$, 1892, 5—30. (P. H. SCHOUTE.)

К., В., Краткій очеркъ исторіи задачи о квадратурѣ круга.
Vjestnik elem. matem. **11**, 1891, 113—125. — Aperçu de l'histoire du problème de la quadrature du cercle.

Kullrich, E., Zur Geschichte des mathematischen Dreikörperproblems. Halle 1891.
8°, 68 p. — [1.80 M.]

Lampe, E., Leopold Kronecker †. Nachruf.
Naturwissenschaftliche Rundschau (Braunschweig) **7**, 1892, 128—129.

Leffler, A. Ch., Sonja Kovalevsky.
Annali di matem. $\mathbf{19}_2$, 1891, 201—211.

Loria, G., Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1891, 99—112.

Loria, G., Aggiunte all' articolo »il teorema fondamentale delle equazioni algebriche«.
Rivista di matem. **2**, 1892, 37—38.

Lucas, E., Récréations mathématiques. Tome premier. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars 1891.
8°, XXIV + 254 p. — [7.50 fr.] — [Analyse:] Mathesis $\mathbf{2}_2$, 1892, 45—46.

Mansion, P. et Neuberg, J., Edouard Lucas. Nécrologie.
Mathesis $\mathbf{1}_2$, 1891, 217.

M[ansion], P. et N[euberg], J., Léopold Kronecker. Nécrologie.
Mathesis $\mathbf{2}_2$, 1892, 18.

M[ansion], P. et N[euberg], J., Louis-Philippe Gilbert. Nécrologie.
Mathesis $\mathbf{2}_2$, 1892, 57.

°**Monchamps, G.**, Galilée et la Belgique. Essai historique sur

les vicissitudes du système de Copernic en Belgique (17e et 18e siècles). Saint-Trond, Moreau 1892.
12°, 346 + 76 p. — [Analyse:] Mathesis $\mathbf{2}_2$, 1892, 21. (P. M.)

Necrologia. L. Kronecker.
El progreso matem. **2**, 1892, 60.

Ninni, A. P., Sui segni prealfabetici usati anche ora nella numerazione scritta dei pescatori Clodiensi.
Venezia, Istituto, Atti $\mathbf{7}_6$, 1889, 679—686.

P[eano], G., Sommario del libro X d'Euclide.
Rivista di matem. **2**, 1892, 7—11.

Peano, G., Angelo Genocchi.
Torino, Università, Annuario 1889—1890, 195—202.

Peano, G., Enrico Novarese.
Rivista di matem. **2**, 1892, 35.

Rebière, A., Aperçu de l'histoire des mathématiques.
Bulletin scientifique (Paris) **4**, 1889—90, 276—278.

Reyes y Prósper, V., Christina Ladd Franklin, matemática americana y su influencia en la lógica sinbólica.
El progreso matem. **1**, 1891, 297—300.

Reyes y Prosper, V., Ernesto Schroeder, sus merecimientos ante la Lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras.
El progreso matem. **2**, 1892, 33—36.

Rudio, F., Über die Convergenz einer von Vieta herrührenden eigenthümlichen Productentwickelung.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 139—140.

Rudio, F., Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Hamburg 1892.
8°, 33 p. — [0.50 M.] — Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. Neue Folge. Sechste Serie. Heft 142.

°**Schnaase, L.**, Die Optik Alhazens. Stargard 1890.
4°, 20 p.

Siacci, F., Cenni necrologici di Angelo Genocchi.
Torino, Accad. d. sc., Memorie $\mathbf{39}_2$, 1889, 463—495.

СТАРКОВЪ, А. П., Къ исторіи алгебраическаго обозначенія въ связи съ развитіемъ азбучной и музыкальной письменности.
Odessa, Matem. otd. obchtch. estestv., Zapiski **7**, 1886. Appendice. — Starkoff, A. P., Sur l'histoire de la notation algébrique considérée en rapport avec le développement de l'écriture alphabétique et musicale. — L'introduction (p. 1—102) contient des notices sur des ouvrages relatifs à l'histoire des mathématiques. — [Analyse:] Fiziko-matem. naouki **3**, 1887, 19—31, 38—46. (V. Bobynin.)

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1891, 113—116.

°**Sterner, M.**, Principielle Darstellung des Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. I. Geschichte der Rechenkunst. München 1891.
8°, 12 + 533 p. — [6 M.]

Tannery, P., Les autographes de Descartes. (Continuation.)
Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 228—236, 260—274, 281—296, 301—308; 16_2, 1892, 32—40.

Villicus, F., Die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum 18. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und Oesterreich. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Wien 1891.
8°, 112 p. — [2.80 M.]

Vivanti, G., Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton.
Biblioth. Mathem. 1891, 97—98.

Question 36 [sur un écrit de Horky publié en 1610].
Biblioth. Mathem. 1891, 119. (A. Favaro.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Band 21 (1889). Berlin, Reimer 1892.
8°. — Les pages 1—48 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1889.

Apollonii Pergaei quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. I. Lipsiæ, Teubner 1891. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 221—226. (P. Tannery.)

Braunmühl, A. v., Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom. Bamberg, Buchner 1891. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 175—176. (Cantor.)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Erster Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1891, 117—118. (G. Eneström.) — Mathesis 2_2, 1892, 19—20. (P. M.)

Galdeano, Z. G. de, Estudios criticos sobre la generación de los conceptos matemáticos. Madrid 1890. 8°.
Mathesis 1_2, 1891, 272—273.

Kerbedz, E. de, Sophie de Kowalevski. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1891.)
Jorn. de sc. mathem. **10**, 1891, 78—79. (G. T.)

Loria, G., Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati (Biblioth. Mathem. 1891.)
Jorn. de sc. mathem. **10**, 1891, 76. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1890. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 227—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1891, 118—119. — Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 49—64. — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 224—226.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

37. Dans un très grand nombre de traités d'arithmétique publiés aux 16ᵉ et 17ᵉ siècles, on trouve une espèce de problèmes d'analyse indéterminée, qui porte le titre *regula coeci* (parfois *ceci* ou *cecis*). D'après M. CANTOR (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, p. 393), le traité d'arithmétique de RUDOLFF (1526) est le premier livre imprimé, où de tels problèmes ont été proposés; M. CANTOR dérive *coeci* du mot allemand *Zeche* (société de buveurs), parce qu'il s'agit souvent de personnes qui se sont assemblées pour boire. D'autre part. TERQUEM (*Problème des jeunes filles, de l'aveugle etc.*; Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques 1859, p. 1—2) a traduit *regula coeci* par »la règle de l'aveugle», parce qu'il y a un épigramme arithmétique grec qui contient un problème de la même nature et où la résolution du problème est attribuée à l'aveugle HOMEROS. Quelques auteurs croient que *ceci* est le mot italien *zecca* (monnaie) et que, par conséquent, *regula ceci* signifie »la règle des monnaies»; en effet, il s'agit ordinairement de calculer combien d'argent différentes personnes doivent payer.

Quelle est la vraie signification de l'expression *regula coeci*, et quel est le premier auteur qui se soit servi de ce terme?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1892.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. Nº 2.

NEUE FOLGE. 6. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve.

Appunti di CORRADO SEGRE a Torino.[1]

I.

Nella seduta del 27 Giugno 1864 lo CHASLES, esponendo all' Accademia scientifica francese i procedimenti generali con cui egli otteneva le proprietà dei sistemi (semplicemente infiniti) di coniche di date caratteristiche,[2] dimostrava »*una volta per tutte*» — come *lemma* da cui derivano quei procedimenti generali — quello che poi fu chiamato *principio di corrispondenza* (fra i punti di una retta): cioè che in una corrispondenza (α, β) tra i punti di una retta vi sono $\alpha + \beta$ punti uniti. È in base a ciò che si suole attribuire *esclusivamente* allo CHASLES la scoperta di questo principio — fondamentale nella geometria moderna degli enti algebrici (in quanto che costituisce in gran parte dei casi la forma più opportuna sotto cui si può far comparire in questa geometria la nozione di *algebricità*, cioè il teorema fondamentale dell' algebra). Ma così facendo mi pare si commetta sempre un' inesattezza storica: poichè già tre anni prima dello CHASLES il sig. DE JONQUIÈRES, e seguendo il suo esempio il sig. CREMONA, avevano publicate parecchie applicazioni di quel principio.

Alcuni, — tra cui lo stesso CHASLES in qualche punto della polemica che ebbe col JONQUIÈRES negli anni 1866—1867 (polemica che avremo da citare ripetutamente),[3] — vogliono

considerare quel principio come una semplice estensione del »*Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie*» enunciato in generale dallo CHASLES il 24 Dicembre 1855.[4] Ma in realtà questo consisteva, com' è noto, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2), tra due forme semplici non è altro che un' omografia tra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed un' involuzione ordinaria dell' altra. Si trattava dunque della *struttura* della corrispondenza; e non del *numero degli elementi uniti*, come nel principio di corrispondenza del 1864. Inoltre nè la detta comunicazione del 1855 nè i successivi lavori publicati dallo CHASLES fino al 1864 lascian capire che questi avesse già vista l'utilità di considerare corrispondenze d'indici superiori a 2, e specialmente di ridurre i problemi geometrici alla ricerca degli elementi uniti di tali corrispondenze: nè vi si trova fatto il passaggio dall' equazione bilineare che rappresenta la corrispondenza (1, 1) alle equazioni di corrispondenze superiori. — D'altronde lo stesso CHASLES, quando nel 1866 alle sue prime osservazioni polemiche volle aggiungere (Comptes rendus etc. **63**, nota alla pag. 821) un reclamo contro l'uso che il JONQUIÈRES poco prima (nelle Note di Saïgon che citeremo più avanti) aveva fatto del metodo delle corrispondenze, senza citarlo, avvertiva: »... j'ai formulé et démontré ce mode de procéder, une fois pour toutes, sous le titre de *Lemme*, dans nos »*Comptes rendus* t. 58 p. 1175, ainsi que je l'avais fait dans »les leçons de la Sorbonne de 1863—1864»; e non aggiunse, come certo avrebbe fatto, ragioni di priorità anteriori a queste.

È stato citato in proposito anche il manoscritto del *Traité des sections coniques* che lo CHASLES comunicò al JONQUIÈRES nei primi mesi del 1859.[5] Ma in quel manoscritto, come nell'opera stampata (1865), i passi a cui quella citazione poteva alludere si riferivano sempre a corrispondenze d'indici 1 o 2.[6]

Del resto il JONQUIÈRES anche prima del 1859 aveva mostrato di essere pienamente nell' ordine d'idee che doveva condurre al principio generale di corrispondenza: nei *Mélanges de géométrie pure* (1856), in cui il Cap. 4° è appunto dedicato a quello che egli chiama *principe de correspondance anharmonique* dato poco prima dallo CHASLES; ed in qualche lavoro successivo.[7] Ma (se non erro) fu solo nel 1861, e precisamente nella Nota intitolata *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de mathém. 6_2, 1861, pag. 113), che il JONQUIÈRES introdusse nella scienza l'uso di corrispondenze *d'indici qualunque* fra i punti di una

retta. In quella Nota sono per la prima volta studiate delle proprietà generali delle *serie* (∞^1) di curve piane di dato ordine; ed introdotta la nozione dell' *indice* di una serie (numero delle curve passanti per un punto dato), ne vien dimostrata la grande importanza. Ciò è ben noto, ed è stato più volte ricordato: mentre non si suol rilevare l'altro fatto suddetto. Esso si presenta: nella determinazione dell' ordine, $N(m+n)$, della curva generata da due serie d'indice N e di ordini m, n, in corrispondenza univoca (teor. V della Nota); in quella dell' ordine, $N(m+2n-3)$, del luogo dei punti aventi lo stesso asse armonico rispetto ad una curva fissa d'ordine m e ad una curva di una data serie d'indice N e d'ordine n (teor. VII); infine in quella del numero delle tangenti doppie di una curva piana (teor. XI). Ognuna di queste determinazioni è ridotta a quella del numero dei punti uniti di un' opportuna corrispondenza (α, β) su di una retta, per la quale si assegnano i valori di α, β. Poi, in ciascun caso, si osserva che in conseguenza della corrispondenza le ascisse x, x' dei punti omologhi saran legate da un' equazione della forma $Ax^{\alpha}x'^{\beta}+\ldots=0$; ed allora ponendo $x=x'$ si trae che vi sono $\alpha+\beta$ punti uniti. Insomma si fa *ogni volta* quello stesso breve ragionamento che tre anni dopo faceva, »*una volta per tutte*», lo CHASLES.

Subito dopo la publicazione della Nota del JONQUIÈRES, il CREMONA nell' *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie dell' acc. delle scienze di Bologna **12**$_1$, 1861, p. 305) adottava quel metodo per determinare l'ordine dei luoghi geometrici, cioè di ridursi alla ricerca dei punti uniti di una corrispondenza; e lo applicava, oltre che ai citati teor[i] V e VII di JONQUIÈRES (*Introduzione*, n[i] 83[8] e 87), alla dimostrazione di altre proposizioni importanti (n[i] 98, 106, 116, 117). — Si noti che per trovare il numero dei punti uniti delle corrispondenze che incontra il CREMONA fa una prima volta (n. 83) il ragionamento su riferito; ma poi in seguito, determinati in ciascun caso i valori di α, β, conchiude *senz' altro* il numero $(\alpha+\beta)$ dei punti uniti (limitandosi appena a citare, per le prime volte, il n. 83).

[1] Questo scritto è lo sviluppo di una nota che si trova nella Relazione sulla Memoria del Prof. R. DE PAOLIS: *Le corrispondenze projettive* ecc.; Atti dell' acc. d. sc. di Torino **27**, 1892, pag. 366. — Si confrontino le utili *Notizie storiche sulla Geometria numerativa*, di GINO LORIA; Biblioth. Mathem. 1888, 39—48, 67—80; 1889, 23—27.

[2] Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **58**, 1864, pag. 1167; v. pag. 1175.

[3] In conseguenza indichiamo subito gli scritti in cui essa principalmente si svolse: CHASLES. *Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes* (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [12 nov^e], p. 816—821). — JONQUIÈRES. *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (ibid. [19 nov^e], p. 870—874). — CHASLES. *Observations au sujet de cette communication* (ibid. [19 nov^e], p. 874—878). — *Addition aux observations présentées dans la dernière séance* etc. (ibid. [26 nov^e], p. 907—909). — JONQUIÈRES. *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles* (Paris, Gauthier-Villars, 8 Déc. 1866). — CHASLES. *Réponse à une revendication de priorité* (Paris, G.-V. 1867). — JONQUIÈRES. *Documents relatifs à une revendication de priorité* (litograf., Paris, 4 Févr. 1867). — CHASLES. *Réponse aux documents relatifs à une revendication de priorité* (Paris, G.-V. 1867). — JONQUIÈRES. *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, G.-V., 31 Mai 1867). — V. anche l'accenno che poi ne fece lo CHASLES nella nota a pag. 330—331 del *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris 1870).

[4] Comptes rendus etc. **41**, 1855, p. 1097. Diciamo »enunciato *in generale*» perchè delle allusioni *particolari* se ne trovano già in lavori precedenti dello CHASLES. Non se ne fa cenno nel *Traité de géométrie supérieure* (1852). Ma ad es° nella Nota *Sur les courbes du 4^e et 3^e ordre* del 16 ag° 1853 (Comptes rendus etc. **37**, p. 272) si trova (pag. 274) il concetto che l'*univocità* è la proprietà caratteristica dell' omografia tra due fasci di rette; pei parametri λ, λ' di due fasci omografici di coniche avendosi una relazione analitica univoca si osserva che questa non potrà essere che della forma $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$; ed in nota si aggiunge: »Ce mode de démonstration, qui comporte la rigueur dési- »rable, et qui dispense de tout calcul, pourra être employé »dans beaucoup de questions: il forme, à cet égard, une »des applications les plus utiles de la théorie du rapport »anharmonique».

[5] V. l'allusione dello CHASLES, Comptes rendus etc. **63**, 1866, p. 908, e le parole esplicite nel *Rapport* p. 331. Anche il JONQUIÈRES riconosce l'influenza che sul modo di procedere (mediante corrispondenze) da lui adottato nel 1861

aveva esercitato lo CHASLES sia col *Principe* del 1855 sia col manoscritto del 1859: v. specialmente la *Lettre à M. Chasles* pag. 10.

[6] E neppure — a quanto si può giudicare dall' opera stampata — alla determinazione degli elementi uniti (così a pag. 345 troviamo, è vero, una corrispondenza (2, 2); ma non se ne considerano i punti uniti).

[7] Ad es° in una *Note sur la géométrie organique de* MACLAURIN, Journal de mathém. $\mathbf{2}_2$, 1857, p. 153, nella quale in particolare (a pag. 158) si determina l'ordine di una curva considerando i punti uniti di una speciale corrispondenza (2, 2).

[8] Ove però le due serie sono d'indici *qualunque* M, N.

II.

Alcuni dei risultati contenuti nei *Théorèmes généraux* etc. furono giudicati difettosi dallo CHASLES. I suoi dubbi, a quanto pare, si riferivano principalmente (e per se e per le conseguenze) al teor. II che dà $2(n-1)N$ come numero delle curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una retta assegnata, ed al teor. V sul citato numero $N(m+n)$: e dipendevano da ciò che le dimostrazioni di JONQUIÈRES eran basate sul grado di un' equazione, e lo CHASLES osservava che questo poteva abbassarsi. Avendo egli comunicato al JONQUIÈRES i suoi dubbi,[9] questi — senza forse riflettervi abbastanza — si affrettò a publicare (febbrajo 1863) delle rettifiche[10] dirette a riguardare i vari numeri assegnati nel suo lavoro come *limiti superiori* (cioè come validi *in generale e al più*) anzi che come valori esatti dei numeri che si volevan determinare. Il CREMONA accolse *provvisoriamente* queste modificazioni[11] e le mise nella traduzione tedesca della sua *Introduzione*[12] là dove riproduce i teoremi di JONQUIÈRES (n^i 83, 85, 87).[13] Ma presto egli si convinse che i dubbi dello CHASLES, almeno in quanto si riferivano al breve ragionamento algebrico con cui il JONQUIÈRES determinava il numero dei punti uniti di una corrispondenza, non sussistevano; ed in una lettera inviata al JONQUIÈRES da Bologna 29 Genn° 1864[14] completava quel ragionamento algebrico notando che dalla considerazione dei valori di x' corrispondenti ad $x=\infty$ segue che nell' equazione $Ax^{\alpha}x'^{\beta}+\ldots=0$ della corrispondenza si può sempre supporre (in generale) che non manchi il termine di grado più alto, sicchè $\alpha+\beta$ sia bene il preciso numero dei punti uniti e non soltanto un limite superiore di esso. Il JONQUIÈRES comunicò subito la lettera del CREMONA allo CHASLES, il quale sul momento non si mostrò

persuaso.[15] Ma poco dopo esponeva il principio di corrispondenza con quella stessa dimostrazione nel suo corso della Sorbonne[16] e nella citata comunicazione del 27 giugno 1864.[17] — Il JONQUIÈRES poi, ritornando (1865) in alcune Note datate da Saïgon[18] sui teoremi dati nel 1861, ed in particolare sui citati teori II e V, ritirò le rettifiche publicate nel 1863, esponendo di nuovo le dimostrazioni, basate (anche nel teor. II) sul metodo delle corrispondenze, ma completandole con l'osservazione di CREMONA.[19]

[9] Dubbi analoghi sembrano quelli espressi dallo CHASLES il 29 dic^e 1862 (Comptes rendus etc. **55**, pag. 934) nella Relazione sul »grand prix de mathématiques» del 1862 (teoria delle quartiche piane), relativamente alla Memoria n° 1, che poi risultò essere del JONQUIÈRES. Ed ancora otto anni dopo (nella nota a pag. 329 del *Rapport*) egli insisteva sull' inesattezza del numero $2(n-1)N$ di JONQUIÈRES risultante dalla possibilità che alcuni coefficienti dell' equazione relativa si annullino.

[10] JONQUIÈRES, *Note au sujet d'un article publié dans le Journal t. VI* (Journal de mathém. **8**$_2$, 1863, pag. 71). — Lettera al CREMONA, publicata nel Giornale di matem. **1**, 1863, p. 128, e riprodotta nei Nouvelles annales de mathém. **2**$_2$, 1863, p. 204—206.

[11] V. le poche parole che fa seguire alla lettera del JONQUIÈRES nel Giornale di matem. l. c.

[12] CREMONA, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven* (Greifswald 1865): v. anche la prefazione del traduttore datata »settembre 1864», dalla quale appare pure che, sebbene il vol. porti la data del 1865, le cose in questione erano già stampate molto tempo prima.

[13] Non però — si noti — nelle sue proprie ulteriori applicazioni del metodo delle corrispondenze.

[14] Questa lettera, invocata ripetutamente dal JONQUIÈRES nella sua polemica (anzitutto in nota a pag. 872 del t. **63** dei Comptes rendus etc., ove a proposito della priorità reclamata dallo CHASLES dice »s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet se serait M. CREMONA») fu poi resa pubblica da lui nei *Documents* pag. 14—16.

[15] JONQUIÈRES, *Documents* pag. 16; *Lettre à M. Chasles* p. 11.

[16] CHASLES, *Réponse aux documents* p. 15.

[17] Anche, per esempio, nel passo già citato del *Traité des sections coniques* p. 345 si trova l'osservazione relativa all' esi-

stenza del termine di grado più alto nell' equazione della corrispondenza. Essa però non era nel manoscritto dato nel 1859 al JONQUIÈRES, come questi rileva (*Documents* p. 10; *Lettre* p. 12).

[18] JONQUIÈRES, *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent* (14 nov^e 1865; Journal de mathém. **10**$_2$, 1865, p. 412). — *Deuxième Note sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces* (8 déc. 1865). — *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque* (15 déc. 1865; Giornale di matem. **4**, 1866, p. 45).

[19] Però il nome di CREMONA su quest' argomento non compare publicamente che più tardi: v. la nota [14].

III.

Gli appunti che lo CHASLES faceva al lavoro di JONQUIÈRES del 1861 gli servirono poi di base nelle pagine polemiche del 1866—1867 per rigettare il rimprovero di non averlo citato nel 1864 nelle sue celebri Note intorno ai sistemi di coniche. Ora si può ben dire che in ciò l'illustre scrittore dell' *Aperçu historique* aveva torto.[20] Poichè, ad onta delle inesattezze od imperfezioni che vi si trovano,[21] quel lavoro ebbe indubbiamente una notevole influenza sulla scienza, alla quale dava non solo dei teoremi, ma dei concetti e dei metodi nuovi; e varie proposizioni importanti *sui sistemi di coniche* esposte dallo CHASLES nel 1864[22] non sono che un *perfezionamento* — grazie all' introduzione fatta da CHASLES del *secondo* indice o caratteristica — di cose già date dal JONQUIÈRES *per sistemi d'ordine qualunque* nel 1861.[23] Chè se poi si riguarda alle critiche speciali fatte dallo CHASLES, di esse (dopo qualche esitazione) potè giustamente scagionarsi il JONQUIÈRES (prima ancora che nascesse il litigio, e cioè nelle note di Saïgon) osservando che i numeri incriminati, come il già citato $2(n-1)N$, sono da modificare solo quando si vogliano sottrarre da essi le *soluzioni singolari* che possono comparire e che effettivamente nel determinarli non furono escluse.[24] Ed il JONQUIÈRES diede alcune condizioni sotto cui, almeno per certi sistemi, tali soluzioni singolari non si presentano generalmente.[25]

Queste ultime considerazioni valgono anche per il teorema dato dal BISCHOFF nel 1858,[26] secondo cui il numero delle curve d'ordine n determinate dal passare per dati punti e dal toccare curve date di ordini $m_1, m_2, \ldots$ sarebbe il prodotto $\prod m(m+2n-3)$:[27] teorema che è ridimostrato (come teor. IX)

fra i *Théorèmes généraux* del 1861 di JONQUIÈRES.[28] Quella formola può venir ad esigere riduzioni per l'esistenza di *curve singolari* che soddisfano al problema. Ciò appunto accade, almeno in gran parte dei casi, quando $n = 2$ cioè le curve cercate sono coniche: il che spiega[29] come il numero $6^5 = 7776$ che il BISCHOFF trae dalla sua formola per le coniche tangenti a 5 coniche date sia errato.

Riguardo però a questo numero 6^5 per le coniche tangenti a 5 date è bene ricordare che esso era già stato dato fin dal 1847 dallo STEINER,[30] il quale accennava che il suo procedimento era graduale e consisteva nel determinare anzitutto le coniche (6) passanti per 4 punti e tangenti ad una conica, poi quelle (6^2) per 3 punti e tangenti a 2 coniche, e così via, fino al numero cercato (6^5). Da queste indicazioni appare l'analogia col metodo, pure graduale, usato poi nel 1861 dal JONQUIÈRES per ottenere la formola di BISCHOFF.[31] E può darsi che l'analogia vi fosse pure in ciò: che anche lo STEINER si valesse del principio di corrispondenza [applicandolo probabilmente a corrispondenze $(3, 3), (3 \cdot 6, 3 \cdot 6), \ldots, (3 \cdot 6^4, 3 \cdot 6^4)$ che successivamente si vengono ad avere sulla 1ª, 2ª, . . , 5ª conica introdotta fra i dati], e che appunto nell' uso di questo consistesse quell' »*eine gewisse geometrische Betrachtung*« con cui credeva di aver risolto il problema. — Che lo STEINER in quegli anni fosse già in possesso del metodo di ricerca che deriva dal principio di corrispondenza è reso probabile da parecchie delle cose da lui publicate senza dimostrazioni: e varrebbe la pena di fare un' analisi critica minuta di tutti gli enunciati di lui per approfondire tale questione.[32]

[30] Ed ancora ingiusto fu nel giudicare i *Théorèmes généraux* a pag. 328—331 del *Rapport,* ove il suo scopo sembra rivolto ad annullarne completamente il valore.

[31] Si noti che, mentre lo CHASLES insiste a ritener errate delle cose che in sostanza non son tali, egli non rileva ad es° che nelle dimostrazioni dei teorⁱ V e X si trattano come riduttibili delle corrispondenze le quali invece *non* si spezzano in generale; e, quel che è più, considera quasi come privo d'importanza *perchè evidente* (nel 1866! v. Comptes rendus etc. **63**, p. 818; ecc.) il Lemma di cui qualche volta si valse il JONQUIÈRES secondo cui le curve di una serie d'ordine n e d'indice N possono essere rappresentate da un' equazione ordinaria di grado n i cui coefficienti son funzioni intere e di grado N di un parametro λ! Questa proposi-

zione è evidentemente errata quando la serie non è *razionale*. Come la si possa modificare in tal caso (cioè rappresentando con un' equazione non una curva sola ma un *gruppo* di curve della serie) fu notato nel 1863 dal BATTAGLINI (*Sulle serie di curve d'indice qualunque;* Rendici dell' acc. delle scienze di Napoli, **2**, 1863, p. 149; tradotto in tedesco nell' Archiv der Mathem. und Phys. **41**, 1863, p. 26): ma ancora nelle Note di Saïgon del 1865 il JONQUIÈRES credette di poterla dimostrare; e fu solo nel 1866 che ne riconobbe l'inesattezza. Cfr. nei Nouv. annales de mathém. t. 7_2, 1868, p. 111 la *Réponse à une observation présentée dans le Giornale di matematiche* t. V. (1867) p. 377. L'osservazione che qui è fatta dall' ASCOLI, »*Sopra un teorema di* JONQUIÈRES» mostra l'inesattezza del Lemma suddetto applicandolo alle rette di un inviluppo di classe N (ma esigerebbe a sua volta una lievissima correzione). V. anche intorno alla stessa questione: CAYLEY, *On the curves wich satisfy given conditions,* Philosophical transactions **158**, 1867, p. 75 (ivi e a pag. 124).

[22] Così, nella dichiarazione relativa al JONQUIÈRES della quale faremo cenno tra poco [nota [29]], lo CHASLES intorno all' applicazione del proprio metodo ai problemi di contatto dice: »cette application repose sur une propriété des courbes »d'ordre quelconque (théor. XI) qui n'était point connue». Invece questo teor. XI di CHASLES (Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 300) non era altro che il già citato teor. VII di JONQUIÈRES applicato ad una serie di coniche e reso più preciso col farvi comparire *entrambe* le caratteristiche di questa.

[23] Questo modo di giudicare il lavoro del JONQUIÈRES, specialmente in confronto a quelli posteriori dello CHASLES, si trova già ad es° nella Memoria di CAYLEY testè citata e sul principio di quella di HALPHEN: *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Journ. de l'éc. polyt. **28** (cahier 45), 1878, p. 27).

[24] Il merito di aver messo in piena luce l'influenza delle *soluzioni singolari* spetta, come osservava il JONQUIÈRES, ai lavori di CHASLES del 1864. Però si cfr. anche la nota [29].

[25] Queste condizioni consistono nell' esservi un numero sufficiente (superiore cioè ad un limite assegnato) di punti fissi pei quali debban passare le curve del sistema. V.: la 3ª Nota di Saïgon (*Théorèmes fondamentaux* etc.); quella *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces,* Comptes

Rendus etc. **63**, 1866, p. 793 (contenente un richiamo sulla priorità del lavoro del 1861 nell' introduzione della 1ª caratteristica, richiamo a cui fecero seguito le già citate *Observations* dello CHASLES a pag. 816 che segnano il principio della polemica); il *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m*, etc.; Journal für Mathem. **66**, 1866, p. 289; le *Recherches sur les séries* etc. già citate.

[26] BISCHOFF, *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven;* Journal für Mathem. **56**, 1859, p. 166: v. pag. 171.

[27] Per giungere a ciò il BISCHOFF osserva che in un fascio di curve d'ordine n sono $m(m+2n-3)$ quelle tangenti ad una data curva d'ordine m: sicchè quello sarà pure il grado della condizione di contatto fra due curve di ordini n, m nei coefficienti della prima. Da ciò poi scaturisce quella formola in modo evidente. Ora non è forse senza interesse notare che la detta osservazione relativa al fascio di curve si trovava già fra le *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* dello STEINER (Monatsber. der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1848; Journal für Mathem. **47**, 1854, p. 1).

[28] A questo fine il JONQUIÈRES dal teor. VII già citato deduce (teor. VIII) che le curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una data curva d'ordine m sono $Nm(m+2n-3)$. E poi, gradatamente, con l'applicazione successiva di questa formola a serie definite da punti fissi e da 0, 1, 2, ... curve tangenti date, ottiene quella di BISCHOFF.

[29] Questa spiegazione fu data e sviluppata dal CREMONA in due articoli *Sulla teoria delle coniche*, il primo dei quali, pubblicato nel 1863 (Annali di matem. **5**, p. 330; Giornale di matem. **1**, p. 225), riguarda le coniche determinate da punti e tangenti; il secondo, in data del 21 febbr° 1864, (Giornale di matem. **2**, p. 17) dimostra i teoremi enunciati pochi giorni prima dallo CHASLES (Comptes rendus etc., 1° febbr° 1864) sulle coniche determinate dal toccare curve date; entrambi mostrano nelle riduzioni prodotte dalle coniche singolari »l'origine dell' apparente contraddizione che s'incontra nell' applicare la teoria generale delle curve piane (e particolarmente i teoremi di JONQUIÈRES) alle coniche e il disaccordo fra quei teoremi di CHASLES e la formola di BISCHOFF». (V. anche la traduzione nella *Einleitung* n. 111 bis.)

Il Jonquières nel § XI della Nota del 1861 aveva ben rilevato che quella formola, quando si applica alle coniche determinate da punti e tangenti (in numero > 2), dà un risultato superiore al vero; ma spiegava male il fatto ammettendo che in quei casi delle soluzioni venissero a *coincidere fra loro* (questo apprezzamento ritirò poi nel 1863 nella lettera al Cremona citata [10]).

30 Steiner, *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte*, Journal für Mathem. **37**, 1848, p. 161: v. pag. 189.

31 Cfr. la nota [28]. I procedimenti graduali di questa natura s'incontrano ripetutamente in Geometria: un esempio antico è dato dal teorema di Mac Laurin sui poligoni circoscritti ad un dato e coi vertici su curve date d'ordini qualunque (le quali curve nella dimostrazione s'introducono successivamente al posto di rette che prima si hanno); un esempio recente si ha nel metodo con cui lo Chasles (1864) determina le coniche soddisfacienti a cinque condizioni qualunque.

32 Da una tale analisi risulterebbe probabilmente che nelle sue ricerche di geometria enumerativa lo Steiner si valeva anche di qualche altro strumento che ora si suol adoperare: ad es° del metodo della *conservazione del numero* (secondo la denominazione del sig. Schubert). Così nel citato lavoro del Journ. für Mathem. **37**, a pag. 188 e nella nota a pag. 189 vi è qualche indizio che il grande geometra s'avvicinasse a concepire quel procedimento semplicissimo che consiste nel sostituire alle cinque coniche date altrettante coppie di rette o di punti: procedimento che poi fu adoperato dal suo discepolo Th. Berner a pag. 13—14 della dissertazione: *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berolini 1865).

IV.

I numeri esatti relativi alle coniche tangenti a curve date d'ordini qualunque — ed in particolare il vero numero (3264) di coniche tangenti a cinque coniche date — furono, com' è noto, *publicati* per la prima volta dallo Chasles il 1° Febbr° 1864.[33] Questi cominciava la sua comunicazione coll'osservare che quei numeri non erano ancora stati assegnati esattamente, neppure nei casi più semplici in cui alcune delle curve date sono coniche e le altre rette. Orbene già vari anni prima il Jonquières aveva trovato quegli stessi numeri publicati dallo Chasles e li aveva comunicati a questo con una lettera

datata dal 17 Febbr° 1859. Il metodo che gli aveva servito consisteva nel sostituire, con opportune precauzioni, alle curve date delle curve d'ordine m con $\frac{m(m-1)}{2}$ punti doppi, cioè da gruppi di rette.[34] Anche allora lo CHASLES gli aveva risposto respingendo ripetutamente questo modo di procedere: in conseguenza di ciò,[35] ed anche[36] in causa del disaccordo in cui le sue formole si trovavano con quelle di STEINER e di BISCHOFF, il JONQUIÈRES le abbandonò, mentre esse sarebbero state degnissime di publicazione.[37] Ma quando poi nel 1864 egli lesse la detta comunicazione dello CHASLES e l'asserzione con cui comincia e che abbiamo accennata intorno alla quasi completa novità dei suoi risultati, il JONQUIÈRES scrisse immediatamente allo CHASLES per ricordargli la lettera di cinque anni avanti: e da ciò ebbe origine[38] una nota inserita dallo CHASLES alla fine della comunicazione del 15 Febbr° 1864,[39] nota in cui si fa cenno della citata lettera di JONQUIÈRES.

[33] CHASLES, *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes données d'ordre quelconque, ou satisfaire à diverses autres conditions* (Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 222).

[34] JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* p. 8. — Si trattava dunque del già nominato metodo della *conservazione del numero*, del quale lo stesso JONQUIÈRES fece pure applicazione in altri importanti e ben noti lavori. Per questo lato sembra che nella storia della geometria enumerativa il JONQUIÈRES si possa riguardare come il più prossimo continuatore dell' opera di PONCELET in Francia.

[35] Loc. cit.

[36] Cfr. la nota a p. 315 del *Mémoire* già citato del Journal für Mathem. **66**.

[37] Ciò spiega come basandosi su altri metodi — che potevano allora sembrare più rigorosi, ma che lasciavano entrare le soluzioni singolari — egli desse poi, qualche anno dopo, dei numeri non più esatti (od almeno includenti le soluzioni singolari), come il numero 7776 per le coniche tangenti a cinque date. V. i *Théorèmes généraux* etc.; ed anche i *Théorèmes concernant les courbes géométriques planes* (Nouv. ann. de mathém. **20**, p. 83), pure del 1861; e la nota del 1863 del Journal de mathém. **8** [v. [10]] nella quale pur rettificando in generale la formola di BISCHOFF si conferma però il risultato particolare 7776.

[38] JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* p. 7—8. — Pare anche (ivi p. 9) che da questo momento dati la freddezza dello CHASLES verso il JONQUIÈRES, la quale due anni dopo doveva mutarsi in aperto litigio.

[39] CHASLES, *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions* etc., Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 297. La nota si trova a pag. 308 e si esprime così: »M. DE JONQUIÈRES était parvenu, il y a longtemps, à ces formules de »contact, qu'il m'a communiquées le 17 février 1859. Je »ne m'étais point occupé alors de ces questions, et ma ré»ponse, sans infirmer ni justifier les formules, fut simple»ment qu'elles n'étaient pas démontrées. C'était en effet »par des inductions, soit théoriques, soit pratiques et nu»mériques, que le savant géomètre y était conduit. Plus »tard, à défaut de démonstration, il douta de leur exacti»tude, . . .».

V.

Nel 1866 (Comptes rendus etc. **62** e **63**) i due illustri geometri francesi s'incontrarono di nuovo nelle loro ricerche. Lo CHASLES publicò due note sulle curve unicursali[40] nelle quali, oltre a costruire delle curve siffatte di ogni ordine ed a risolvere mediante il principio di corrispondenza fra i punti di una curva unicursale vari problemi relativi alle coniche aventi diversi contatti con questa curva, accennava alla possibilità di dedurre le proprietà connesse con le curve generali da quelle relative alle curve unicursali, e prometteva dei risultati molto più generali.[41] Ora quel concetto, di sostituire cioè ad una curva qualunque d'ordine m una dotata di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punti doppi, era simile a quello ricordato dianzi di cui si serviva nel 1859 il JONQUIÈRES[42] (cioè un' analoga applicazione del principio della conservazione del numero): sicchè questi, soddisfatto, secondo scrive,[43] di vedere lo CHASLES convertito alle sue antiche idee, si affrettò a riprendere quella via che egli stesso aveva aperta e poi abbandonata, senz' aspettare i risultati ignoti promessi dallo CHASLES. E tosto presentava all' Accademia tre note[44] in cui enunciava il numero delle curve di un sistema qualunque aventi rispettivamente uno, due, od un numero qualunque di contatti di dati ordini con una curva data qualsiasi; e nel *Mémoire sur les contacts multiples* etc. già citato [nota [25]] del Journal für Mathematik **66** (1866) dimostrava completamente ed in generale quella sua importante formola

con due metodi consistenti risp. nel sostituire alla curva data una curva unicursale oppure un gruppo di rette. —

Alla fine della sua 3ª Nota (Comptes rendus t. 63, p. 525) il JONQUIÈRES, rilevando l'utilità delle curve unicursali, e pur accennando alla costruzione di tali curve data poco prima dallo CHASLES [nota [40]], citava un suo lavoro del 1864 [45] in cui si considerano delle curve d'ordine m con un punto $(m-1)$-plo e delle divisioni omografiche su di esse. Come contrapposto a ciò lo CHASLES rilevò [46] che fin dal 1861 [47] egli aveva considerato certe curve unicursali e su esse delle involuzioni di grado qualunque. E quando poco dopo il dissidio tra i due geometri si palesò nelle note polemiche, la questione della priorità nell' uso delle curve unicursali comparve a più riprese; ma anche su ciò, se pur vi fosse luogo a parlare di priorità, le date parlerebbero in favore del JONQUIÈRES, poichè il nominato lavoro del 1864 non era che un estratto di quella Memoria del 1859 (su certe curve sghembe, e sulle trasformazioni geometriche delle figure piane — ora note appunto sotto il nome di JONQUIÈRES) di cui si trova già un cenno a p. 542 del t. **49** (1859) dei Comptes rendus etc., e per la quale lo CHASLES era commissario. — Però, a questo riguardo, come riguardo agli altri argomenti discorsi nella presente noterella, anzi che trarre delle conclusioni di priorità il cui interesse per la scienza è sempre scarso, o dar troppo peso a qualche debolezza ed agli errori di grandi scienziati, è meglio rilevare le nuove conferme di quel fatto che continuamente si presenta nella storia della matematica: che alla conoscenza completa, generale, dell' ente o del risultato esatto si è giunti non in un sol tratto e per opera di un solo, ma per opera alternata o simultanea di vari, passando per più gradi sì di generalità che di rigore!

[40] CHASLES, *Sur les courbes dont les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (Comptes rendus etc. **62**, 1866 [12 mars], p. 579). — *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (ibid. [25 juin], p. 1354).

[41] Ivi, pag. 581: »... Des propriétés qu'on démontre ainsi »(cioè col principio di corrispondenza) pour les courbes »douées du nombre maximum de points doubles, se peuvent »conclure celles des courbes dépourvues de points doubles. »La question est de reconnaître dans chaque cas la modi»fication causée par les points doubles: on remonte ainsi,

»de la propriété trouvée pour une courbe à points doubles, »à l'expression de cette propriété dans une courbe pure. — »Cette théorie paraît donc offrir un élément de démonstration »qui pourra être très-utile». — E a pag. 1364: »... Nous »appliquerons la méthode à d'autres exemples de contacts »multiples, et de contacts d'ordre supérieur, et à diverses »questions d'un genre différent. ... — Nous aurons à dire »aussi comment les théorèmes démontrés par cette méthode »se généralisent et s'appliquent aux courbes de classe et »d'ordre quelconque.»

42 E col quale era pure giunto, ad esempio, per le coniche passanti per 2, 1, 0 punti e tangenti ad una data curva in 3, 4, 5 punti, ai numeri enunciati nella Nota *Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque* (Nouv. ann. des mathém. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 218).

43 *Lettre à M. Chasles* p. 8—9.

44 JONQUIÈRES, *Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre n avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont en outre* etc. (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [3 sept^e], p. 423). — Idem, *deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n'* (ibid. [17 sept^e], p. 485). — Idem, *autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra* (ibid. [24 sept^e], p. 522).

45 JONQUIÈRES, *De la transformation géométrique des figures planes* etc. Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 97.

46 CHASLES, *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement* (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [22 octobre], p. 670); le quali fanno seguito ad una Nota del CAYLEY (ibid. p. 666) destinata a dimostrare le due prime formole di JONQUIÈRES.

47 CHASLES, *Description des courbes à double courbure de tous les ordres sur les surfaces réglées du 3^e et du 4^e ordre* (Comptes rendus etc. **53**, 1861, p. 884).

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

Je n'ai point l'intention d'écrire une biographie scientifique, ni une analyse des travaux de HOËNÉ-WRONSKI.[1] En effet, mon but est plus modeste: je ne veux que rappeler l'attention sur quelques-unes de ses idées et de ses méthodes souvent ignorées, en jetant un coup d'oeil rapide sur leurs rapports avec celles indiquées par d'autres mathématiciens.

WRONSKI a exposé ses idées dans des nombreux ouvrages, fruit de son esprit puissant et de son activité scientifique extraordinaire dans presque tous les domaines du savoir humain. Les ouvrages imprimés sont devenus très rares, ses manuscrits sont restés inexplorés jusqu'à ce jour.[2] Pour cette raison, l'éminent penseur et savant est resté longtemps ignoré, bien que les travaux de MONTFERRIER,[3] de HANEGRAEFF, de VILLARCEAU, de CH. LAGRANGE et de WEST[4] contiennent l'exposition de plusieurs méthodes proposées par lui.

Voici les ouvrages où WRONSKI a présenté ses vues philosophiques et ses principales méthodes en mathématiques.

1. Introduction à la philosophie des mathématiques (1811).
2. Résolution générale des équations, dédiée à la Pologne (1812).
3. Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de LAGRANGE (1812).
4. Philosophie de l'infini (1814).
5. Philosophie de la Technie algorithmique. 1re Section, contenant la loi suprême des mathématiques (1815).
6. Philosophie de la Technie algorithmique. 2e Section, contenant les lois des séries comme préparation à la Réforme des mathématiques (1816, 1817).
7. Critique de la Théorie des fonctions génératrices de LAPLACE contenant, pour le cas fondamental, l'intégration générale des équations aux différences et aux différentielles totales et partielles de tous les ordres (1819).
8. Introduction to a course of mathematics (1821).[5]
9. Canons de logarithmes avec un supplément donnant la résolution générale de l'équation du cinquième degré (1827).[6]
10. Loi téléologique du hasard comme base de la réforme du calcul des probabilités.[7]

11. Réforme des mathématiques, formant le Tome I de la »Réforme du savoir humain» (1847).
12. Résolution générale et définitive des équations algébriques de tous les degrés, formant le Tome III de la »Réforme du savoir humain» (1848).

1. Sommes combinatoires. Fonctions "schins".

Aux sommes combinatoires ou aux fonctions »schins» appartient une place dans l'histoire des déterminants.[8] Wronski les a employées déjà avant Cauchy[9] dans le mémoire: *Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie algorithmique* présenté en 1810 à l'Institut de France. Ce mémoire ne fut pas publié, mais dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques* publiée deux ans après, Wronski a consacré quelques pages à la définition des sommes combinatoires. Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots$, dit il, plusieurs fonctions d'une quantité variable. Nommons somme combinatoire et désignons par la lettre hébraique *sin* de la manière que voici

$$\text{ש}\,[\Delta^a X_1 \,.\, \Delta^b X_2 \,.\, \Delta^c X_3 \ldots \Delta^p X_\omega]$$

la somme des produits des différences de ces fonctions composées de la manière suivante: Formez avec les exposants $a, b, c, \ldots, p$ des différences dont il est question toutes les permutations possibles, attribuez ces exposants dans chaque ordre de leurs permutations aux différences consécutives qui composent le produit $\Delta X_1 \,.\, \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega$, donnez de plus aux produits séparés, formés de cette manière, le signe positif lorsque le nombre des variations des exposants a, b, c, etc. considerés dans leur ordre alphabétique est nul ou pair, et le signe négatif lorsque ce nombre de variations est impair; enfin prenez la somme de tous ces produits séparés. Vous aurez ainsi par exemple

$$\begin{aligned}
\text{ש}\,[\Delta^a X_1] &= \Delta^a X_1 \\
\text{ש}\,[\Delta^a X_1\, \Delta^b X_2] &= \Delta^a X_1\, \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1\, \Delta^a X_2 \\
\text{ש}\,[\Delta^a X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^c X_3] &= \Delta^a X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^c X_3 - \Delta^a X_1\, \Delta^c X_2\, \Delta^b X_3 \\
&\quad + \Delta^b X_1\, \Delta^c X_2\, \Delta^a X_3 - \Delta^b X_1\, \Delta^a X_2\, \Delta^c X_3 \\
&\quad + \Delta^c X_1\, \Delta^a X_2\, \Delta^b X_3 - \Delta^c X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^a X_3 .
\end{aligned}$$

Wronski ajoute lui-même que la formation de ces sommes combinatoires est analogue à celle de valeurs inconnues données

par les équations linéaires du premier ordre et qu'elles peuvent être exprimées de différentes manières, entre autres, suivant les procédés indiqués par LAPLACE dans son *Mémoire sur le calcul intégral et sur le système de monde* (Mémoires de l'académie des sciences de Paris 1772).

Dans la *Technie algorithmique* (I, p. 167 et suiv.) WRONSKI donne des formules récurrentes pour la formation des fonctions »schins».

Le concept des sommes combinatoires de WRONSKI n'était pas donc tout à fait nouveau, mais l'idée d'y introduire les différences ou les différentielles des fonctions et d'appliquer cet algorithme à la théorie du développement des fonctions lui appartient sans doute. Dans nos temps CHRISTOFFEL, FROBENIUS et PASCH ont introduit dans l'analyse le même algorithme.[11]

MUIR a proposé pour les fonctions »schins» la dénomination »wronskiens», qui semble être acceptée par les mathématiciens.[12]

En prenant pour la forme générale des séries

$$Fx = A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^{2/\xi} + A_3 \varphi x^{3/\xi} + \ldots$$

où ξ est un accroissement arbitraire et φx, $\varphi x^{2/\xi}$, $\varphi x^{3/\xi}$, ... sont les facultés successives, WRONSKI (*Réfutation* etc. p. 157) exprime le coefficient A_μ du développement par la formule

$$A_\mu = \frac{\mathfrak{W}[\Delta^a \varphi x\, \Delta^b \varphi x^{2/\xi}\, \Delta^c \varphi x^{3/\xi} \ldots \Delta^l \varphi x^{\mu-1/\xi}\, \Delta^m Fx]}{\mathfrak{W}[\Delta^a \varphi x\, \Delta^b \varphi x^{2/\xi}\, \Delta^c \varphi x^{3/\xi} \ldots \Delta^l \varphi x^{\mu-1/\xi}\, \Delta^m \varphi x^{\mu/\xi}]}$$

en ayant soin d'égaler à ξ l'accroissement dont dépendent les différences Δ et en donnant aux exposants $a, b, c, \ldots$ de ces différences les valeurs $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, ..., $l = \mu - 1$, $m = \mu$ et à la variable x une valeur telle que $\varphi x = 0$. Les différences peuvent être remplacées par des différentielles.

Ce développement général est cependant un cas particulier d'un développement que WRONSKI nomme »loi algorithmique absolue» ou »loi suprême». Les coefficients du développement donnés par la loi suprême, s'expriment aussi par les fonctions »schins». Nous parlerons plus tard de cette loi et des méthodes basées sur elle.

Voici les formules données par WRONSKI pour la résolution d'un système infini d'équations linéaires (*Critique de la théorie des fonctions génératrices*, p. 128, 129, *Réformé du savoir* I, p. 317 et suiv.).

Soit donné le système suivant d'équations linéaires

$$M_0 = X_0 + X_1 A(1)_1 + X_2 A(2)_2 + X_3 A(3)_3 + \dots$$
$$M_1 = X_1 + X_2 A(2)_1 + X_3 A(3)_2 + X_4 A(4)_3 + \dots$$
$$M_2 = X_2 + X_3 A(3)_1 + X_4 A(4)_2 + X_5 A(5)_3 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où $X_0, X_1, X_2, \dots$ constituent un nombre infini d'inconnues et les quantités dénotées par M et A sont des quantités connues ou données. Formant avec les dernières de ces quantités le nouveau système de quantités:

$$B(\mu)_1 = -A(\mu+1)_1$$
$$B(\mu)_2 = -A(\mu+2)_2 - A(\mu+2)_1 B(\mu)_1$$
$$B(\mu)_3 = -A(\mu+3)_3 - A(\mu+3)_2 B(\mu)_1 - A(\mu+3)_1 B(\mu)_2$$

et généralement

$$B(\mu)_\rho = -A(\mu+\rho)_\rho - A(\mu+\rho)_{\rho-1} B(\mu)_1 - \dots - A(\mu+\rho)_1 B(\mu)_{\rho-1},$$

nous aurons pour la résolution du système les expressions:

$$X_0 = M_0 + M_1 B(0)_1 + M_2 B(0)_2 + M_3 B(0)_3 + \dots$$
$$X_1 = M_1 + M_2 B(1)_1 + M_3 B(1)_2 + M_4 B(1)_3 + \dots$$
$$X_2 = M_2 + M_3 B(2)_1 + M_4 B(2)_2 + M_5 B(2)_3 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Autant que nous sachions, c'est seulement en 1869 que Koetteritsch[12] a traité le même problème, en étudiant aussi les conditions de sa possibilité.

[1] Wronski, né le 24 août 1778, est mort le 9 août 1853. On trouve son autobiographie dans la *Réforme du savoir humain,* III (reproduite dans la nouvelle réimpression de la *Loi téléologique du hasard* par Charles Henry, Paris 1890).

[2] Les manuscrits de Wronski sont déposés à la Bibliothèque de Kórnik (près de Posen) et sont la propriété du comte W. Zamoyski, l'heritier du comte Dzialynski. Une bibliographie complète des ouvrages publiés et des manuscrits de Wronski est en préparation par l'auteur de cette notice. Elle sera publiée par l'Académie des sciences de Cracovie et devra servir de base pour l'édition critique des écrits mathématiques de Hoëné-Wronski, proposée par cette académie.

[3] A. S. de Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques* (Paris 1834—1840). — *Dizionario delle scienze mate-*

matiche. Prima versione italiana di D. G. GASBARDI *e* G. FRANÇOIS, I—VIII. (Firenze 1838—1847). — *Encyclopédie mathématique,* I—IV. (Paris 1856—1859).

[4] E. WEST, *Exposé des méthodes générales en mathématiques d'après* HOËNÉ-WRONSKI (Paris 1886).

[5] Ce petit ouvrage a été traduit en polonais par M. L. NIEDŹWIECKI (Paris 1881).

[6] Il y en a une édition russe par ANNENKOW (S:t Pétersbourg 1845) et une édition polonaise par l'auteur de cette notice (Varsovie 1890).

[7] Réimprimé par CHARLES HENRY (Paris 1890).

[8] Voir MUIR, *The theory of determinants in the historical order of its development.* I. (London 1890), p. 78, 175.

[9] CAUCHY, *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales etc.* Journ. de l'éc. polytechn., cah. 17, 1815, 29—112.

[10] CHRISTOFFEL, *Über die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.* Journal für Mathem. **55**, 1858, 281—299. — FROBENIUS, *Über die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln.* Journal für Mathem. **77**, 1874, 245—257. — PASCH, *Note über die Determinanten, welche aus Functionen und deren Differentialen gebildet werden.* Journal für Mathem. **80**, 1875, 177—182.

[11] MUIR, *A treatise on the theory of determinants* (London 1882) p. 224—227, 280—284. — Voir aussi MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* (Gand 1887).

[12] KÖTTERITSCH, *Über die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen.* Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 1—15, 229—268. — Voir aussi POINCARÉ, *Sur les déterminants d'ordre infini.* Bullet. de la société mathém. de France **14**, 1886, 77—90.

Die arabischen Bearbeiter des Almagest.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Die nachfolgende Zusammenstellung bildet einen Nachtrag zu meiner Preisschrift über die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen. Das dort gegebene Thema gestattete mir nicht, auf die kurz erwähnten Commentatoren näher einzugehen. Ich habe mich aber auch hier auf den besonderen Gegenstand beschränkt und für die Autoren nur kurze Quellennachweisungen gegeben, und habe die alphabetische Reihenfolge gewählt, weil eine chronologische nur dann einen wissenschaftlichen Wert hätte, wenn sie zugleich mit einer Entwicklung des Stoffes selbst verbunden wäre, die nur ein Fachmann bieten kann. Das Wort *Almagest*, bekanntlich ein arabisches für die »megiste Syntaxis«, ist in Europa als Bezeichnung für dieses Werk des PTOLEMAEUS üblich geworden; die Araber bezeichnen damit manches Lehrbuch der Astronomie, weil die Anordnung des Stoffes nach dem Muster des PTOLEMAEUS typisch geworden war. Man darf sich nicht wundern, dass von den arabischen Commentaren so wenig in unseren Bibliotheken zu finden ist; einerseits wurden solche Schriften durch selbständige Arbeiten antiquirt, andererseits hatten europäische Orientalisten für diese Gattung von Literatur weniger Interesse. — Den neuen grossen Catalog des Khedive habe ich noch nicht durchsehen können.

1. AHMED BEN MUHAMMED, »der Astronom«, zur Zeit des Khalifen MAAMUN, verfasste eine Einleitung in die Wissenschaft der Astronomie (*'Hi'a*) in 30 Kapiteln, welche das Werk [den *Almagest*] des PTOLOMAEUS in klarer Darstellung umfasst, also eine Art Paraphrase. Offenbar ist identisch AHMED BEN MUHAMMED »der Rechner« (*al-'Hasib*), Verfasser einer Einleitung in die Wissenschaft der Gestirne (*Nudjum*) bei NADIM, *Fihrist*, editio FLÜGEL, S. 282; s. Zeitschrift für Mathematik **10**, 1866, 481, wo ich dieses Werk zu jenem heranzog, aber ohne Grund; das dort besprochene, hebräisch übersetzte Werk hat sich als GEMINUS erwiesen.

2. AHMED B. MUHAMMED AL-SAVRI (oder *Surri?*)[1] NADJM AL-DIN ABU'L-FUTÛ'H, genannt IBN AL-'SALÂ'H, Philosoph, Mathematiker und Arzt, aus Hamadan, gestorben in Damascus »nach 540 H.« (nach 1145) ist erst aus disjectis membris zu würdigen; die einzelnen Angaben über ihn sind mangelhaft oder incorrect.

Eine kurze Notiz aus KIFTI's biographischem Lexikon (Ms.; Auszüge bei CASIRI, *Bibliotheca arabico-hispanica*), giebt von HAMMER, *Literaturgeschichte der Araber* VII, 507 mit Entstellung des Namen Surri. Ein längerer Artikel bei IBN ABI OSEIBIA, *Geschichte der Ärzte*, ed. A. MÜLLER, II, 164 ist im Catal. des Brit. Mus. p. 594[b] ohne den Namen Surri angegeben und daher im Index getrennt von IBN AL-'SALI'H; LECLERC, *Histoire de la médecine arabe* (II, 47) hat 3 Zeilen daraus excerpirt. Im Catalog der Leydener arab. Handschr. ist die Identität von AHMED in 2 mss. erst in tom. V, 235 zu n. 1005 erkannt, und in einer Note (III, 59) wird er durch eine falsche Conjectur in ein früheres Jahrhundert hinaufgerückt; er fehlt gänzlich unter den Erklärern des *Almagest* bei WENRICH (*de auctor. graec. vers.* p. 235). Vergl. auch den Index in NICOLL und PUSEY's Catal. p. 668. Er copirte das Leydener ms. 1040 (s. meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern*, S. 99). In der von IBN ABI OSEIBIA mitgeteilten langen Ka'sida (Tendenzgedicht) bemerkt OSEIBIA die Anwendung vieler technischen Ausdrücke; auch EUKLID ist da (S. 166, Zeile 5) neben anderen Gelehrten erwähnt.

Von seiner Schriften gehören hierher: »Über die Irrtümer in den Tabellen des VII. und VIII. Buches des *Almagest*»; ms. Bodleiana bei URI p. 204, n. 940.

3. AVERROËS, der bekannte Philosoph verfasste ein astronomisches Compendium, welches sein Sohn, in einem Verzeichniss der Schriften des Vaters,[2] als »Compendium des *Almagest*» bezeichnet. Das arabische Original ist verloren, scheint auch niemals lateinisch übersetzt zu sein, so dass WENRICH l. c. p. 235 es nicht erwähnt. Dieses Werk wurde von JAKOB ANATOLI (1213) ins Hebräische übersetzt. Ich zähle in meinem, unter der Presse befindlichen Werke (S. 347) ungefähr ein Dutzend Handschriften dieser Übersetzung auf, darunter eine in der hiesigen K. Bibliothek (1879 auf meine Empfehlung gekauft). Eine kurze Analyse habe ich l. c. gegeben; am Schlusse findet sich eine Hinweisung auf PTOLEMAEUS als denjenigen, welcher die Themata behandelt hat. Jüdische Astronomen des Mittelalters kennten dieses Werk, dessen wissenschaftlichen Wert nur ein Fachman beurteilen könnte. — Ein Fragment des Originals enthält vielleicht ms. Paris 2458[6].

4. AVICENNA (IBN SINA), der berühmte Arzt, Verfasser des Kanon, erzählt uns selbst,[3] dass sein Lehrer AL-NATILI (so muss es heissen) ihn bei den geometrischen Figuren des *Almagest* in Stich gelassen und auf Autodidaxis hingewiesen habe. AVICENNA

[redacted]

unterrichtete seinen Biographen Djuzdjani 8 Jahre in der Sternbeobachtung mit besonderer Rücksicht auf die Angaben des Ptolemaeus (ibn abi Oseibia, l. c. II, 8 Mitte). Er hat ein Compendium des *Almagest* verfasst, welches er in seiner grossen Encyclopädie aufnahm. Darin fügte er 10 Figuren über Optik hinzu,[4] und am Ende Einiges über Sternkunde, was sein Biograph für unübertrefflich hält. Von jener grossen Encyclopädia sind Teile erhalten, welche die Auszüge aus Ptolemaeus enthalten;[5] ein Arabist in Oxford könnte ermitteln, was Avicenna darin geleistet habe.

5. Biruni, abu'l Rei'han (Ri'han), Arzt und Astronom, wahrscheinlich erst um 1050 gestorben, ist in neuester Zeit durch seine Chronologie und sein Werk über Indien, beide in Original herausgegeben, ersteres auch deutsch, letzteres englisch übersetzt von Ed. Sachau, weiteren Kreisen zugänglich. Die Namensform Alberuni ist durch die heutige Aussprache nicht wissenschaftlich gerechtfertigt. Sachau führt in der Einleitung zum Texte der Chronologie (Leipzig 1878, p. XLIX) verschiedene Schriften Biruni's auf, welche nur bei Hagi Khalfa, Lexikon, ed. Flügel erwähnt seien (s. den Index VII, 1198 n. 7420), darunter (V, 386) einen Auszug aus dem *Almagest,* ohne auf die Quelle zurückzugehen, was auch Wenrich l. c. p. 235 nicht gethan; in Wüstenfeld's *Gesch. der arab. Aerzte,* S. 76 n. 19 ist die Quelle nicht ibn abi Oseibia [II, 21 der Ausgabe], da dieser das Compendium nicht erwähnt. In der That hat Kifti, l. c. im Artikel Ptolemaeus eine Notiz, welche bei Casiri (*Bibliotheca arabico-hisp.* I, 348) gekürzt ist; es fehlen nach dem Worte »Sebecteghin» die Worte »und er machte es darin in der Weise des Ptolemaeus», die sich wohl auf den »Kanon Mas'udi» beziehen. Es frägt sich nun, ob nicht dieses Werk den Auszug des *Almagest* repräsentiren, resp. einen solchen enthalten soll; vergl. unten n. 7 und 13.

6. al-Farabi (vulgo Alpharabius, gestorben 950), einer der berühmtesten Philosophen unter den Arabern, dessen Erläuterungen zu allgemeineren Teilen des Euklid sich noch erhalten haben, verfasste einen Commentar über den *Almagest,* wie Kifti, l. c., und ibn abi Oseibia, l. c. II, 138, berichten; mehr habe ich in meiner Abhandlung über ihn (Petersb. 1869; Mém. de l'Acad. Imp. t. XIII n. 4 p. 78 n. 14) nicht zu berichten gewusst, und weiss es auch heute nicht.

7. al-Fergani (vulgo Alfragan, gestorben 833 oder 844) verfasste ein Compendium der Astronomie, vielleicht ohne eigentlichen Titel, daher verschiedentlich überschrieben. Das Buch

gehört zu den ersten, häufig auch ohne Angabe benutzten Quellen des Mittelalters. Wir besitzen das Original, 3 lateinische Übersetzungen und eine unedirte hebräische, in welcher es heisst, das Buch, gewöhnlich nach dem Verfasser benannt, sei eine Art von Compendium des *Almagest*. NADIM, *Fihrist* p. 279 nennt es: »Buch der Kapitel, eine Auswahl aus dem *Almagest*«; daraus hat man 2 Titel gemacht, so dass WENRICH l. c. p. 235 die 2. Hälfte allein angiebt. S. auch unten n. 13.

8. AL-HAZIMI, ABU ABD ALLAH MUHAMMED BEN AHMED AL-SAÎDI, über welchen uns die bekannten Quellen im Stich lassen, verfasste ein Compendium (*Mukhta'sar*) des *Almagest*, welches die Bodleiana besitzt und 20 Blätter umfasst. URI p. 200 n. 920 sagt nicht Näheres darüber; WENRICH giebt nicht einmal den vollständigen Namen. Im *Catalogus Mss. Angliae* ist »Hasenii« angegeben und daher bei WOLF, *Bibl. Hebr.* I, p. 969.

9. IBN HEITHAM, AL-HASAN (gestorben 1038), bekannt als Astronom und Optiker unter dem Namen ALHAZEN, ist in neuester Zeit vielfach besprochen.[6] Er soll zu seinem Unterhalt alle Jahr die Elemente des EUKLID, die sogenannten mittleren Bücher (meist identisch mit denen des sogenannten »kleinen Astronomen«) und den *Almagest* abgeschrieben und verkauft haben.[7] Ich zähle hier seine auf den *Almagest* bezüglichen Schriften auf, wie sie in der grossen Liste des IBN ABI OSEIBIA, l. c., vorkommen.[8]

Pag. 93 (WÖPCKE, p. 93 n. 3; LECLERC, l. c. I, 514): Commentar und Auszug des *Almagest* (ein Werk) in demonstrativer Methode, worin jedoch nur Unbedeutendes ausgerechnet ist; der Verfasser nahm sich eine ausführliche Bearbeitung vor, worin die kürzere erweitert, nach Zahlen und Rechnungen ausgeführt werden sollte.

Pag. 97 (fehlt bei WÖPCKE, p. 74; LECLERC, l. c. p. 518: »Extrait«): *Istikhradj* aus dem practischen Teil des *Almagest*. Der Ausdruck für einen einfachen Auszug ist gewöhnlich, wie im obigen Werke: Ikhti'sar; ob hier etwas Anderes anzunehmen sei, lasse ich dahingestellt.

Pag. 98 (WÖPCKE, p. 75 n. 64, LECLERC, l. c. p. 520 l. 1: »Solution des difficultés«): über die Zweifel, PTOLEMAEUS betreffend. KIFTI, l. c. hat 2 Titel: »Zweifel PTOLEMAEUS betreffend«, und »Lösung der Zweifel« etc., daher WENRICH l. c. p. 236 (nach CASIRI) 2 Werke annimmt, was höchst unwahrscheinlich; es ist vielmehr an eine Variante zu denken.

Ausserdem führt WENRICH l. c. p. 230 eine Schrift: *de motu sphaerae secundum* PTOLEMAEUM an, nach dem alten Ley-

[redacted]

dener Catalog n. 1096; der neue (III, 94 n. 1064, fehlt im Index VI, 100) giebt dafür: *de circulis in circino astronomico construendis* und identificirt damit n. 23 p. 74 bei Wöpcke »sur le compas des cercles» (nach Oseibia p. 97 l. z. zu berichtigen). Wöpcke selbst p. 76 n. 77 identificirt das Leydener ms. 1096 mit einem andern, unrichtig emendirten Titel, auf welchen hier nicht weiter einzugehen ist, da bereits Wiedemann den Originaltitel gerechtfertigt hat.

10. Ibrahim, Abu Is'hak ben Sinân ben Thabit, Enkel des Thabit (unten n. 21), war Arzt in Bagdad, wo er an »tumor» in der Leber, an einem Sonntag, Mitte des Muharram 335 H. (Mitte August 946) starb; er war geboren im J. 296 H. (908/9). Diese genauen Daten verdanken wir einer jüngeren Redaction von Oseibia (II, 236); sie sind in den bekannten Quellen nicht zu finden;[9] doch wusste man, dass er jung gestorben, und schon zu 16/17 Jahren als Schriftsteller aufgetreten sei. Er verfasste eine Schrift über die Ziele, oder Zwecke (*Igradh*) des Ptolemaeus, das heisst wohl über die Grundideen.[10] Diesen Titel giebt Nadim im *Fihrist*. Einen andern bietet Kifti's Biographisches Lexikon: »Über das, was Ptolemaeus angewendet, um auf leichtem Wege die Abweichungen von Saturn, Mars und Jupiter herauszubringen», eine Monographie, welche er im 24. Lebensjahre verfasste. Er bemerkte: wenn er eine andere Methode eingeschlagen hätte, so hätte er die angewendete Erleichterung entbehren können; er befolgte darin nicht den Weg des Syllogismus (der Analogie?; das arabische Wort bedeutet beides).[11]

11. Kadizadeh (d. h. Sohn des Kadi) Rumi, Hasan Tschelebi 'Sala'h al-(Milla wa'l-) Din Musa ben Muhammed b. Mahmud — danach zu unterscheiden von mehreren anderen Gelehrten des Namens Kadizadeh, verfasste 2 Schriften im J. 1412, welches irrtümlich als Todesjahr angegeben worden;[12] sein Sohn Mirem Tschelebi starb 1524. Hasan verfasste Glossen zu dem Werke des Nitsam al-Din etc. (unten n. 17), woraus Hagi Khalfa, l. c. V, 386 n. 11413 eine Notiz über die Übersetzungen des *Almagest* mitteilt. Wenrich hat den ganzen Passus übersehen oder im ms. nicht vorgefunden.

12. Al-Kindi (vulgo: Alchindus, gestorben 873), der bekannte Polyhistor, dessen Bibliographie G. Flügel in einer kleinen Monographie herausgegeben hat (Leipzig 1857), verfasste 2 Schriften, welche bei Nadim, l. c. S. 256 u. 258, bei Oseibia, l. c. S. 210, 211, bei Flügel arabisch S. 38, 43 n. 29 u. 123 (deutsch S. 22, 37) wörtlich etwa so lauten:

1. Abhandlung zur Erläuterung der Rede des PTOLEMAEUS am Anfang seines *Almagest* aus der Rede des ARISTOTELES in den *Analytica* (FLÜGEL lässt PTOLEMAEUS einen Ausspruch über ARISTOTELES machen). WENRICH übergeht diese Schrift.

2. Abhandlung über die Sphärenconstruction des PTOLEMAEUS — ohne Zweifel ist der *Almagest* gemeint. — Das arabische ms. Paris 1157 (2544, 9 f. 45—56, bei SLANE p. 455) enthält eine Erklärung der Stelle zu Anf. von *Almagest* VI, welche die *arabischen Übersetzer* schlecht wiedergegeben, zugleich eine genaue Beschreibung der dort behandelten *Armillarsphaere*.

13. [KUSCHJAR BEN LABBAN etc., der 968 astronomische Tabellen verfasste, wird von FLÜGEL in seiner Dissert. über die Interpreten und von WENRICH, l. c. p. 235 als Commentator des *Almagest* bezeichnet, weil sie nur die ungenaue Übersetzung CASIRI's (I, 348) zu Rathe zogen, nicht den beigedruckten Text KIFTI's, wonach KUSCHJAR *in* jenen Tafeln Auszuge machte, vergl. oben n. 5 und 7. — Er ist wohl der »Djili« in ms. Paris 2595].

14. AL-MASI'HI (der Christ), ABU SAHL ISA BEN JA'HJA AL DJORDJANI, Arzt, und in Gunst der Herrscher in Khorasan (starb 40 Jahre alt im J. 1000), — s. über ihn meine Schrift über ALFARABI p. 64, SACHAU zu ALBERUNI, Chronologie (arab.) p. XXXII — verfasste ein Compendium des *Almagest;* OSEIBIA, l. c. II, 328, WÜSTENFELD, l. c. § 118 S. 60; LECLERC, l. c. I, 357; WENRICH, l. c. p. 303. — Ist er etwa der bisher nicht dechiffrirte IBN SAHL, Verfasser von 4 Kapiteln zur Einleitung in den *Almagest,* hebräisch übersetzt in ms. Paris 1018?

15. AL-NATILI, Lehrer des AVICENNA, s. unter diesem, n. 4.

16. AL-NEIRIZI, FADHL BEN HATHIM (um 900; s. Biblioth. Mathem. 1892, 8) verfasste einen Commentar über den *Almagest,* nach KIFTI, bei CASIRI, l. c. I, 348 und wohl daher HAGI KHALFA, l. c. V, 386; WENRICH, l. c. p. 234; er nennt auch p. 227 NEIRIZI als Übersetzer aus dem Arabischen aus Missverständnis. Die falsche Lesart »Tebrizi« hat noch der neueste Catalog der Pariser Handschr. n. 2464, 7.

17. NITSAM (oder NIZAM) AL-DIN HASAN B. MUHAMMED NISCHABURI AL-KUMMI, auch der »Hinkende« (*al-A'aradj*) genannt, beendete am 6. Scha'aban 704 (4 Marz 1305) einen Commentar zu TUSI's (n. 22) Redaction des PTOLEMAEUS; ms. des Brit. Mus. 392 (p. 187). Dazu schrieb KADIZADEH (n. 11) Glossen. Im J. 1311 verfasste »AL-HASAN IBN MUHAMMED, genannt NITSAM« einen Commentar über ein astronomisches Werk desselben TUSI; die Identität dieses Commentators mit

dem unseren liegt auf der Hand. Vergl. über ihn Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **25**, 1871, 396. — Fehlt bei WENRICH.

18. IBN RIDHWAN, ALI (gestorben 1068), ein bekannter Arzt in Aegypten, dessen Commentar zum *Quadripartitum* unter dem Namen *Rodoam* (sonst auch *Aben Rudian* etc. geschrieben) lateinisch gedruckt ist (Biblioth. Mathem. 1891, 41), zählt selbst unter den Schriften, die er in Auszug brachte, den *Almagest* und das *Quadripartitum;* ersteren wollte er auch commentiren. (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 100, 101, ungenau WÜSTENFELD, l. c. S. 42 unten; fehlt bei WENRICH, l. c. p. 235.)

19. SAMARKANDI, SCHAMS AL-DIN MUHAMMED etc. (gestorben um 1203/4) commentirte den *Almagest* wahrscheinlich in der Redaction des TUSI (n. 22, HAGI KHALFA, l. c. V, 386). Über ihn s. meine *Lettere a Don B. Boncompagni* p. 86, 92; *Euklid bei den Arabern* S. 95, und über ms. Leyd. 1169[4] H. USENER, *Ad historiam astronomiae symbolae* (Bonnae 1876, Progr.) p. 15, 19, 21. — Fehlt bei WENRICH, l. c. p. 235.

20. IBN ABI SCHUKR MU'HJI AL-DIN (oder AL-MILLA, oder AL-DUNJA) JA'HJA B. MUHAMMED etc. AL-MAGRABI AL-ANDALUSI (um 1265), ein fruchtbarer Schriftsteller, der unter Anderem die Schriften griechischer Autoren, wie EUKLID, APOLLONIUS, MENELAUS, THEODOSIUS bearbeitete,[13] verfasste einen Auszug aus dem *Almagest*, welchen er *al-Khala'sa* (Auszug) nannte, wie er selbst berichtet, nämlich in einem Werke, welches er, in derselben Methode, über die Bewegung der Wandelsterne verfasste, und dem Wezir ABU HASAN ALI B. MUHAMMED BEN AL-HASAN AL TUSI widmete (ms. Leyden 901, Catal. III, p. 111, cf. V, 243). HAGI KHALFA, l. c. V, 387, 389 giebt an, dass die Bearbeitung des *Almagest* 10 Tractate zählte, Zusätze enthaltend und für den bekannten Christen ABU L-FARADJ GREGORIUS (*Barhebraeus*) verfasst sei. Die Worte: »Epitomen potiora continentem» in FLÜGEL's Übersetzung (p. 389 lin. 2) entsprechen dem einen arabischen Worte: *Mulakhkha's* (Extract). WENRICH, l. c. p. 34, nennt den Verf. ungenau *Muhjieddin ben Ja'hja*, nach dem alten Pariser Catalog n. 1108, wo aber die Redaction des TUSI nach dem neuen Catalog n. 2485, mit einer falschen Inschrift, welche MUSA B. SCHAKIR zum Verf. macht.

SURRI, s. oben AHMED BEN MUHAMMED.

21. THÂBIT BEN KURRA (oder KORRA, vulgo THEBIT, gestorben 901), von welchem verschiedene kleine Schriften in lateinischer Übersetzung erhalten sind (s. Biblioth. Mathem. 1891, 68), verfasste verschiedene, den *Almagest* betreffende

Schriften, deren Titel hier zum erstenmale vollständig nach OSEIBIA gegeben wird.

Pag. 18: *Tashil* (Erleichterung) des *Almagest; Madkhal* (Einleitung) in den *Almagest;* ein grosses Werk zur Erleichterung des *Almagest,* welches er unvollendet lies; es ist die vorzüglichste seiner Schriften darüber. Diese 3 Werke fasst KIFTI zusammen, aber CASIRI l. c. p. 387 übersetzt zweideutig: »Expositio libris III comprehensa», daher auch CHWOLSOHN (*Ssabier* I, 561): »in 3 Büchern, wovon das letztere» (vielmehr: eines) »unvollendet blieb». WENRICH, l. c. p. 235 begnügt sich mit einem blossen Citat. Ein Excerpt wahrscheinlich aus n. 1 in hebräischen Lettern ist kürzlich vom Brit. Mus. erworben (s. NEUBAUER's Notiz in Jewish quarterly review **3**, 1890, p. 621). Sonst ist mir keine Spur bekannt.

P. 219: über die Figuren (Propositionen) des *Almagest.*

P. 220: Antwort [auf eine Anfrage?] über die Ursache der Differenzen zwischen den Tafeln des PTOLEMAEUS und den »erprobten» (*almumta'han*); über letzteres s. meine Notiz in Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **24**, 1870, 375 A 52 (**25**, 1871, 419); cf. *Fihrist,* 275 (II, 130), 149. THABIT hat übrigens auch die arabische Übersetzung revidirt oder corrigirt.

22. TUSI, NA'SIR AL-DIN ABU DJA'AFAR MUHAMMED BEN MUHAMMED BEN AL-HASAN (gest. 1273) gehört zu den fruchtbarsten arabischen Mathematikern, wie man schon aus dem Index zu HAGI KHALFA, l. c. VII, 1186 n. 6800 ersehen kann; eine kritische Bibliographie seiner Schriften ist mir nicht bekannt, und es kann hier kein Anlauf dazu gemacht werden. TUSI redigirte unter Anderem auch die griechischen Mathematiker, welche in früheren Jahrhunderten ins Arabische übersetzt worden waren (WENRICH, l. c. XXXV); seine Redaction (*Ta'hrir*) des EUKLID ist gedruckt und früher mitunter für eine einfache Übersetzung gehalten worden (s. meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern,* S. 84 und SUTER, *Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe,* Biblioth. Mathem. 1892, 5; ms. Paris 2464 hat eine andere Vorrede als die edirte). Seine Redaction des *Almagest* ist unedirt und meines Wissens noch nicht näher untersucht. WENRICH, l. c. p. 228, 234 u. Berichtigung p. 303, erwähnt 3 Handschriften, Paris 1108 (im neuen Catalog 2485) und Medic. 284, 292. Diese Redaction wurde commentirt von SAMARKANDI (n. 19) und einem Anonymus (HAGI KHALFA, l. c. V, 387).

23. WAFÂ (ABU'L) AL-BUZDJANI MUHAMMED (gest. 997) ist

vielleicht der bedeutendste Bearbeiter des *Almagest,* wenn sein Werk (ms. in Paris, früher 1138, im neuen Catalog 2494) wirklich die Variation des Mondes kennt, was E. A. SEDILLOT (*Matériaux* etc. p. 42 etc.) sein lebelang mit grossem Eifer in verschiedenen Schriften verteidigt hat. —

Ich schliesse diese kleine Studie mit einigen gelegentlichen Bemerkungen im edirten OSEIBIA. — Der, sonst bekannte, MADJRITI (s. Biblioth. Mathem. 1891, 48) studierte auch den *Almagest* (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 39).

In einem Gedichte auf den vielseitig gelehrten Arzt FAKHR AL-DIN AL-RAZI (gest. 28. April 1210) ist auch vom *Almagest* die Rede. (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II: 25).

Der christliche Arzt in Bagdad IBN BOTLAN, dessen *Tabulae sanitatis* in lateinischer Übersetzung unter dem verstümmelten Namen »Eluchasem Elimithar» gedruckt sind, citirt Aussprüche des PTOLEMAEUS (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 24), die allerdings den astologischen Schriften entnommen scheinen.

[1] ABU'L HASAN AL-SURRI bei NADIM, l. c. p. 183; ABU'L HASAN SERI (sic) BEN AHMED »er Reffa al-Kindi al-Mausali» bei HAGI KHALFA, l. c. VII, 1089 n. 3363, s. auch Index zum Catalog der arab. mss. des Brit. Mus. p. 836.

[2] Edirt von RENAN in der 2. u. 3. Ed. seines *Averroes,* ohne den Verf. zu kennen, den ich in meiner Schrift über AL-FARABI nachgewiesen habe.

[3] Sein Bericht findet sich bei KIFTI und Anderen; s. meinen Artikel in *Hebr. Bibliogr.* X, 16. AL-NATILI hiess ABU ABD ALLAH — s. OSEIBIA l. c. II, 2 und 3 (so lies im Index S. 28 Zeile 3); cf. I, 240 Zeile 9 von unten. In einer Redaction des DIOSKORIDES vom Jahre 990, geschrieben 475 H. (1082), ms. Leyden 1301 (Catalog III, 228; s. Arch. für pathol. Anatomie **52**, S. 354, **124**, S. 483) wird neben ABU ABD ALLAH auch HUSEIN BEN IBRAHIM AL-NATALI genannt; es ist mir zweifelhaft geworden, ob nicht beide Namen dieselbe Person bedeuten.

[4] »IKHTILÂF AL-MANATSIR», so lies bei KIFTI und OSEIBIA II, 7, Zeile 2; siehe meine Abhandlung *Euklid bei den Arabern,* S. 100, zum Teil berichtigt in meinem Werke über die hebräischen Übersetzungen Anm. S. 371; ungenau: »Comment.» bei CASIRI, l. c. I, 269, 271 und HAMMER, l. c. V, 397 n. 75. WENRICH bringt die Notiz erst in den Addenda p. 303; s. auch meine *Hebr. Bibliogr.* X, 18.

[5] PUSEY, Catal. II, 381; ob der *Abrégé* in ms. Paris [illegible] der Catalog giebt nichts Näheres an.

[6] Quellen in meinen Noten zu BALDI, p. 34.

[7] Noten zu BALDI, p. 23; OSEIBIA, l. c., Lesarten S. 47.

[8] Ich citire nach den Seiten von OSEIBIA, füge mit »WÖPCKE« die Stelle bei WÖPCKE (*Omar al-Khayami* p. 73 ff.). Kurz bei CASIRI I, 416 hat nur: *Tahdsib* (concinne Darstellung Abriss).

[9] NADIM, l. c. S. 272, II, 129, wo der längere Artikel von KIFTI abgedruckt ist; HAGI KHALFA, l. c. VII, 1104 n. [illegible]; CHWOLSOHN, *Ssabier* I, 577; *Cat. Lugd.* III, 48; Noten zu BALDI p. 48, wo die Conjectur u. Berichtigung *Hilal* zu p. 25 falsch ist; LECLERC, l. c. I, 515 falsch »Temnan».

[10] »Scopo» bei WENRICH und CHWOLSOHN ungenau.

[11] Bei CHWOLSOHN S. 577 nur ganz kurz; »25» ist wohl Druckfehler, da die Zahl im Arabischen in Worten gegeben ist.

[12] Das angebliche Todesjahr 1412 bei CASIRI, l. c. I, 380, HAGI KHALFA, l. c. I, 322, SEDILLOT, *Tables d'Olongh* p. 225, ist in der That das Abfassungsjahr von *Aschkal al-Taasis*, s. meine *Lettere a Don B. Boncompagni* p. 85; ein anderes im J. 1412 verf. Werk (s. bei HAGI KHALFA, l. c. VI, 113 n. 12886, wo eine Lücke für das Todesjahr) ist Lacknau (in Hindustan) lithographirt a. 1290 H. (1873/4). Cf. SEDILLOT, *Matériaux* etc. I, 245, *Prolég. arab.* p. 5 note, sind die Stellen aus CASIRI unvollständig angegeben, weil bei letzterem im Index unter verschiedenen Namen: *Cadi, Saad* und *Musa;* sie sind nämlich I, 50, 380, 382, 479, 503, 521, 534 n. 1373; cf. SEDILLOT, *Introduction aux Tables* p. CXXXII, CXXXVII n. 113; HAGI KHALFA, l. c. VII, 1118 n. 4446, p. 1207 n. 7787 (s. meine *Lettere* etc. l. c. n. 18); s. auch d'HERBELOT, *Bibl. Orient.* deutsch II, 32, III, 501; NICOLL *Cat.* p. 247 (704).

[13] S. vorläufig meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern*, S. 109. WENRICH kennt nur THEODOSIUS. Des letzteren Schrift über Klepsidra in der Bearbeitung des IBN ABI SCHUKR erschien im Journal asiatique (Paris) 17, 1891, p. 287.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. Weissenborn. ZUR GESCHICHTE DER EINFÜHRUNG DER JETZIGEN ZIFFERN IN EUROPA DURCH GERBERT. EINE STUDIE. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°, (5) + 123 p.

Cet ouvrage traite la question: d'où GERBERT a-t-il tiré ses connaissances arithmétiques? M. WEISSENBORN, qui croit avoir constaté une mention relative à l'*abacus* dans le titre d'un ouvrage d'ALKINDI, pense que GERBERT avait appris l'arithmétique essentiellement en Espagne par un certain JOSEPH *Hispanus* ou *sapiens*, dont un écrit: *Libellus de multiplicatione et divisione numerorum* est cité deux fois dans les lettres de GERBERT. La plus grande partie de l'ouvrage de M. WEISSENBORN est consacrée à la question si ce JOSEPH est identique avec quelque autre savant connu. M. WEISSENBORN n'est arrivé à aucun résultat définitif, mais il semble porté à croire que JOSEPH n'était pas un savant, mais un marchand juif dans le service du comte de Barcelona.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1892: 1. — [Analyse de l'année 1891:] *Venezia,* Istituto Veneto, Atti 3₇, 1892, 637—644. (A. FAVARO.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. БОБЫНИНЫМЪ. Москва. 8°.
9 (1890): 3—4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
37 (1892): 1. — [Analyse de l'année 1889:] Fiziko-matem. naouki 9 (1890), 1892, 133—142.

Bobynin, V. V., Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques.
Biblioth. Mathem. 1892, 1—2.

Burkhardt, H., Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 6, 1892, 119—159.

Favaro, A., Della vita e delle opere del senatore Domenico

Turazza. Commemorazione letta nell' aula magna della r. università di Padova addì 27 marzo 1892. Padova 1892.
8°, 82 p. + portrait.

Loria, G., Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce.
| *Genova,* Università, Atti 1892. 144 p.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1892, 7—8.

Suter, H., Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe.
Biblioth. Mathem. 1892, 3—6.

Torelli, G., Achille Sannia. Commemorazione.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 48—51.

Weissenborn, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892.
8°, (5) + 123 p. — [1.80 Mk.]

Vivanti, G., Notice historique sur la théorie des ensembles.
Biblioth. Mathem. 1892, 9—25.

Question 37 [sur la signification de l'expression *regula coeci*].
Biblioth. Mathem. 1892, 32. (G. Eneström.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 27—31. — Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 146—168. — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

38. Les dictionnaires biographiques ne donnent que des indications incomplètes sur la vie et les travaux du mathématicien Marc-Antoine Parseval-Deschênes, mort en 1836 (voir p. ex. la *Nouvelle biographie générale* **39** [Paris 1862] col. 253), auquel on doit un beau théorème dans la théorie des séries. Y a-t-il quelque notice imprimée sur l'action scientifique de ce savant?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

Stockholm, tryckt i Central-tryckeriet, 1892.

[redacted]

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 6. — NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa.

Von R. O. BESTHORN in Kjöbenhavn.

Herr STEINSCHNEIDER hat in der Bibliotheca Mathematica 1892, S. 7—8, einige sehr schätzenwerthe Erläuterungen über Spuren eines Commentars (nicht Übersetzung) des AL-NARIZI und des SIMPLICIUS zu den Elementen des EUKLIDS gegeben — eine Frage, die, wie die Redaction hervorgehoben, schon früher von Herrn TANNERY angeregt ist. Die gelehrte Abhandlung des Herrn TANNERY ist auf Mittheilungen des Herrn RODET aus dem arabischen Codex der Leidener Bibliothek 399: 1 gegründet. Da ich im Begriffe stehe den ersten und wichtigsten Theil dieses Codex herauszugeben (mit lateinischer Übersetzung, während mein Mitherausgeber, Herr Professor J. L. HEIBERG die historischen und kritischen Untersuchungen übernommen), möchte ich schon jetzt durch eine kurze Analyse dieses wichtigen Codex dazu beitragen die genannten wieder angeregten Fragen, sowie die sehr umstrittene HERON-Frage zu beleuchten, worüber noch SUTER (Abhandl. z. Geschichte der Mathem. 6, 1892, 54) im unklaren ist.

Der arabische Codex Leidensis 399: 1 zerfällt in zwei Theile:

1. Die (älteste) arabsiche Übersetzung der sechs ersten Bücher der Elemente EUKLIDS von HADSCHDSCHADSCH IBN JUSUF MATHAR, mit Commentar von AL-NARIZI, 162 dicht geschriebene Seiten (in unserer Ausgabe ca. 300 Druckseiten). Der Commentar ist eine Compilation nach arabischen und griechischen

Autoren. Wir verdanken dieser Compilation die Übermittelung werthvoller Bruchstücke zweier in der Originalsprache verlorenen griechischen Werke — der Commentar des Heron und des Simplicius zu den Elementen Euklids. Die Einleitung schliesst mit folgenden Worten: »Hier enden die von Simplicius zu Erklärung der Einleitung des Euklids zum ersten Buche der Elemente vorausgeschickten Begriffe». Leider ist der Commentar des Simplicius zu den ersten 22 Definitionen verloren, da mehrere Blätter fehlen. Der Commentar zu Prop. I, 28 enthält eine sehr umfassende Discussion von Simplicius und Geminus über die Theorie der Parallelen. Von einem Heronischen Commentar enthält der Codex zahlreiche Auszüge.

2. Eine arabische »verbesserte» Übersetzung der *Sphaerica* des Menelaus von Ahmad Ibn Sad Al-Haruni in zwei Büchern, 47 Seiten. Diese Übersetzung beabsichtige ich nicht zu ediren, vergleiche sie aber mit dem von Halley und Costard herausgegebenen Text, und Professor Heiberg wird diese Vergleichung verwerthen.

Studi italiani sulla storia della matematica.

Rivista di Antonio Favaro in Padova.

Allorchè dall' egregio direttore di questo periodico mi fu gentilmente affidato l'incarico di fornire alcune notizie sopra gli studi italiani relativi alla storia delle matematiche, mi parve di poter adempiere nel modo più conciso e più esatto che per me si potesse l'onorevole incarico con indicare succintamente quei capitoli della classica *Biblioteca Matematica Italiana* del nostro Riccardi, ai quali le più particolareggiate notizie avrebbero potuto attingersi intorno a tale argomento.[1] Ma la domanda, che dalla medesima e da altre parti ancora, mi viene con insistenza indirizzata, di ritornare con maggiori particolari sullo stesso argomento, mi fa un gradito dovere di corrisponderví, seguendo le traccie che furono in questo medesimo periodico così luminosamente segnate da altri studiosi, i quali si fecero per lo passato a trattare lo stesso argomento riferibilmente ad altri paesi.

Ed al pari dei miei predecessori comincierò dal riconoscere io pure non essere agevol cosa segnare nettamente i confini di tale lavoro. Ho già esternato altrevolte il parere che non si possano sceverare negli studi storici, specialmente per ciò che si riferisce ai tempi da noi più lontani, le matematiche pure dalle applicate, e l'ho sostenuto anche contro il conforme parere di autorevoli studiosi ed egregi amici miei, nè le ragioni addotte in contrario mi hanno minimamente persuaso, chè anzi nel raccogliere gli elementi per il presente cenno ho trovato di che maggiormente rafforzare quel mio antico modo di vedere. Ma poichè io devo ora corrispondere agli altrui desiderii, e non fare la volontà mia propria, così dichiaro che, uniformandomi io pure alle norme seguite in altri lavori congeneri che videro già la luce in questo medesimo periodico, mi terrò semplicemente ad enumerare lavori concernenti le matematiche pure; che se talvolta, dal titolo della pubblicazione registrata, potrà giudicarsi che io abbia deviato da siffatto proposito, la deviazione sarà soltanto apparente, e la giustificazione del mio operato sarà da cercarsi nella essenza della scrittura medesima, o nell' esempio che gli altri lavori congeneri ebbero a somministrarmi.

Una corrispondente limitazione mi sono imposto per ciò che concerne le notizie biografiche, le quali posso dire d'aver

completamente escluse dalla mia rivista, essendomi tenuto a comprendervi soltanto alcune pochissime voci nelle quali mi è sembrato che il nome del personaggio, la cui vita è stata descritta, non costituisse il fine nè unico nè principale del lavoro. E per dare soltanto una idea di quanto con le due anzidette limitazioni venga a restringersi il campo di ciò che a tale proposito possono offrire gli studi italiani, basterà il dire che con tali premesse vengono a rimanere esclusi dalla seguente rassegna tutti i lavori che concernono GALILEO e la di lui scuola.

Non si troveranno del pari in questa nostra rassegna quegli emporii di notizie i quali sono costituiti dai diversi Cataloghi pubblicati dal LIBRI, da certi indici di manoscritti, come quello compilato del NARDUCCI per i Codici BONCOMPAGNI, e dalle storie delle nostre antiche università.

Non mi sono tuttavia creduto in facoltà di trascurare le collezioni biografiche, nel caso in cui esse risguardino esclusivamente o precipuamente i matematici, rimanendo perciò da parte quei lavori, così numerosi in Italia, nei quali sono contenuti cenni biografici intorno agli uomini più o meno illustri di ciascuna regione o di ciascuna provincia. Il BIERENS DE HAAN, nel dare in questo medesimo periodico la bibliografia storica delle matematiche nei Paesi Bassi,[2] la fece seguire da un elenco di notizie biografiche sopra i matematici neerlandesi, e quantunque io non abbia fatto altrettanto, credo tuttavia che tornerebbe assai utile il redigere un consimile lavoro bio-bibliografico anche per le altre nazioni, particolarmente poi se questi singoli lavori, come giova sperare, saranno insieme raccolti; e per parte mia mi riservo di contribuirvi, se ne verrà espresso il desiderio.

Dirò finalmente che, ancora sull' esempio degli altri che attesero a lavori analoghi al presente, ho escluso della mia rivista tutti i lavori italiani nei quali trovansi pubblicate in originale, tradotte e commentate le opere degli antichi matematici: lavori in altri tempi così numerosi nel nostro Paese, nel quale pur troppo oggidì tali studi non sono più in quell'onore nel quale sono giustamente tenuti, in particolar modo in Germania, dove vediamo illustri studiosi attendere con tutto l'armamentario che forniscono i sussidi della moderna critica e l'impiego delle più scrupolose norme filologiche, a nuove edizioni dei sommi scrittori greci e latini.

Il giudizio sintetico che può formarsi intorno alle condizioni presenti degli studi di storia delle matematiche in Italia, specialmente se confrontato con i tempi andati, non è per verità molto lusinghiero. Anche se numericamente in questi ultimi anni sono

andati crescendo i lavori intorno a questo argomento, non può dirsi che, e per il valore delle persone che vi attendono e per la profondità ed originalità delle ricerche, rappresenti un vero e reale progresso. La cessazione del Bullettino pubblicato dal Principe BONCOMPAGNI per il ventennio 1868—1887 diede un colpo gravissimo a questo ordine di ricerche: il tentativo fatto da me stesso or sono quattordici anni di fondare nella Università di Padova un corso di storia delle matematiche è rimasto isolato, e, debbo confessarlo con profondo rammarico, quantunque da me fedelmente proseguito con tutte le cure delle quali sono capace, non diede, neppure nella Università stessa dove viene impartito, tutti quei frutti che me ne attendevo. Nè poteva avvenire altrimenti, dato da una parte il presente ordinamento degli studi superiori in Italia, per il quale gli studenti sono indotti a trascurare tutti quei corsi i quali non sono costretti a seguire dai vigenti regolamenti, ed atteso dall' altra lo scarsissimo favore che questo ordine di indagini incontra per parte di coloro che vanno per la maggiore nell' arringo matematico e che per conseguenza potrebbero esercitare una maggiore influenza.

Lo stesso concorso aperto dall Istituto Veneto, e con premio relativamente cospicuo, per un lavoro sulla storia delle matematiche,[1] il quale sarebbe tornato di così grande aiuto alla diffusione degli studi di storia scientifica e del loro insegnamento, non diede alcun frutto; ed è questo un segno di grandissimo significato, perciocchè concorre a dimostrare che l'ambiente non è favorevole alla diffusione di questo ordine di ricerche, per quanto in questi ultimi anni abbia saputo guadagnare a sè qualche cultore di primo ordine, il quale alla profondità delle cognizioni accoppia una singolare diligenza ed una non comune operosità e fecondità. Ma queste nuove forze, per quanto valide, le quali vengono ad aggiungersi, non bastano purtroppo a colmare i gravissimi vuoti lasciati da studiosi dei quali si deplora la immatura perdita o la cessata attività scientifica, e soprattutto non bastano a modificare l'indirizzo il quale si manifesta assai più favorevole ad un intendimento degli studi che interroga l'avvenire che non a quello il quale in una più esatta o profonda conoscenza del passato cerca le basi d'un più sicuro ed effettivo progresso.

[1] ANTONIO FAVARO, *Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.* Biblioth. Mathem. 1889, 113—116.

[2] D. BIERENS DE HAAN, *Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas*. Biblioth. Mathem. 1891, 13—22.

[3] ANTONIO FAVARO, *Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella Reale Università di Padova*. Biblioth. Mathem. 1887, 45—56.

[4] Biblioth. Mathem. 1889, 64.

1548.

Claricini del Gambaro, L. Oratio de laudibus et utilitatibus arithmeticae. Bononiae 1548.

1553.

Giraldi, G. G. Suarum quarundam adnotationum dialogismi XXX ad amplissimum Card. Salviatum. Item LAURENTII FRIZOLII Solianensis dialogismus unicus de ipsius Lilii vita et operibus. Venetiis 1553.

1556.

Tartaglia, N. La seconda parte del general trattato di numeri et misure, nella quale in undici libri si notifica la più ellevata et speculativa parte della pratica Arithmetica, la qual è tutte le regole, et operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni et quantità irrationali. Vinegia 1556.

1557.

Medici, S. De latinis numerorum notis. Venetiis 1557.

1562.

Cardano, G. Somniorum Synesiorum, omnis generis insomnia explicantes Libri III, etc. Quibus accedunt eiusdem haec etiam: De libris propriis . . . Geometriae encomium. Basileae 1562.

1615.

Biancani, G. Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata. Aristotelicae videlicit expositionis complementum hactenus desideratum. Accessere de natura mathematicarum scientiarum tractatio, atque clarorum mathematicorum chronologia. Bononiae 1615.

1663.

Dati, C. Lettera a Filateti di Timauro Antiate della vera storia della cicloide, e della famosissima esperienza dell' argento vivo. Firenze 1663.

1672.

Orsati, S. De notis romanorum commentarius. Patavii 1672.

1674.

Viviani, V. Quinto libro degli Elementi d'Euclide ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov' ordine distesa e per la prima volta pubblicata. Aggiuntevi cose varie del Galileo e del Torricelli; i ragguagli delle ultime opere loro, con altro, che dall' indice si manifesta. Firenze 1674.

1707.

Baldi, B. Cronica di matematici overo epitome dell' istoria delle vite loro. Urbino 1707.

1737.

Mazzuchelli, G. M. Notizie storiche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni ed agli scritti di Archimede. Brescia 1737.

1739.

Poleni, G. Exercitationes Vitruvianae primae. Hoc est: commentarius criticus de M. Vitruvii Pollionis architecti X librorum editionibus, necnon de eorundem editionibus, atque de aliis, qui Vitruvium quocumque modo explicarunt, aut illustrarunt. Patavii 1739.

1741.

Belgrado, J. Ad disciplinam mechanicam, nauticam et geographicam acroasis critica et historica. Parmae 1741.

1744.

Castiglioni, G. Isaaci Newtoni, equitis aurati, opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit etc. Accessit commentariolus de vita auctoris. Lausannae et Genevae 1744.

1753.

Gianpriamo, N. Specula parthenopea uranophilis juvenibus excitata, duplici constructione ordinique disposita. Neapoli 1753.

Giovanni, F. De numeralium notarum minuscolarum origine. Dissertatio mathematico-critica.

Calogerà: Raccolta d'opuscoli, t. **48** (1753).

1757.

Ximenes, L. Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e delle architettoniche fatte nel verificarne la costruzione, libri IV. A'quali premettesi una introduzione istorica, ecc. Firenze 1757.

1778.

Barbieri, M. Notizie istoriche dei matematici e filosofi del regno di Napoli. Napoli 1778.

Frisi, P. Elogio del cavaliere Isacco Newton. [Milano 1778.]

Torricelli, E. Racconto di alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente tra i matematici di Francia e me dall' anno 1640 in qua.
FABRONI: Vitae Italorum, etc. **1**, 1778, p. 375.

1779.

Santini, G. Picenorum mathematicorum elogia. Maceratae 1779.

1780.

Targioni-Tozzetti, G. Atti e memorie dell' Accademia del Cimento e notizie aneddote dei progressi delle scienze in Toscana contenenti secondo l'ordine delle materie e dei tempi memorie, esperienze, osservazioni, scoperte e la rinnovazione della fisica celeste e terrestre, cominciando da Galileo Galilei fino a Francesco Redi ed a Vincenzio Viviani inclusive. I—III. Firenze 1780.

1786.

Frisi, P. Elogio del sig. D'Alembert. Milano 1786.

Hervas, L. Aritmetica delle nazioni e divisione del tempo fra gli orientali. Cesena 1786.

1787.

Verri. Memorie appartenenti alla vita ed agli studi del signor Don Paolo Frisi. Milano 1787.

1797.

Cossali, P. Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra, storia critica, ecc. I—II. Parma 1797—1799.

1802.

Saggio sulla storia generale delle matematiche di **Carlo Bossut**, prima edizione italiana con note ed aggiunte di GREGORIO FONTANA. I—IV. Milano 1802—1803.

1804.

P. P. G. G. Delle utilità, dell' origine e del progresso della matematica. Casale 1804.

1807.

Fontana, M. Osservazioni storiche sopra l'aritmetica di Francesco Maurolico.
Memorie dell' istituto nazionale (Bologna) **2**, 1807, 275—296.

1811.

Dragoni, A. Sul metodo aritmetico degli antichi romani. Cremona 1811.

1813.

Giuglielmini, G. B. Elogio di Lionardo Pisano recitato nella grand' aula della Regia Università di Bologna nel giorno XII novembre MDCCCXII. Bologna 1813.

Memoria sulle cifre arabiche attribuite fino a giorni nostri agl' indiani, ma inventate in un paese più rimoto dell' India. 123456789. Milano 1813.

1818.

de Matthaeis, G. Dissertazione sull' origine de' numeri romani. Roma 1818.

1819.

Oliva, A. M. Gli elementi della stereometria degli antichi. Napoli 1819.

1821.

Franchini, P. Saggio sulla storia delle matematiche corredato di scelte notizie biografiche ad uso della gioventù. Lucca 1821.

1823.

Scinà, D. Discorso intorno ad Archimede. Palermo 1823.

Scorza, G. Divinazione sulla geometria analitica degli antichi, ovvero sul metodo usato dalle greche scuole nella risoluzione de' problemi. Napoli 1823.

1827.

Franchini, P. La storia dell' algebra e de' suoi principali scrittori. Lucca 1827.

1833.

Colangelo, F. Storia dei filosofi e dei matematici napolitani, e delle loro dottrine da' Pitagorici sino al secolo XVII dell'era volgare. I—III. Napoli 1833—1834.

1835.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII siècle. I. Paris 1835.

1838.

Minich, S. R. Intorno al metodo del Tartaglia per la risoluzione delle equazioni cubiche. Padova 1838.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. I—IV. Paris 1838—1841.

1839.

Libri, G. Notice sur l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie etc. par M. Chasles.
Journal des savants, Août 1839, 493—505.

1843.

Silvestrelli, S. M. Calcolo completo dei numeri romani ossia mate delle matematiche. Roma 1843.

1844.

Libri, G. Notice sur la correspondance mathématique et physique de quelques géomètres célèbres du XVIII^e siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'Académie impériale de St. Pétersbourg, de P. H. Fuss.
Journal des savants, Juillet 1844, 385—390; Janvier 1846, 50—62.

Piola, G. Elogio di Bonaventura Cavalieri. Milano 1844.

Rambelli, G. Intorno invenzioni e scoperte italiane. Lettere. Modena 1844.

1845.

de Luca, F. Memorie per rivendicare alla Scuola italica tutta l'antica geometria. Napoli 1845.

de Luca, F. Colpo d'occhio sui progressi delle scienze matematiche dai tempi più rimoti fino ai nostri giorni.

1846.

Gherardi, S. Di alcuni materiali per la storia della Facoltà Matematica nell' antica Università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri.
Annali delle scienze naturali (Bologna) 5_2, 1846, 241—368.

de' Sallustj, G. Storia dell' origine e de' progressi delle matematiche di più autori riunita in commentarj a forma di cronica. I—V. Roma 1846.

1851.

Boncompagni, B. Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti **4**, 1851.

Boncompagni, B. Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo.
Roma, Acc. d. Lincei, Atti **4**, 1851.

1852.

Barciulli, F. Memorie intorno a Fra Luca Pacioli e Pietro Della Francesca.
Giornale arcadico di scienze (Roma) **126**, 1852.

Boncompagni, B. Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo.
Roma, Acc. d. Lincei, Atti **5**, 1852, 5—91, 208—245.

1854.

Boncompagni, B. Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo.
Giornale arcadico di scienze (Roma) **131**, 3—129; **132**, 376; **133**, 3—91.

Iannucci, V. Intorno ad alcuni trattati d'aritmetica e di geometria manoscritti nell' I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze.
Giornale arcadico di scienze **138**, 1854, 328—335.

Iannucci, V. Intorno ad un trattato d'aritmetica che trovasi manoscritto nella I. e R. Biblioteca Magliabechiana di Firenze.
Giornale arcadico di scienze **137**, 1854.

1855.

Boncompagni, B. Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee $x^2 + h = y^2$, $x^2 - h = z^2$.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 135—154.

Genocchi, A. Intorno a tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 115—120.

Genocchi, A. Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo *Liber quadratorum*.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 186—209, 251—259.

Genocchi, A. Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Note analitiche.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 161—185, 218—251, 273—320, 345—362.

1857.

Cossali, P. Scritti inediti pubblicati da B. BONCOMPAGNI, seguiti da un' appendice contenente quattro lettere dirette al medesimo P. Cossali ed una nota intorno a queste lettere. Roma 1857.

Genocchi, A. Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII.
Rivista contemporanea **40**, 1857, 287—321.

Veratti, B. Ricerche e congetture intorno all' aritmetica degli antichi Romani. Modena 1857.

1859.

Veratti, B. Del vaglio d'Eratostene e della illustrazione fattane da Samuele Horsley negli Atti della R. Società di Londra.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **3**, 1859.

1860.

Veratti, B. Dei matematici italiani anteriori all' invenzione della stampa. Commentario storico.
Opuscoli religiosi, letterarii e morali (Modena 1860), T. 5, 6 e 7. Fasc. 15—19.

1863.

Narducci, E. Intorno a due edizioni della Summa de Arithmetica di fra Luca Pacioli. Roma 1863.

Veratti, B. Sopra la terminologia matematica degli scrittori latini.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **5**, 1863.

1864.

Codazza, G. Il principe Boncompagni e la storia delle scienze matematiche in Italia.
Il politecnico (Milano) **20**, 1864.

Vivanet, F. Del carattere e della storia della Geometria Descrittiva. Cagliari 1864.

1865.

Cipolletti, D. Sopra alcuni lavori del principe Boncompagni risguardanti la storia delle matematiche in Italia.
Corrispondenza scientifica (Roma) **17**, 1865, ni 12, 14.

Narducci, E. Intorno ad alcuni passi notevoli d'antiche opere relativi alle scienze fisiche e matematiche.
Il politecnico (Milano) 1865, 342—350. — Giornale arcadico **191** 1864, 1—24.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. Deuxième édition. I—IV. Halle 1865.

Martinez, D. Origine e progressi dell' Aritmetica. Sunto istorico seguito da una dissertazione sull' aritmetica binaria. Messina 1865.

1868.

Piani, D. Intorno al centro di gravità. Notizie storico-critiche.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **1**, 1868, 41—42.

1870.

Riccardi, P. Biblioteca Matematica Italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Modena 1870—1880.

Stiattesi, A. Sull' Aritmetica. Dissertazione storico-critica.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **3**, 1870, 389—408.

1871.

Boncompagni, B. Intorno alle definizioni di Erone.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**, 1871, 122—126, 512.

Jacoli, F. Intorno ad un comento di Benedetto Vittori, medico Faentino al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**, 1871, 493—497.

Boncompagni, B. Intorno al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**. 1871, 498—511.

1873.

Boncompagni, B. Intorno ad un passo della Geometria di Boezio relativo al pentagono stellato.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **6**, 1873, 341—356.

Vivanet, F. Dei più notabili progressi della geometria nel corrente secolo decimonono. Cagliari 1873.

1874.

Boncompagni, B. Intorno al comento di Proclo sul primo libro degli Elementi di Euclide.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, 152—165.

Favaro, A. Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, 451—502, 523—589.

1875.

Boncompagni, B. Intorno ad una proprietà dei numeri dispari.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **8**, 1875, 51—62.

Favaro, A. Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità. Padova 1875.

Favaro, A. Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone. Padova 1875.

1876.

Boncompagni, B. Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, 188—210.

Bombelli, R. Dell' antica numerazione italica e dei relativi numeri simbolici. Studi archeologici-critici. Parte prima. Roma 1876.

I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni di quesiti dall' una e dall' altra

parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da E. Gior-dani. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. S. Gherardi. Milano 1876.

Govi, G. Applicazione delle funzioni circolari e dei logaritmi alla soluzione di alcuni problemi rivendicata a Bonaventura Cavalieri. Nota storica.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti **3_2**, 1876.

1877.

Boncompagni, B. Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali.
Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. **10**, 1877, 294—302.

Favaro, A. Intorno ad alcuni lavori sulla storia delle scienze matematiche e fisiche recentemente pubblicati dal prof. Sigismondo Günther.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **3_5**, 1877, 913—958.

Narducci, E. Intorno ad un manoscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio senz' abaco e con valore di posizione.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti **1_3**, 1877, 503—509.

1878.

Favaro, A. Intorno ad una statistica degli scienziati vissuti nei due ultimi secoli.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **28**, 1878, 25—67.

Favaro, A. Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **18**, 1878, 127—332.

Favaro, A. La storia delle matematiche nella Università di Padova.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **11**, 1878, 799—801.

Zanotti Bianco, O. Sopra due passi della storia della teoria matematica delle probabilità del signor Todhunter.
Giornale di matematiche **16**, 1878, 26—30.

1879.

Favaro, A. Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **5_5**, 1879, 495—521.

Favaro, A. Intorno alla vita e alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 1—74, 115—251.

Favaro, A. Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **19**, 1879, 89—145.

Riccardi, P. Nuovi materiali per la storia della facoltà matematica nell' antica Università di Bologna.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 299—303.

Boncompagni, B. Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis, e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 354—419.

Boncompagni, B. Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 428—438.

Favaro, A. Intorno ad alcune notizie inedite relative a Niccolò Copernico raccolte e pubblicate dal Prof. Massimiliano Curtze.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 775—807.

Boncompagni, B. Intorno a due scritti di Leonardo Euler.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 808—811.

Boncompagni, B. Giunte all' articolo intitolato: »Intorno alle vite inedite di tre Matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 863—872.

1880.

Boncompagni, B. Intorno ad un trattato di aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchese, Canonico Regolare della Congregazione del SS. Salvatore.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 1—80, 121—200, 245—368.

Boncompagni, B. Michele Chasles.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 815—827.

Favaro, A. Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **19**, 1879, 233—244.

Favaro, A. Le matematiche nello Studio di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI.
Padova, Accad. d. sc., Nuovi saggi **9**: 1, 1880, 1—91.

Favaro, A. Sulla Biblioteca Matematica del prof. P. Riccardi.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **7**, 1880, 47—64.

Narducci, E. Notizie di libri relativi alle matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina, e non citati dal Conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera intitolata »Gli scrittori d'Italia« ecc.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 369—378.

Riccardi, P. Nota statistica di storia matematica.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **20**, 1880, 299—310.

1881.

Boncompagni, B. Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath intitolato »Regulae Abaci«.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, 1—90.

Boncompagni, B. Testamento inedito di Nicolò Tartaglia.
Collectanea Mathematica (Milano 1881), 363—412.

Forti, A. Saggio di nuove tavole di funzioni iperboliche aventi per argomento il loro doppio fattore, precedute dalla loro storia, dalla teorica e da applicazioni. Pisa 1881.

Schiaparelli, G. V. Sulla nuova Storia delle Matematiche pubblicata dal Prof. M. Cantor.
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti **14**, 1881, 62—69.

1882.

Favaro, A. Intorno al primo volume delle lezioni sulla storia della matematica del prof. Maurizio Cantor.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 183—205.

Favaro, A. Intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del secolo XVII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 1—48.

Favaro, A. Intorno al testamento inedito di Niccolò Tartaglia pubblicato da D. B. Boncompagni.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **32**, 1882, 71—108.

Garbieri, G. Come l'algebra s'introdusse e si svolse in Europa per opera degli italiani. Reggio Emilia 1882.

Narducci, E. Intorno a due trattati inediti d'Abaco contenuti in due codici vaticani del secolo XII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 111—134.

Narducci, E. Intorno ad un comento inedito di Remigio d'Auxerre al »Satyricon«, di Marziano Capella e ad altri comenti al medesimo »Satyricon«.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 505—565.

Narducci, E. Intorno a due trattati d'Abaco manoscritti del secolo XII.
Roma, Accad. dei Lincei, Transunti **6**$_3$, 1882, 324—326.

1883.

Favaro, A. Preliminari ad una restituzione del libro di Euclide sulla divisione delle figure piane.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1**$_6$, 1883, 393—397.

Favaro, A. Sul carteggio inedito tra Lagrange e d'Alembert.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1**$_6$, 1883, 533—545.

Favaro, A. Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree.
Venezia, Istituto Veneto, Memorie **22**, 1883, 129—154.

Favaro, A. Intorno ad alcuni lavori di bibliografia e di storia delle matematiche presentati in omaggio alla Reale Accademia delle Scienze di Padova da M. Curtze e da E. Narducci.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **33**, 1883, 67—83.

Narducci, E. Alcuni libri rari relativi alle matematiche e ad altre scienze affini posseduti dalla Biblioteca Alessandrina di Roma.
Il Buonarroti (Roma) $\mathbf{1}_3$, 1883, 209—233.

Narducci, E. Sur un manuscrit du Vatican du XIV[e] siècle, contenant un traité de calcul emprunté à la méthode Gobari.
Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{7}_2$, 1883, 247—256.

Jacoli, F. Intorno al problema »le noeud de cravate», e ad alcune opere d'Urbano d'Aviso romano.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 445—456.

Boncompagni, B. Intorno a due quesiti proposti nella raccolta intitolata »Giornale degli eruditi e curiosi».
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 673—686.

Favaro, A. Intorno ad alcuni studi del dott. J. L. Heiberg sopra Euclide.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 565—571.

1884.

Genocchi, A. Résumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes.
Mathesis **4**, 1884, 49—52.

Genocchi, A. Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié.
Mathesis **4**, 1884, 106—108.

Menabrea, L. F, Sur la machine analytique de Charles Babbage.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **99**, 1884, 179—182.

1885.

Favaro, A. Notice sur les manuscrits de mathématiques de la collection Libri-Ashburnham achetée par le gouvernement italien.
Biblioth. Mathem. 1885, 44—46.

Favaro, A. Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18**, 1885, 405—423.

de Marchi, L. Di tre manoscritti del Maurolicio che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma.
Biblioth. Mathem. 1885, 141—144, 193—195.

Narducci, E. Trattatello sulle divisioni, secondo il sistema dell'abaco, scritto in Italia innanzi al secolo XII.
Roma, Accad. dei Lincei, Rendiconti **1**, 1885, 563—566.

1886.

Boncompagni, B. Sur un manuscrit du traité de géométrie attribué à Petrus de Dacia.
Biblioth. Mathem. 1885, 196.

Boncompagni, B. Sur l'Histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Maximilien Marie. I, II.
Biblioth. Mathem. 1886, 43—45, 87—90.

de Marchi, L. Sull' ortografia del nome del matematico messinese Maurolicio.
Biblioth. Mathem. 1886, 90—92.

Riccardi, P. Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 59—66.

Favaro, A. Ricerche ulteriori intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del secolo XVII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 99—144.

Baldi, B. Vite inedite di matematici italiani pubblicate da E. NARDUCCI.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 335—406, 437—489, 521—640.

Favaro, A. Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini, tratto dall' Archivio Malvezzi de Medici in Bologna. Bologna 1886.

Zanotti-Bianco, O. L'esagramma di Pascal. Nota storica.
Torino, Accad. d. sc., Atti **21**, 1886, 686—697.

Riccardi, P. Le prime edizioni degli Elementi d'Euclide.
Il bibliofilo (Bologna) **6**, 1886.

1887.

Baldi, B. Vita di Pitagora, tratta dall' autografo ed annotata da E. NARDUCCI.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 197—308.

Favaro, A. Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella Università di Padova.
Biblioth. Mathem. 1887, 49—54.

Jacoli, F. Isaaco Newton (a proposito d'un prossimo centenario).
Annuario astro-meteorologico (Venezia) **5** (1887), 153—157.

Loria, G. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica.
Torino, Accad. d. sc., Memorie **38**, 1887, 327—376.

Traduzioni:

Die hauptsächlichen Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von F. SCHÜTTE. Mit einem Vorworte von R. STURM. Leipzig 1888.

Przeszlosc i stan obecny najwazniejszych teoryj geometrycznych. Przeklad uzupelniony licznemi dodatkami wydany za upowaznieniem autora przez S. DICKSTEINA. Warszawa 1889.

Riccardi, P. Saggio di una bibliografia Euclidea. I—IV.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie $\mathbf{8}_4$, 1887, 399—523; $\mathbf{9}_4$, 1888, 319—343; $\mathbf{1}_5$, 1890, 25—84.

1888.

Favaro, A. Bonaventura Cavalieri nello Studio di Bologna.
Atti e memorie della deputazione di Storia patria per le provincie di Romagna, $\mathbf{6}_3$, 1888, 120—177.

Loria, G. Notizie storiche sulla Geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1888, 39—48, 67—80.

1889.

Beltrami, E. Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky.
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti $\mathbf{5}_4$: 1, 1889, 441—448.

Besso, D. Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo.
Periodico di matematica (Roma) **4**, 1889, 14—17.

Besso, D. Sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli.
Periodico di matem. **4**, 1889, 144—145.

Loria, G. Addizioni alle Notizie storiche sulla Geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1889, 23—27.

Loria, G. I poligoni di Poncelet. Torino 1889.

Loria, G. Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet.
Biblioth. Mathem. 1889, 67—74.

Riccardi, P. Di alcune opere di prospettiva di autori italiani ommesse nella »Histoire de la Perspective» di M. Poudra.
Biblioth. Mathem. 1889, 39—42.

Carrara, B. La coincidenza dei due metodi di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino 1889.

Favaro, A. Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.
Biblioth. Mathem. 1889, 113—116.

Favaro, A. Il Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni (1868—1887).
Biblioth. Mathem. 1889, 109—112.

d'Ovidio, E. Uno sguardo alle origini e allo sviluppo della matematica pura. Torino 1889.

1890.

Loria, G. Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico.
Torino, Accad. d. sc., Memorie **40**$_2$, 1890, 369—445.

d'Ovidio, E. Altra addizione alla nota sui determinanti di determinanti.
Torino, Accad. d. sc., Atti **26**, 1890, 131—133.

Riccardi, P. De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae saeculi XIX.
Biblioth. Mathem. 1890, 56.

Riccardi, P. Saggio d'una biblioteca matematica italiana del secolo XIX.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie **10**$_4$, 1890, 633—651.

1891.

Favaro, A. Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di bibliografia delle matematiche.
Rivista di matematica **1**, 1891, 72—77.

Loria, G. Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla storia critica dell' algebra.
Rivista di matematica **1**, 1891, 185—248.

Loria, G. Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1891, 99—112.

Vivanti, G. Sur une classe de grandeurs infiniment petites considerée par Newton.
Biblioth. Mathem. 1891, 97—98.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

2. Fonctions alephs.

Grâce aux travaux de NEWTON, de GIRARD, de WARING, de VANDERMONDE et de LAGRANGE, l'importance des fonctions symétriques pour la théorie des équations était bien appréciée par les mathématiciens. WRONSKI étudie la classe des fonctions symétriques complètes (*Philosophie des mathématiques* p. 65) qu'il a nommées fonctions *alephs*. Il forme ces fonctions en prenant le développement de la puissance $m^{ième}$ du polynome $n_1 + n_2 + \ldots + n_\omega$, où les n sont des nombres quelconques, et en remplaçant par l'unité les coefficients de ce développement. Il désigne la fonction aleph obtenue de cette manière par

$$\aleph[n_1 + n_2 + \ldots + n_\omega]^{(m)}$$

ou bien simplement par $\aleph(m)$, et il énonce les propriétés de cette espèce de fonctions. Si l'on fait $n_1 + n_2 + \ldots + n_\omega = N_\omega$, on aura la relation générale

$$\aleph[N_\omega - n_p]^{(m)} - \aleph[N_\omega - n_q]^{(m)} = (n_q - n_p)\aleph[N_\omega]^{(m)},$$

n_p et n_q étant deux quelconques parmi les quantités $n_1, n_2, \ldots, n_\omega$, et m un nombre arbitraire.

Si l'on a une équation du degré ω:

$$0 = A_0 + A_1 x + \ldots + A_\omega x^\omega$$

dont les racines soient les quantités $-n_1, -n_2, \ldots, -n_\omega$, on aura

$$\aleph[N_\omega]^{(1)} = A_{\omega-1}$$

$$\aleph[N_\omega]^{(2)} = A_{\omega-1}\aleph[N_\omega]^{(1)} - A_{\omega-2}$$

$$\aleph[N_\omega]^{(3)} = A_{\omega-1}\aleph[N_\omega]^{(2)} - A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)}$$

. . . .

WRONSKI reprend ses formules dans la *Résolution générale des équations* (p. 8). Il croit encore ici que toutes les fonctions alephs à indices négatifs sont égales à zéro; il corrige cette erreur dans le supplément aux *Canons de logarithmes* où il indique (sans démonstration) les expressions générales des fonctions alephs à indices positifs et à indices négatifs. Pour les fonctions à indices positifs de l'équation

$$x^\omega - A_1 x^{\omega-1} + A_2 x^{\omega-2} + \ldots + (-1)^\omega A_\omega = 0$$

il donne l'expression

$$\aleph(m) = A_1^m - A_1^{m-2}(m-1)A_2$$
$$+ A_1^{m-4}\left\{(m-2)A_1A_3 + (m-2)^{2/-1}\frac{A_2^2}{1^{2/1}}\right\}$$
$$- A_1^{m-6}\left\{(m-3)A_1^2A_4 + (m-3)^{2/-1}A_1A_2A_3 + (m-3)^{3/-1}\frac{A_2^3}{1^{3/1}}\right\} + \dots.$$

Une expression analogue existe pour les fonctions alephs à indices négatifs, $\aleph(-1)$, $\aleph(-2)$, ..., $\aleph(-\omega+1)$ étant zéro. Ces formules sont répétées dans la *Réforme des mathématiques*.

Outre ces fonctions alephs, dites simples, WRONSKI a étudié aussi les fonctions alephs composées »des différents ordres». Les fonctions composées du premier ordre designées par $\aleph(\rho, \alpha)$ ont été construites d'après la formule

$$\aleph(\rho, \alpha) = \aleph(\rho)\aleph(\rho+\alpha) - \aleph(\rho-1)\aleph(\rho+\alpha-1);$$

les fonctions alephs composées du deuxième ordre: $\aleph(\rho, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ont été définies par la formule

$$\aleph(\rho, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \aleph(\rho, \alpha_1)\aleph(\rho+\beta, \alpha_1) - \aleph(\rho-1, \alpha_1)\aleph(\rho-\beta, \alpha_1)$$

etc.; WRONSKI n'a pas donné les expressions générales de ces fonctions.

La théorie des fonctions alephs de WRONSKI peut-être développée aujourd'hui avec facilité. La fonction $\aleph(m)$ de l'équation $f(x) = 0$ peut être donnée sous la forme

$$\aleph(m) = \sum_{i=1}^{i=\omega} \frac{x_i^{m+\omega-1}}{f'(x_i)},$$

$x_1, x_2, \dots, x_\omega$ étant les racines (inégales) de l'équation donnée. Le second membre de cette formule peut être exprimé par un quotient de deux déterminants orthosymétriques. En fonction des coefficients de l'équation, la fonction $\aleph(m)$ peut être écrite sous la forme de déterminant:

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \dots, & A_m \\ 1, & A_1, & A_2, & \dots, & A_{m-1} \\ 0, & 1, & A_1, & \dots, & A_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & A_1 \end{vmatrix}$$

qui est égal à la somme

$$\sum_{(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+\omega\alpha_\omega=m)}(-1)^{m+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\omega}\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\omega)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\omega!}A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}\ldots A_\omega^{\alpha_\omega}.$$

C'est de cette dernière forme, analogue à la formule de WARING, que dérivent immédiatement les expressions générales de WRONSKI.

Les fonctions alephs composées peuvent être exprimées aussi en fonctions des racines ou des coefficients de l'équation.

Dans la théorie des nombres, WRONSKI a introduit une forme différente des fonctions aleps. Si S et R sont deux nombres entiers pour lesquels on fait l'opération de la recherche du plus grand diviseur commun, et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\omega-1}, \alpha_\omega$ sont les quotients de ces divisions, on aura les fonctions alephs suivantes:

$$\aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(0)} = 1$$

$$\aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(1)} = \alpha_1 \aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(0)}$$

$$\aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(2)} = \alpha_2 \aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(1)} + \aleph\left[\frac{S}{R}, \omega\right]^{(0)}$$

. . . .

On voit que ces fonctions alephs constituent les numérateurs des fractions réduites qu'on trouve en développant le quotient $\frac{S}{R}$ en une fraction continue.

Ces deux formes des fonctions alephs peuvent être comprises dans une définition générale.

On retrouve les fonctions symétriques de WRONSKI dans quelques recherches de CAUCHY et de JACOBI.[13] FÜRSTENAU,[14] NÄGELSBACH,[15] D'OCAGNE,[16] CROCCHI[17] etc. s'occupaient aussi de leur théorie.

Passons à l'application des fonctions alephs à la théorie des équations.

3. Méthode téléologique de la résolution des équations.

Cette méthode une extension des méthodes de DANIEL BERNOULLI[18] et d'EULER.[19] WRONSKI expose sa méthode pour les équations du cinquième degré dans le supplément aux *Ca-*

nons de logarithmes (1827) et pour les équations de tous les degrés dans la *Reforme du savoir humain* (1848).

L'idée principale de la méthode de Wronski consiste dans la détermination d'un polynome dont les coefficients dépendent des fonctions alephs de l'équation donnée et qui sous une certaine condition devient un facteur de plus en plus exact de l'équation à mesure que les indices des fonctions alephs deviennent de plus en plus grands. Cette idée est dérivée chez Wronski d'une idée plus générale de la génération dite *neutre*, par laquelle on construit la nature des fonctions cherchées par des degrés de l'exactitude de plus en plus croissante. C'est aussi la même génération qui nous fait connaître la nature des quantités irrationelles et transcendantes.

Soit proposée l'équation

$$0 = z^{\omega} - A_1 z^{\omega-1} + A_2 z^{\omega-2} + \dots + (-1)^{\omega} A_{\omega},$$

on aura d'après Wronski, pour la décomposition de cette équation en ses facteurs, l'équation générale du degré $\omega - 1$:

$$0 = z^{\omega-1} - P_2 z^{\omega-2} + P_3 z^{\omega-3} + \dots + (-1)^{\omega-1} P_{\omega}$$

dans laquelle, en prenant pour q un nombre entier de plus en plus grand jusqu'à l'infini, les coefficients $P_2, P_3, \dots$ seront formés avec les fonctions aleph de la manière suivante

$$P_{\mu} \aleph(q) = A_{\mu} \aleph(q-1) - A_{\mu+1} \aleph(q-2) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\omega-\mu} A_{\omega} \aleph[q - (\omega - \mu + 1)], \qquad (\mu = 2, 3, \dots)$$

en ne perdant pas de vue que les coefficients $A_{\mu}, A_{\mu+1}, \dots$ sont zéro lorsque les indices $\mu, \mu+1 \dots$ sont plus grands que ω. Il peut arriver d'abord que dans des cas spéciaux toutes les racines de l'équation précédente peuvent être immédiatement des racines de l'équation proposée. Alors doit être remplie la condition

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} = \frac{\aleph(q+\alpha+1)}{\aleph(q+\alpha)},$$

α étant un nombre entier arbitraire. Nous aurons alors une racine de l'équation par la formule

$$z = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)};$$

c'est le cas de la méthode de Bernoulli.

Lorsque la condition donnée plus haut ne peut pas être réalisée, on réduit le facteur du degré $\omega - 1$, en donnant un accroissement d'unité à l'indice q des fonctions alephs dans les

coefficients de ce facteur et, en prenant la différence des valeurs de ce facteur, on obtient une équation réduite du degré $\omega - 2$:

$$0 = z^{\omega-2} - a_2 z^{\omega-3} + \ldots + (-1)^{\omega-2} a_\omega,$$

dont les coefficients peuvent être exprimés par les fonctions alephs composées du premier ordre. Si ces fonctions satisfont à une certaine condition, cette équation formera, pour des valeurs suffisamment grandes de l'indice, un facteur du degré $\omega - 2$ de l'équation donnée. Et on trouve alors facilement le facteur complémentaire du second degré dont les deux racines sont les racines de l'équation donnée. Nous nous trouvons ici dans le cas de la méthode d'EULER.

En poursuivant cette marche, WRONSKI arrive au facteur du degré $\omega - 3$ dont les coefficients dépendent des fonctions alephs composées du deuxième ordre et détermine la condition sous laquelle ce facteur sera réellement un facteur de l'équation donnée. Cette condition étant remplie, on trouve immédiatement le facteur complémentaire du troisième degré dont les racines sont égales, pour des valeurs assez grandes des indices, aux racines de l'équation donnée. On peut aller plus loin, jusqu'au facteur du degré $\frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{1}{2}(\omega - 1)$ et son complémentaire. La notation incommode des fonctions alephs composées empêcha WRONSKI de donner l'expression générale de l'un ou de l'autre de ces facteurs, mais par des exemples complètement résolus il a montré la fécondité de sa méthode.

A l'aide de déterminants on peut exprimer le facteur complémentaire du degré $n + \omega$ sous cette forme très simple

$$\begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots, & 1 \\ \aleph_{q+n}, & \aleph_{q+n-1}, & \aleph_{q+n-2}, & \ldots, & \aleph_q \\ \aleph_{q+n-1}, & \aleph_{q+n}, & \aleph_{q+n-1}, & \ldots, & \aleph_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \aleph_{q+2n-1}, & \aleph_{q+2n-2}, & \aleph_{q+2n-3}, & \ldots, & \aleph_{q+n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ce facteur seront égales à n racines de l'équation donnée, en commençant par la racine ayant le moindre module et passant aux autres avec des modules croissants.

Le problème posé et résolu par WRONSKI, fut traité plus tard indépendamment par FOURIER,[20] STERN,[21] JACOBI[22] et FÜRSTENAU[23] etc. La solution la plus élégante du problème est due à JACOBI. Elle nous donne, comme j'avais montré,[24] une déduction simple de la méthode téléologique et la forme donnée

ci-dessus du facteur complémentaire. La méthode de FÜRSTENAU, que BALTZER[25] et GÜNTHER[26] ont supposée nouvelle, est aussi identique avec la méthode de JACOBI, c'est à dire avec la méthode téléologique de WRONSKI.[27]

[13] CAUCHY, *Sur la détermination du nombre des racines réelles.* Journal de l'éc. polytech. Cah. **17**, 1815, p. 457. — JACOBI, *De functionibus alternantibus etc.* Journal für Mathem. **22**, 1841, 360—371.

[14] FÜRSTENAU, *Darstellung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten* (Marburg 1860). — *Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen* (Marburg 1867).

[15] NÄGELSBACH, *Über eine Classe symmetrischer Functionen* (Zweibrücken 1871) et Archiv für Mathem. **59**, 1876, 147—192.

[16] M. d'OCAGNE, *Théorie élémentaire des séries récurrentes.* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_3$, 1884, 65—90.

[17] CROCCHI, *Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete.* Giornale di matematiche **18**, 1880, 377—380.

[18] D. BERNOULLI, *Observationes de seriebus recurrentibus.* Comment. acad. scient. Petropol. **3**, 1732, 85—100.

[19] EULER, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannæ 1748). Dans la traduction allemande de MOSER (Berlin 1885), p. 275—295. — Les méthodes de BERNOULLI et d'EULER sont exposées aussi par LAGRANGE dans son *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés* (Paris 1798), par LEGENDRE dans sa *Théorie des nombres* (Paris 1830) et par CAUCHY dans son *Cours d'analyse algébrique* (Paris 1821).

[20] FOURIER, *Analyse des équations déterminées* (Paris 1831), p. 68.

[21] STERN, *Remarque sur un théorème énoncé par M. Fourier.* Journal für Mathem. **9**, 1832, 305—311. — *Theorie der Kettenbrücke.* Journal für Mathem. **11**, 1834, 311—350.

[22] JACOBI, *Observatiunculae ad theorema aequationum pertinentes.* Journal für Mathem. **13**, 1835, 340—353.

[23] Voir les deux écrits de FÜRSTENAU cités ci-dessus.

[24] Dans un article publié dans le Comptes Rendus de l'académie des science de Cracovie 1889 (en polonais).

[25] BALTZER, Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861; Literaturz. 9—11.

[26] GÜNTHER, *Lehrbuch der Determinantentheorie* (2e Aufl. Erlangen 1877). — *Auflösung der Gleichungen durch Kettenbrüche.* Mathem. Ann. **7**, 1874, 262—268.

[27] Comparez E. HANEGRAEFF: *Méthode générale pour la résolution générale des équations* (Paris 1854).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M. Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. ZWEITER BAND. VON 1200—1668. ZWEITER THEIL. Leipzig, Teubner 1892. 8°, X p. + p. 501—863.

La Bibliotheca Mathematica a déjà rendu compte (voir année 1891, p. 117—118) de la première partie du second tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR; maintenant nous avons le plaisir d'en annoncer aussi la dernière partie. Cette partie est divisée en deux sections, dont la première embrasse la période 1550—1600, et la seconde, qui occupe seule à peu près 250 pages, la période 1660—1668. La première section comprend 3 chapitres traitant:

Ouvrages d'histoire des mathématiques. Editions d'auteurs classiques. Géométrie. Mécanique. — Geométrie et mécanique (continuation). Cyclométrie et trigonométrie. — Arithmétique et algèbre.

La seconde section est divisée en 12 chapitres, qui se rapportent aux matières suivantes:

Histoire des mathématiques. Editions d'auteurs classiques. — Géométrie. — Mécanique pratique et théorique. — Trigonométrie et cyclométrie. — Arithmétique. Logarithmes. — Invention de différentes méthodes. Calcul des probabilités. Fractions continues. Recueils de problèmes plaisants. — Théorie des nombres. Algèbre. — Méthodes géométriques pour résoudre des équations. Géométrie analytique. — Considérations infinitésimales. Kepler. Cavalieri. — Descartes. Fermat. — Roberval. Torricelli. — Grégoire de S:t Vincent. Wallis. Pascal. De Sluse. Hudde. Van Heuraet.

La seconde partie des *Vorlesungen* est aussi instructive que la première; l'auteur passe en revue un grand nombre de mathématiciens et il expose l'histoire des différentes théories mathématiques. En particulier, il traite amplement VIÈTE, DESCARTES, PASCAL, CAVALIERI, FERMAT et WALLIS, et il donne des notices détaillées sur la découverte des logarithmes et sur les recherches préparatoires pour l'invention du calcul infinitésimal.

A la fin de sa préface, M. CANTOR fait ressortir lui-même, qu'il n'a pas la prétention d'avoir fait une exposition complète de l'histoire des mathématiques pendant la période 1200—1668. En effet, une telle exposition est actuellement impossible, parce qu'un seul homme ne peut pas avoir recours lui-même à

toutes les sources manuscrites et imprimées, et parce qu'il nous manque encore des monographies sur plusieurs points de l'histoire des mathématiques. Ce manque dépend sans doute en grande partie de ce que les étudiants de l'histoire des mathématiques n'ont eu jusqu'à présent aucun moyen commode pour connaître les points de l'histoire des mathématiques qui ont encore besoin d'être examinés de plus près. Ce moyen leur a été offert maintenant par le second tome des *Vorlesungen*, qui montre, d'une part tout ce qu'on sait déjà sur la période 1200—1668, d'autre part les lacunes qui doivent être comblées, et nous ne doutous pas que l'important ouvrage de M. CANTOR ne provoquera des recherches où seront approfondies les questions qui n'ont pas été traitées jusqu'à présent d'une manière satisfaisante.

Avant de terminer, nous nous permettons de communiquer quelques petites observations, auxquelles a donné lieu la lecture du livre de M. CANTOR.

A la page 537, l'auteur fait mention du *Canon mathematicus* publié en 1579 par VIÈTE. On sait que cet ouvrage est devenu très rare, parce que VIÈTE retira tous les exemplaires qu'il put recouvrir. Mais on semble ignorer en général que le *Canon* a été réédité en 1609 après la mort de VIÈTE. Un exemplaire de cette édition, dont le titre finit: »Parisiis, Apud Bartholomæum Macæum, in monte D. Hilarij, sub scuto Britanniæ. M.D.C.IX» est gardée à la bibliothéque royale de Stockholm (cf. MÜLLER, *Auserlesene mathematische Bibliothek* [Nürnberg 1820] p. 38—39; KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik* III, p. 175).

Les deux éditions de l'algèbre de BOMBELLI, que M. CANTOR mentionne aux pages 570—571, sont probablement identiques (comparez ci-dessous p. 96, question 39); en tout cas le lieu de publication de l'édition de 1572 n'est pas Venezia mais Bologna.

En parlant de la géométrie de DESCARTES, M. CANTOR dit (p. 723): »Statt der Vokale benutzte er die letzten Buchstaben des Alphabetes, vorzugsweise und in erster Linie x, sodann y, z zur Bezeichnung der Unbekannten». Il nous semble qu'on puisse avec plus de raison dire que DESCARTES a employé en premier lieu z comme signe d'une quantité inconnue; en effet z est introduite déjà à la page 4 de la *Géométrie* (édition de 1886), y à la page 5, et x à la page 6.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.
1892: 2.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
37 (1892): 2. — Supplement [= Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**].

°**Adam, J.**, The nuptial number of Plato: its solution and significance. London 1891.
8°, 79 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 54—55. (Cantor.)

Ball, W. W. R., A Newtonian fragment relating to centripetal forces.
London, Mathem. soc., Transactions **23**, 1892, 226—231.

БОБЫНИНЪ, В. В., Приложенія исторіи математики къ рѣшенію и постановкѣ нѣкоторыхъ вопросовъ преподаванія математическихъ наукъ.
Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 97—132. — Bobynin, V. V., Usage de l'histoire des mathématiques pour la résolution et la décision de quelques questions relatives à l'enseignement des sciences mathématiques (fin).

°**Brückner, J. M.**, Das Ottojanische Problem. Eine mathematisch-historische Studie. Leipzig 1892.
4°, 25 p. + 1 pl. [1·00 Mk.]

Burkhardt, H., Bernhard Riemann. Vortrag, bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages. Göttingen 1892.
8°, 12 p.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892.
8°, X p. + p. 501—863.

Delbos, L., Les mathématiques aux Indes Orientales.
Bullet. d. sc. mathém. **16**$_2$, 1892, 93—112.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1892, 48—52.

Dickstein, S., Uchwaly kongresu miedzynarodowego bibliografii nauk matematycznych.
Praze matematyczno-fisyczne (Warszawa) **3**, 1892, 179—183. — Résolutions du congrès international de bibliographie des sciences mathématiques.

[redacted]

Dickstein, S., Dopełnienia do »wiadomości bibliograficznej o badaniach historyczno-matematycznych w polsce«.
Prace matematyczno-fizyczne **3**. 1892. 154—156. — Additions à la note sur les études historico-mathématiques en Pologne.

Dickstein, S., Zasady teoryi liczb Wrońskiego.
Kraków. Akad. umiej. Rozprawy **24**. 1892. 73—104. — Sur la théorie des nombres de Wroński. — [Compte rendu en français:] *Kraków*. Akad. umiej. Bulletin 1892. 64—65. (S. Dickstein.)

Duhem, P., Emile Mathieu, his life and work.
New York. Mathem. soc. Bulletin **1**. 1892. 156—168.

Favaro, A., La cattedra di Galileo nella università di Padova. Notizie e documenti.
Padova, Accad. d. sc. Atti e memorie **8**. 1892. 18 p.

Favaro, A., Gli oppositori di Galileo. I.
Venezia. Istituto Veneto. Atti **3**$_7$. 1892. 615—636.

Fine, H. B., Kronecker and his arithmetical theory of the algebraic equation.
New York. Mathem. soc. Bulletin **1**. 1892. 173—184.

Floquet, G., Notice sur Emile Mathieu, sa vie et ses travaux.
Nancy, Soc. d. sc. Bulletin 1891. — [Analyse:] Jornal de sc. mathem. **10**. 1892, 143. (G. T.)

Gutzmer, A., Zur Erinnerung an Paul Günther.
Zeitschr. für Mathem. **37**. 1892; Hist. Abth. 46—49.

Isenkrahe, C., Über die Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus abgeleiteten Gesetze.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**. 1892, 161—204. — Note en grande partie historique.

°**Kluge, G.**, De Euclidis elementorum libris qui feruntur XIV et XV. Lipsiæ 1891.
4°. 47 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**. 1892; Hist. Abth. 55—56. (Cantor.)

Müller, F., Über litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern.
Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher (Halle 1891). p. 11.

°**Nassiruddin el Thoussy**, Traité du Quadrilatère. Texte arabe avec traduction française par A. P. Caratheodory. Constantinople 1891.
8°. 157 + 214 p. — [12 Mk.] — [Analyse:] Bullet. des sc. mathém. **16**$_2$. 1892. 147—152. (P. Tannery.)

[Nécrologie sur L. Kronecker.]
Tôkyô. Sugaku butsurigaku kwai. Kiji **5**. 1892. 1 p. + portrait. — En japonais.

N[euberg], J., Bibliographie relative à un problème de Fermat: »Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés soit minima«.
Mathesis **2**$_2$. 1892. 162—163.

Ovidio, E. d', Cenno necrologico di A. de Gasparis.
| *Torino*, Accad. d. sc., Atti **28**, 1892. 2 p.

Prósper, V. R., Ch. S. Peirce y O. H. Mitchell.
El progreso matem. **2**, 1892, 170—173.

°**Rembacz, M.**, Krótko zebrana historya geometryi wykreslnéj. I, II. Stanislawow 1890, 1891.
8°, 34 + 64 p. — Aperçu de l'histoire de la géométrie descriptive.

Segre, C., Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve.
Biblioth. Mathem. 1892, 33—47.

°**Staigmüller, H.**, Dürer als Mathematiker. (Programm des Realgymnasiums in Stuttgart 1890—91.) Stuttgart 1891.
4°, 59 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 56—57. (Cantor.)

Steinschneider, M., Die arabischen Bearbeiter des Almagest.
Biblioth. Mathem. 1892, 53—62.

Suter, H., Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des ibn abî Ja'kûb an-Nadîm. Zum ersten Mal vollständig ins deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**, 1892, 1—87.

Tannery, P., Psellus sur Diophante.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 41—45.

Wappler, E., Bemerkungen zur Rhythmomachie.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 1—17.

Wittstein, A., Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**, 1892, 89—118.

Question 38 [sur M.-A. Parseval-Deschênes].
Biblioth. Mathem. 1892, 64. (G. Eneström.)

Fermat, P., Oeuvres, publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome premier. Oeuvres mathématiques diverses; observations sur Diophante. Paris 1891. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 212—215. (G. Wertheim.)

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volumi I, II. Firenze 1890, 1891. 4°.
Biblioth. Mathem. 1892, 26—27. (G. Eneström.) — Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{16}_2$, 1892, 152—158. (P. Tannery.)

Loria, G., Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. (Rivista di matematica 1891.)
Jornal de sc. mathem. **10**, 1892, 143. (G. T.) — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 57—58. (Cantor.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 63. (G. ENESTRÖM.)

WRONSKI, H., Loi téléologique du hasard. Réimpression de trois pièces rarissimes (1833), précédée d'un autobiographie et d'un inventaire de l'oeuvre. Paris 1890. 8°.
Fiziko-matem. naouki **9** (1890). 1892, 142—144.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 63—64. — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

39. M. CANTOR (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**, 1892, p. 570) fait mention de deux éditions différentes de l'*Algebra* de R. BOMBELLI, publiées respectivement à Venezia en 1572 et à Bologna en 1579. Quant à la 1ère édition, l'indication du lieu de publication est inexacte; en effet on trouve sur le feuillet du titre les mots: »In Bologna. Nella stamperia di Giovanni Rossi. MDLXXII.» Pour ce qui concerne la 2e édition, l'existence en a été indiquée aussi par M. RICCARDI (*Biblioteca matematica italiana* **1**, 1870, col. 146), qui l'appelle une reproduction exacte de la 1ère édition. D'autre part, le prince BONCOMPAGNI (*Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Marie;* Biblioth. Mathem. 1886, col. 44) parle d'une seule édition de 1572, dont quelques exemplaires portent dans la première page MDLXXIX au lieu de MDLXXII.

Est-ce que l'ouvage de BOMBELLI a été réimprimé en 1579?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1892.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 6. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 6. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.

Di Gino Loria a Genova.

Fra le scoperte fatte in quest' ultimo trentennio intorno alle Matematiche delle età passate, nessuna può competere per importanza con la scoperta di quell' antichissimo papiro (copia fatta circa 1700 anni a. C. di uno scritto che risale forse a cinque secoli prima) che A. H. Rhind acquistò durante il suo soggiorno in Egitto e che, egli morto, passò nel British Museum. Dopo che gli sforzi coalizzati del Birch, del Brugsch,[1] di A. Eisenlohr[2] e M. Cantor[3] furono coronati da così grande successo che quel papiro si ritiene in generale[4] avere rivelati i suoi più riposti segreti, si è, fra l'altro, riconosciuto che alla terra de' Faraoni non soltanto spetta, come Erodoto opinava, il titolo di patria della geometria, ma deve eziandio riguardarsi come una delle più vetuste sedi di non disprezzabili studii aritmetici.

Gli argomenti svolti nel Papiro Rhind, e più ancora la forma sotto cui essi vengono presentati, lo fanno apparire, non già come un trattato scientifico, ma sibbene come un manuale pratico, come una guida destinata agli agricoltori[5] già istruiti nell' aritmetica dei numeri interi. Non dimostrazioni e neppure giustificazioni dei procedimenti insegnati capaci di svelare il filo delle idee che condusse a formularli, ma nella maggior parte dei casi semplici verificazioni dei risultati; non enunciati di regole

generali, ma molteplici applicazioni di uno stesso metodo dalle quali chi legge deve desumere il modo di dirigersi nei casi analoghi. Lo scritto di cui è parola, vuoi per l'aspetto, vuoi per la sostanza, non può essere il prodotto di una scienza ancora bambina, deve al contrario corrispondere a quello stadio di maturità in cui solo è giustificata e permessa l'adozione della forma dogmatica. E d'altronde il calcolo *Segem* avente per iscopo la riduzione di più frazioni allo stesso denominatore, il calcolo *Hau* mediante il quale vengono risolte le equazioni della forma

$$x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots = a,$$

i calcoli di società, le traccie di progressioni aritmetiche e geometriche ed altro che per brevità si tace, sono più che sufficienti a rivelare, in chi compose l'anzidetta scrittura, una somma non indifferente di cognizioni aritmetiche.

Era costume degli antichi Egiziani di usare in pratica esclusivamente delle frazioni aventi per numeratori 1 (*frazioni fondamentali*), veniva fatta un' eccezione solo a favore della frazione $\frac{2}{3}$; non già che essi fossero nell' impossibilità di concepire anche le altre frazioni, ma incontravano delle difficoltà grafiche, fonetiche o grammaticali nell' indicarle. Donde la necessità da parte loro di sapere *esprimere qualunque frazione come somma di frazioni fondamentali.*

Riguardo a tale problema aritmetico si può osservare anzitutto che, siccome qualunque frazione è decomponibile in una somma di frazioni fondamentali e di frazioni della forma $\frac{2}{2n+1}$,[6] così esso problema potrà risolversi in generale nota che sia la decomposizione in frazioni fondamentali di qualsia frazione di questa forma. A ciò parzialmente provvede il Papiro Rhind, la cui prima parte contiene appunto la *decomposizione in fondamentali delle frazioni* $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{99}$. Si noti poi che quel problema è, non solo difficile, ma di sua natura indeterminato: si possono scegliere ad arbitrio delle ulteriori condizioni a cui devono soddisfare le frazioni componenti[7] e si può anche variarne in ogni caso il numero e la natura. E siccome è estremamente probabile che la tabella che ne dà la soluzione per le frazioni $\frac{2}{2n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots, 49)$ non sia stata costruita da una sola persona, nè in una sola epoca, ma sia passata per molteplici stadii di sviluppo prima di assumere le parvenze che

conosciamo,[8] così si potrebbe pensare che la decomposizione sia stata fatta in modi e con criterii diversi, scelti a caso o a capriccio o in base a differenti scopi pratici.[9]

Prima però di accettare questo modo di vedere, il quale, invece di risolvere la questione di determinare il metodo di costruzione, la distrugge, è doveroso cercare se coll' esame accurato della tabella non si possa avvertire qualche carattere comune alle decomposizioni proposte che guidi alla scoperta delle ragioni per cui esse furono prescelte ad infinite altre. Già l'Eisenlohr ed il Cantor si occuparono di tale ricerca e notarono un buon numero di formole da cui sono deducibili alcuni gruppi di decomposizioni. Ora a me pare (e in questo mi accordo col modo di giudicare del venerato capo della scuola storica tedesca) che il pretendere di scoprire l'esistenza di una formola unica di cui siano particolarizzazioni quelle corrispondenti agli spezzamenti egiziani, sia chiedere troppo; ritengo per converso sia debito dello storico di studiare se esista qualque proprietà generale comune a tutte, e, in caso affermativo, sia còmpito del matematico di cercare se essa sia sintomo di un concetto unico (anche se svolto diversamente)[10] regolatore dei varii passi fatti dai differenti costruttori della tabella.

Per tentare di adempiere a quel dovere, esaminiamo la tabella riassuntrice degli spezzamenti in questione (dopo avere soppressa l'indicazione della frazione $\frac{2}{3}$, perchè questa non viene decomposta):

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$
$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$$
$$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$
$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$$
$$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$$
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{74}+\frac{1}{232}$$
$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$$
$$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$$
$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$$
$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$$
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$$
$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$$
$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$$
$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$$
$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$$
$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$$
$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$$
$$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$$
$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$$
$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$$
$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$$

$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{736}$	$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$	$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$	$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\ ?$
$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$	$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$	$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$	$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$

Lasciando per un momento in disparte le frazioni $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, di cui ci occuperemo più innanzi, tale esame rivela subito che:

A. Ogni frazione del tipo $\frac{2}{2n+1}$ viene spezzata in tante frazioni fondamentali aventi, tutte meno una, la forma $\frac{1}{(2n+1)x}$.

B. Quest' ultima frazione, moltiplicata per $2n+1$, dà un prodotto compreso fra 1 e 2.

Ricordando ora alcuni dei problemi alla soluzione di quali è destinato il calcolo *Seqem*,[11] si è naturalmente condotti a congetturare che, per ottenere lo scopo a cui aspirava, chi costruì quella tabella, tentasse di sottrarre da ogni frazione $\frac{2}{2n+1}$ tante frazioni differenti del tipo $\frac{1}{(2n+1)x}$ finchè ottenesse come resto una nuova frazione fondamentale. Quest' ipotesi riceve una valida conferma dal fatto che, svolgendone il concetto essenziale, si può ottenere un procedimento di calcolo che mena a tutte le formole della tabella, eccettuate quelle sole che concernono le due anzidette frazioni. Nell' esporre tale procedimento noi ci serviremo dalle forme moderne, perchè sono così frammentarie ed incomplete le informazioni che ci furon trasmesse intorno ai metodi con cui calcolavano gli antichi Egiziani,[12] che sarebbe ora imprudente il tentarne una divinazione; il lettore è pertanto avvertito che noi non intendiamo in alcun modo di attribuire agli antichi abitatori dell' Egitto la nostra tecnica aritmetica e tanto meno i nostri ragionamenti d'indole algebrica; ce ne serviamo per convenienza, avvertendo però che quella e questi possono venire surrogati da un algoritmo fondato su tentativi (analogo a quello che permise a DIOFANTO di risolvere delle equazioni algebriche senza adoperare i nostri simboli) e che nulla vieta di supporre posseduto dai calcolatori, eccezionalmente esperti, vissuti sulla sponde del Nilo.

Supponiamo anzitutto che si voglia spezzare $\frac{2}{2n+1}$ in *due* frazioni fondamentali, una delle quali abbia per denominatore $(2n+1)x$, x essendo un numero intero da determinare. Sussisterà l'identità

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2x-1}{(2n+1)x} \tag{1}$$

e se determineremo x per modo che l'ultima di queste frazioni sia fondamentale, avremo raggiunto lo scopo. Notiamo intanto che, fatto ciò, questa frazione moltiplicata per $2n+1$ dà per prodotto $2 - \frac{1}{x}$, cioè un numero compreso fra 1 a 2, conformemente all' osservazione B.

Ora, se $2n+1$ è un numero primo, affinchè $\frac{2x-1}{(2n+1)x}$ sia una frazione fondamentale, deve $2n+1$ essere un multiplo di $2x-1$. Facendo per semplicità $2x-1=2n+1$ otterremo $x=n+1$, e quindi la decomposizione

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1};$$

ponendo in questa eguaglianza successivamente $n=2, 3, 5, 11$ si ottiene ordinatamente

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{11} = \frac{1}{66} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{23} = \frac{1}{276} + \frac{1}{12},$$

come appunto si legge nella tabella. Le rimanenti frazioni del tipo $\frac{2}{2n+1}$ corrispondenti a valori primi di $2n+1$ vengono decomposte in più di due frazioni fondamentali e verranno perciò considerate più innanzi.

Considerando pel momento ancora la formola (1), osserveremo che, se $2n+1$ non è primo, si può eguagliare $2x-1$ ad uno qualunque dei fattori di $2n+1$ ed ottenere in corrispondenza altrettante formole di decomposizione. I risultati a cui per tal modo si giunge sono i seguenti, fra cui segnammo con un * quelli che non si trovano nel Manuale egiziano: [13]

$n=4$	$x=2$	$\frac{2}{9}=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}$		
$n=7$	$x=2$	$\frac{2}{15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}$;	$x=3$	* $\frac{2}{15}=\frac{1}{45}+\frac{1}{9}$
$n=10$	$x=2$	$\frac{2}{21}=\frac{1}{42}+\frac{1}{14}$;	$x=4$	* $\frac{2}{21}=\frac{1}{84}+\frac{1}{12}$
$n=12$	$x=3$	$\frac{2}{25}=\frac{1}{75}+\frac{1}{15}$		
$n=13$	$x=2$	$\frac{2}{27}=\frac{1}{54}+\frac{1}{18}$		
$n=16$	$x=2$	$\frac{2}{33}=\frac{1}{66}+\frac{1}{22}$;	$x=6$	* $\frac{2}{33}=\frac{1}{198}+\frac{1}{18}$
$n=19$	$x=2$	$\frac{2}{39}=\frac{1}{78}+\frac{1}{26}$;	$x=7$	* $\frac{2}{39}=\frac{1}{273}+\frac{1}{21}$
$n=22$	$x=2$	$\frac{2}{45}=\frac{1}{90}+\frac{1}{30}$;	$x=3$	* $\frac{2}{45}=\frac{1}{135}+\frac{1}{27}$
$n=24$	$x=4$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{196}+\frac{1}{28}$		
$n=25$	$x=2$	$\frac{2}{51}=\frac{1}{102}+\frac{1}{34}$;	$x=9$	* $\frac{2}{51}=\frac{1}{459}+\frac{1}{27}$
$n=27$	$x=6$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{330}+\frac{1}{30}$;	$x=3$	* $\frac{2}{55}=\frac{1}{165}+\frac{1}{33}$
$n=28$	$x=2$	$\frac{2}{57}=\frac{1}{114}+\frac{1}{38}$;	$x=10$	* $\frac{2}{57}=\frac{1}{570}+\frac{1}{30}$
$n=31$	$x=2$	$\frac{2}{63}=\frac{1}{126}+\frac{1}{42}$;	$x=4$	* $\frac{2}{63}=\frac{1}{252}+\frac{1}{36}$
$n=32$	$x=3$	$\frac{2}{65}=\frac{1}{195}+\frac{1}{39}$;	$x=7$	* $\frac{2}{65}=\frac{1}{455}+\frac{1}{35}$
$n=34$	$x=2$	$\frac{2}{69}=\frac{1}{138}+\frac{1}{46}$;	$x=12$	* $\frac{2}{69}=\frac{1}{828}+\frac{1}{36}$
$n=37$	$x=2$	$\frac{2}{75}=\frac{1}{150}+\frac{1}{50}$;	$x=3$	* $\frac{2}{75}=\frac{1}{225}+\frac{1}{45}$
$n=38$	$x=4$	$\frac{2}{77}=\frac{1}{308}+\frac{1}{44}$;	$x=6$	* $\frac{2}{77}=\frac{1}{462}+\frac{1}{42}$
$n=40$	$x=2$	$\frac{2}{81}=\frac{1}{162}+\frac{1}{54}$		
$n=42$	$x=3$	$\frac{2}{85}=\frac{1}{255}+\frac{1}{51}$;	$x=9$	* $\frac{2}{85}=\frac{1}{765}+\frac{1}{45}$
$n=43$	$x=2$	$\frac{2}{87}=\frac{1}{174}+\frac{1}{58}$;	$x=15$	* $\frac{2}{87}=\frac{1}{1305}+\frac{1}{45}$
$n=46$	$x=2$	$\frac{2}{93}=\frac{1}{186}+\frac{1}{62}$;[14]	$x=16$	* $\frac{2}{93}=\frac{1}{1488}+\frac{1}{48}$
$n=49$	$x=2$	$\frac{2}{99}=\frac{1}{198}+\frac{1}{66}$;	$x=6$	* $\frac{2}{99}=\frac{1}{594}+\frac{1}{54}$

Restano per tal modo ottenute TUTTE le *decomposizioni binomie* del Papiro, eccettuate, ben inteso, le due singolari dianzi citate.

Passiamo a studiare le decomposizioni trinomie. Osservando che è

$$\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)x}-\frac{1}{(2n+1)y}=\frac{2xy-(x+y)}{(2n+1)xy},$$

ossia

$$(2)\quad \frac{2}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)x}+\frac{1}{(2n+1)y}+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{xy}{2xy-(x+y)}},$$

si vedrà subito che, per risolvere il problema di cui ci occupiamo, basta scegliere per x e y due valori differenti nella serie $2, 3, \ldots$ tali che $2n+1$ sia un multiplo del denomina-

tore della frazione $\frac{xy}{2xy-(x+y)}$, supposta ridotta ai suoi minimi termini. Notiamo anzitutto che l'ultimo termine della (2) moltiplicato per $2n+1$ diviene

$$2-\frac{x+y}{xy},$$

numero sempre compreso fra 1 e 2, d'accordo coll' osservazione B. Per determinare poi x e y senza tentativi, si formi una tabella di valori della funzione

$$f(x\,,y)=\frac{xy}{2xy-(x+y)};$$

limitandosi ai valori di x e y compresi fra 2 e 15 essa si riduce alla seguente:

$f(2\,,3)=\frac{6}{7}$	$f(3\,,14)=\frac{42}{71}$	$f(6\,,7)=\frac{42}{71}$	$f(8\,,15)=\frac{120}{217}$
$f(2\,,4)=\frac{4}{5}$	$f(3\,,15)=\frac{5}{8}$	$f(6\,,8)=\frac{24}{41}$	$f(9\,,10)=\frac{90}{161}$
$f(2\,,5)=\frac{10}{13}$	$f(4\,,5)=\frac{20}{31}$	$f(6\,,9)=\frac{54}{93}$	$f(9\,,11)=\frac{110}{199}$
$f(2\,,6)=\frac{3}{4}$	$f(4\,,6)=\frac{12}{19}$	$f(6\,,10)=\frac{15}{16}$	$f(9\,,12)=\frac{60}{109}$
$f(2\,,7)=\frac{14}{19}$	$f(4\,,7)=\frac{28}{45}$	$f(6\,,11)=\frac{66}{115}$	$f(9\,,13)=\frac{130}{237}$
$f(2\,,8)=\frac{8}{11}$	$f(4\,,8)=\frac{8}{13}$	$f(6\,,12)=\frac{4}{7}$	$f(9\,,14)=\frac{35}{64}$
$f(2\,,9)=\frac{18}{25}$	$f(4\,,9)=\frac{36}{59}$	$f(6\,,13)=\frac{78}{137}$	$f(9\,,15)=\frac{6}{11}$
$f(2\,,10)=\frac{5}{7}$	$f(4\,,10)=\frac{20}{33}$	$f(6\,,14)=\frac{21}{37}$	$f(10\,,11)=\frac{110}{199}$
$f(2\,,11)=\frac{31}{22}$	$f(4\,,11)=\frac{44}{73}$	$f(6\,,15)=\frac{30}{53}$	$f(10\,,12)=\frac{60}{109}$
$f(2\,,12)=\frac{12}{17}$	$f(4\,,12)=\frac{3}{5}$	$f(7\,,8)=\frac{56}{97}$	$f(10\,,13)=\frac{130}{237}$
$f(2\,,13)=\frac{26}{37}$	$f(4\,,13)=\frac{52}{87}$	$f(7\,,9)=\frac{63}{110}$	$f(10\,,14)=\frac{35}{64}$
$f(2\,,14)=\frac{7}{10}$	$f(4\,,14)=\frac{28}{47}$	$f(7\,,10)=\frac{70}{123}$	$f(10\,,15)=\frac{6}{11}$
$f(2\,,15)=\frac{30}{43}$	$f(4\,,15)=\frac{60}{101}$	$f(7\,,11)=\frac{77}{126}$	$f(11\,,12)=\frac{132}{241}$
$f(3\,,4)=\frac{12}{17}$	$f(5\,,6)=\frac{30}{49}$	$f(7\,,12)=\frac{84}{149}$	$f(11\,,13)=\frac{143}{262}$
$f(3\,,5)=\frac{15}{22}$	$f(5\,,7)=\frac{35}{58}$	$f(7\,,13)=\frac{91}{162}$	$f(11\,,14)=\frac{154}{283}$
$f(3\,,6)=\frac{2}{3}$	$f(5\,,8)=\frac{40}{67}$	$f(7\,,14)=\frac{14}{25}$	$f(11\,,15)=\frac{165}{204}$
$f(3\,,7)=\frac{21}{22}$	$f(5\,,9)=\frac{45}{76}$	$f(7\,,15)=\frac{105}{188}$	$f(12\,,13)=\frac{156}{287}$
$f(3\,,8)=\frac{24}{37}$	$f(5\,,10)=\frac{10}{17}$	$f(8\,,9)=\frac{72}{127}$	$f(12\,,14)=\frac{84}{155}$
$f(3\,,9)=\frac{9}{14}$	$f(5\,,11)=\frac{55}{94}$	$f(8\,,10)=\frac{40}{71}$	$f(12\,,15)=\frac{36}{111}$
$f(3\,,10)=\frac{30}{47}$	$f(5\,,12)=\frac{60}{103}$	$f(8\,,11)=\frac{88}{157}$	$f(13\,,14)=\frac{182}{337}$
$f(3\,,11)=\frac{33}{52}$	$f(5\,,13)=\frac{65}{112}$	$f(8\,,12)=\frac{6}{11}$	$f(13\,,15)=\frac{195}{362}$
$f(3\,,12)=\frac{36}{67}$	$f(5\,,14)=\frac{70}{121}$	$f(8\,,13)=\frac{104}{187}$	$f(14\,,15)=\frac{210}{391}$.
$f(3\,,13)=\frac{39}{62}$	$f(5\,,15)=\frac{15}{26}$	$f(8\,,14)=\frac{56}{101}$	

Volendo servirsene per trovare la decomposizione trinomia di $\frac{2}{13}$, cercheremo nella tabella precedente i valori di $f(x, y)$ aventi per denominatore 13; troveremo agevolmente i due seguenti

$$f(5, 2)=\tfrac{10}{13}, \qquad f(8, 4)=\tfrac{8}{13};$$

allora la (2) darà subito le due decomposizioni

$$* \ \tfrac{2}{13}=\tfrac{1}{65}+\tfrac{1}{26}+\tfrac{1}{10}$$
$$\tfrac{2}{13}=\tfrac{1}{104}+\tfrac{1}{52}+\tfrac{1}{8},$$

la seconda delle quali si trova nel Papiro Rhind. Procedendo in modo analogo si ottengono i risultati seguenti:

$2n+1=17$:	$f(2, 12)=\frac{12}{17}$,	$* \ \frac{2}{17}=\frac{1}{204}+\frac{1}{34}+\frac{1}{12}$
	$f(3, 4)=\frac{12}{17}$,	$\frac{2}{17}=\frac{1}{68}+\frac{1}{51}+\frac{1}{12}$
	$f(5, 10)=\frac{10}{17}$,	$* \ \frac{2}{17}=\frac{1}{170}+\frac{1}{85}+\frac{1}{10}$
$2n+1=19$:	$f(2, 7)=\frac{14}{19}$,	$* \ \frac{2}{19}=\frac{1}{133}+\frac{1}{38}+\frac{1}{14}$
	$f(4, 6)=\frac{12}{19}$,	$\frac{2}{19}=\frac{1}{114}+\frac{1}{76}+\frac{1}{12}$
$2n+1=31$:	$f(4, 5)=\frac{20}{31}$,	$\frac{2}{31}=\frac{1}{155}+\frac{1}{124}+\frac{1}{20}$
$2n+1=37$:	$f(2, 13)=\frac{26}{37}$,	$* \ \frac{2}{37}=\frac{1}{481}+\frac{1}{74}+\frac{1}{26}$
	$f(3, 8)=\frac{24}{37}$,	$\frac{2}{37}=\frac{1}{296}+\frac{1}{111}+\frac{1}{24}$
	$f(6, 14)=\frac{21}{37}$,	$* \ \frac{2}{37}=\frac{1}{518}+\frac{1}{222}+\frac{1}{21}$
$2n+1=41$:	$f(6, 8)=\frac{24}{41}$,	$\frac{2}{41}=\frac{1}{328}+\frac{1}{246}+\frac{1}{24}$
$2n+1=47$:	$f(3, 10)=\frac{30}{47}$,	$\frac{2}{47}=\frac{1}{470}+\frac{1}{141}+\frac{1}{30}$
	$f(4, 14)=\frac{28}{47}$,	$* \ \frac{2}{47}=\frac{1}{658}+\frac{1}{188}+\frac{1}{28}$
$2n+1=53$:	$f(6, 15)=\frac{30}{53}$,	$\frac{2}{53}=\frac{1}{795}+\frac{1}{318}+\frac{1}{30}$
$2n+1=59$:	$f(4, 9)=\frac{36}{59}$,	$\frac{2}{59}=\frac{1}{531}+\frac{1}{236}+\frac{1}{36}$
$2n+1=67$:	$f(3, 12)=\frac{36}{67}$,	$* \ \frac{2}{67}=\frac{1}{804}+\frac{1}{201}+\frac{1}{36}$
	$f(5, 8)=\frac{40}{67}$,	$\frac{2}{67}=\frac{1}{536}+\frac{1}{335}+\frac{1}{40}$
$2n+1=71$:	$f(3, 14)=\frac{42}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{994}+\frac{1}{213}+\frac{1}{42}$
	$f(6, 7)=\frac{42}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{497}+\frac{1}{426}+\frac{1}{42}$
	$f(8, 10)=\frac{40}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{710}+\frac{1}{568}+\frac{1}{40}$
$2n+1=95$:	$f(2, 4)=\frac{4}{5}=\frac{76}{95}$,	$* \ \frac{2}{95}=\frac{1}{380}+\frac{1}{190}+\frac{1}{76}$
	$f(4, 6)=\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$,	$\frac{2}{95}=\frac{1}{570}+\frac{1}{380}+\frac{1}{60}$
$2n+1=97$:	$f(7, 8)=\frac{56}{97}$,	$\frac{2}{97}=\frac{1}{776}+\frac{1}{679}+\frac{1}{56}$.

Per tal modo si sono ottenute direttamente TUTTE le *composizioni trinomie* contenute nel manuale di AHMES.

Con procedimento non dissimile si possono stabilire le decomposizioni quadrinomie. Si osservi a tale scopo l'identità:

$$\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)x}-\frac{1}{(2n+1)y}-\frac{1}{(2n+1)z}$$
$$=\frac{2xyz-(yz+zx+xy)}{(2n+1)xyz};$$

scrivendola sotto la forma seguente

$$(3)\qquad \frac{2}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)x}+\frac{1}{(2n+1)y}+\frac{1}{(2n+1)z}$$
$$+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)}}$$

si vedrà che essa guida ad una decomposizione quadrinomia purchè si scelgano per x, y, z dei valori fra loro differenti nella serie $2, 3, \ldots,$ e tali che la frazione

$$F(x, y, z)=\frac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)},$$

ridotta a' suoi minimi termini, abbia per denominatore $2n+1$ o un suo summultiplo. Per fare tale scelta è opportuno servirsi di una tabella di valori della funzione $F(x, y, z)$: limitandosi a valori delle indeterminate compresi fra 2 e 10, essa tabella si riduce alla seguente:

$F(2, 3, 4)=\frac{12}{11}$	$F(2, 5, 7)=\frac{70}{81}$	$F(3, 4, 5)=\frac{60}{73}$
$F(2, 3, 5)=\frac{30}{29}$	$F(2, 5, 8)=\frac{40}{47}$	$F(3, 4, 6)=\frac{6}{7}$
$F(2, 3, 6)=1$	$F(2, 5, 9)=\frac{90}{107}$	$F(3, 4, 7)=\frac{84}{107}$
$F(2, 3, 7)=\frac{42}{43}$	$F(2, 5, 10)=\frac{5}{6}$	$F(3, 4, 8)=\frac{24}{31}$
$F(2, 3, 8)=\frac{24}{25}$	$F(2, 6, 7)=\frac{21}{25}$	$F(3, 4, 9)=\frac{108}{141}$
$F(2, 3, 9)=\frac{18}{19}$	$F(2, 6, 8)=\frac{24}{29}$	$F(3, 4, 10)=\frac{60}{79}$
$F(2, 3, 10)=\frac{15}{16}$	$F(2, 6, 9)=\frac{27}{33}$	$F(3, 5, 6)=\frac{45}{56}$
$F(2, 4, 5)=\frac{20}{21}$	$F(2, 6, 10)=\frac{30}{37}$	$F(3, 5, 7)=\frac{105}{139}$
$F(2, 4, 6)=\frac{12}{13}$	$F(2, 7, 8)=\frac{56}{69}$	$F(3, 5, 8)=\frac{120}{161}$
$F(2, 4, 7)=\frac{26}{31}$	$F(2, 7, 9)=\frac{126}{157}$	$F(3, 5, 9)=\frac{45}{61}$
$F(2, 4, 8)=\frac{8}{9}$	$F(2, 7, 10)=\frac{35}{44}$	$F(3, 5, 10)=\frac{30}{41}$
$F(2, 4, 9)=\frac{36}{41}$	$F(2, 8, 9)=\frac{72}{91}$	$F(3, 6, 7)=\frac{14}{19}$
$F(2, 4, 10)=\frac{20}{23}$	$F(2, 8, 10)=\frac{40}{51}$	$F(3, 6, 8)=\frac{8}{11}$
$F(2, 5, 6)=\frac{15}{17}$	$F(2, 9, 10)=\frac{45}{58}$	$F(3, 6, 9)=\frac{18}{25}$

$F(3, 6, 10) = \frac{5}{9}$	$F(4, 6, 9) = \frac{158}{259}$	$F(5, 7, 10) = \frac{70}{109}$
$F(3, 7, 8) = \frac{168}{135}$	$F(4, 6, 10) = \frac{60}{89}$	$F(5, 8, 9) = \frac{360}{563}$
$F(3, 7, 9) = \frac{63}{89}$	$F(4, 7, 8) = \frac{56}{83}$	$F(5, 8, 10) = \frac{40}{63}$
$F(3, 7, 10) = \frac{210}{299}$	$F(4, 7, 9) = \frac{252}{377}$	$F(5, 9, 10) = \frac{90}{143}$
$F(3, 8, 9) = \frac{216}{307}$	$F(4, 7, 10) = \frac{140}{211}$	$F(6, 7, 8) = \frac{168}{263}$
$F(3, 8, 10) = \frac{120}{173}$	$F(4, 8, 9) = \frac{72}{109}$	$F(6, 7, 9) = \frac{378}{597}$
$F(3, 9, 10) = \frac{90}{131}$	$F(4, 8, 10) = \frac{40}{61}$	$F(6, 7, 10) = \frac{105}{167}$
$F(4, 5, 6) = \frac{60}{83}$	$F(4, 9, 10) = \frac{45}{68}$	$F(6, 8, 9) = \frac{72}{115}$
$F(4, 5, 7) = \frac{140}{197}$	$F(5, 6, 7) = \frac{210}{313}$	$F(6, 8, 10) = \frac{120}{193}$
$F(4, 5, 8) = \frac{40}{57}$	$F(5, 6, 8) = \frac{120}{181}$	$F(6, 9, 10) = \frac{45}{73}$
$F(4, 5, 9) = \frac{180}{259}$	$F(5, 6, 9) = \frac{90}{121}$	$F(7, 8, 9) = \frac{594}{1007}$
$F(4, 5, 10) = \frac{20}{29}$	$F(5, 6, 10) = \frac{15}{23}$	$F(7, 8, 10) = \frac{280}{457}$
$F(4, 6, 7) = \frac{84}{121}$	$F(5, 7, 8) = \frac{280}{429}$	$F(7, 9, 10) = \frac{630}{1037}$
$F(4, 6, 8) = \frac{24}{35}$	$F(5, 7, 9) = \frac{315}{527}$	$F(8, 9, 10) = \frac{360}{599}$.

Per applicarla alla determinazione delle decomposizioni quadrinomie della frazione $\frac{2}{29}$, cercheremo in essa quei valori della frazione $F(x, y, z)$ il cui denominatore è 29. Troveremo i seguenti:

$$F(2, 3, 5) = \frac{30}{29}, \quad F(2, 6, 8) = \frac{24}{29}, \quad F(4, 5, 10) = \frac{20}{29}$$

e ne dedurremo tosto le seguenti decomposizioni

$$* \frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{95} + \frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} + \frac{1}{24}$$
$$* \frac{2}{29} = \frac{1}{116} + \frac{1}{145} + \frac{1}{290} + \frac{1}{20},$$

la seconda delle quali s'incontra nel Manuale egiziano. Servendosi dello stesso metodo di calcolo si giunge alle conclusioni seguenti:

$2n + 1 = 43$	$F(2, 3, 7) = \frac{42}{43}$	$\frac{2}{43} = \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301} + \frac{1}{42}$
$2n + 1 = 61$	$F(3, 5, 9) = \frac{45}{61}$	$* \frac{2}{61} = \frac{1}{183} + \frac{1}{305} + \frac{1}{549} + \frac{1}{45}$
	$F(4, 8, 10) = \frac{40}{61}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} + \frac{1}{40}$
$2n + 1 = 73$	$F(3, 4, 5) = \frac{60}{73}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} + \frac{1}{60}$
	$F(6, 9, 10) = \frac{45}{73}$	$* \frac{2}{73} = \frac{1}{438} + \frac{1}{657} + \frac{1}{730} + \frac{1}{45}$
$2n + 1 = 79$	$F(3, 4, 10) = \frac{60}{79}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790} + \frac{1}{60}$
$2n + 1 = 83$	$F(4, 5, 6) = \frac{60}{83}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498} + \frac{1}{60}$
	$F(4, 7, 8) = \frac{56}{83}$	$* \frac{2}{83} = \frac{1}{332} + \frac{1}{581} + \frac{1}{664} + \frac{1}{56}$

E così restano ottenute anche TUTTE le *decomposizioni qua-*

inomie riferite da AHMES. Che anche per esse sia verificata sservazione B risulta della formola (3) e dall' osservare che

$$F(x, y, z) < 1$$

anne per le tre terne di valori di x, y, z : 2, 3, 5 ; 2, 3, 6 e , 7, 8.

Quanto alle due decomposizioni binomie escluse, esse si presentano tanto spontaneamente che nulla si oppone a che si ammetta essere desse state ottenute direttamente o dal primo costruttore della tabella, che le preferì a quelle che si otterrebbero applicando il concetto generale, o da qualche successivo rimaneggiatore che volle lasciare traccia di sè. Ad esempio esse possono ricavarsi con le seguenti trasformazioni (eseguibili al certo da chi conosceva così bene, come gli antichi Egiziani, il maneggio delle frazioni)

$$\frac{2}{35} = \frac{5+7}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{7+13}{7 \cdot 10 \cdot 13} = \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}.$$

Ciò conduce naturalmente a notare da ultimo come alla tabella da noi studiata tengano dietro nel Papiro alcuni problemi sulla *ripartizione dei pani* i cui risultati possono compendiarsi nella seguente tabellina:

$$\tfrac{3}{10} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}, \qquad \tfrac{6}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}, \qquad \tfrac{7}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5},$$

$$\tfrac{8}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{30}, \qquad \tfrac{9}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{30}.$$

Ora, se da essa non si può trarre alcuna conferma alla nostra congettura sul concetto che servì a costruire la grande tabella, ci sembra però che da essa non scaturisca alcun argomento in contrario; chè le questioni ivi risolte sono semplici giuochi in confronto di quelle trattate dall' altra: e infatti si trova anzitutto assai agevolmente

$$\tfrac{3}{10} = \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}$$

$$\tfrac{6}{10} = \tfrac{5}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}$$

$$\tfrac{7}{10} = \tfrac{5}{10} + \tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5};$$

in seguito coll' aiuto dalla tavola maggiore si trova

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{10+2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30},$$

dalla quale finalmente si conclude:

$$\tfrac{9}{10} = \tfrac{8}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{30} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{30}.$$

[1] Per maggiori particolari bibliografici rimando alla memoria di A. FAVARO: *Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind publicato ed illustrato dal Prof. Augusto Eisenlohr* (Mem. della r. accademia di Modena, **19**, 1879, p. 89—143).

[2] A. EISENLOHR. *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig 1877). Le citazioni seguenti si riferiscono alla *Zweite Ausgabe* (ohne Tafeln) uscita a Lipsia nel 1891.

[3] M. CANTOR. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst* (Leipzig 1875). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I (Leipzig 1880).

[4] Mi esprimo così perchè l'interpretazione di EISENLOHR e CANTOR venne gagliardamente combattuta da L. RODET nell' articolo intitolato *Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Egyptien* (*papyrus Rhind*) (Journal Asiatique $\mathbf{18}_7$, 1881, p. 184—232 e 390—459). E, mentre sarebbe stata desirabile su quest' argomento un' ampia e obbiettiva discussione, la critica del RODET non fu seguita che da una breve replica dall' EISENLOHR (Journal Asiatique $\mathbf{19}_7$, 1882, 515—518).

[5] Che agli agricoltori esso fosse destinato, emerge dalle parole di chiusa »Dà la caccia agli insetti nocivi e ai topi, (estirpa) le varie erbe cattive, prega il Dio Ra per ottenere calore, vento ed acqua alta».

[6] Cfr CANTOR, *Vorlesungen* citate p. 23.

[7] *Esempi:* Sia $f=\frac{N}{D}$ una frazione propria, ridotta alla sua più semplice espressione. Si divida D per N e si designi con q il quoziente ed r il resto. Sarà

$$D=Nq+r, \qquad r<N$$

epperò

$$\frac{1}{q+1}<\frac{N}{D}<\frac{1}{q}.$$

Ne viene che, chiamando f_1 e f_1' due nuove frazioni proprie si potrà

$$f=\frac{1}{q}-f_1, \qquad f=\frac{1}{q+1}+f_1'.$$

Applicando a f_1 la prima di queste formole e a f_1' la se-

conda e così proseguendo, si avranno due decomposizioni del seguente tipo

$$f = \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \ldots$$

$$f = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q'_2} + \ldots$$

ognuna con un numero finito di termini; la prima è dovuta a LAMBERT (cfr. LAGRANGE, *Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions*, Oeuvres complètes T. VII, p. 297) e non corrisponde al metodo di decomposizione egiziano; vi corrisponde invece la seconda che fu additata da SYLVESTER (*On a point in the theory of vulgar fractions*, American journal of mathematics **3**, 1880, p. 332 e 388).

[8] Valga a provarlo in primo luogo il preludio alla tabella e in secondo luogo il fatto che nelle parti ultime del Papiro non vengono sempre utilizzati i risultati ottenuti nelle prime (ad es. nel probl. 33 non si approfitta del valore già trovato per $\frac{2}{77}$).

[9] Cfr FAVARO, l. c. pag. 106.

[10] Quanto alle ragioni che consigliarono la scelta fra le varie forme di sviluppo, è forse vano tentare di scoprirle visto che possono provenire o dalle opinioni del calcolatore o dai fini speciali a cui i risultati dovevano servire. In generale sembrano evitate le decomposizioni conducenti a numeri molto grandi (tanto che non s'incontrano mai denominatori di 4 cifre) e prescelte quelle che si presentano più spontaneamente.

[11] Alludo a quelli in cui si deve determinare una frazione che unita ad un' altra dia per somma un numero dato (intero o fratto).

[12] Anche nei calcoli conservatrici si notano delle lacune che non si possono spiegare se non come indizii di calcoli eseguiti a memoria.

[13] Lo stesso faremo in seguito anche senza avvertirlo espressamente.

[14] Nel Papiro originale la frazione $\frac{1}{188}$ è illegibile in causa di una rottura.

[15] Si veggano specialmente i calcoli *Seqem* illustrati da EISENLOHR l. c. p. 35—42.

Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Nombre de peuples ont terminé leur cours de vie historique après en avoir traversé toutes les phases, à partir des premiers débuts jusqu'à la décadence postérieure et l'extinction finale. Tels sont les Egyptiens, les Chaldéens, les Indous et les Grecs. Nous avions dit[1] que l'état actuel de l'histoire nous permet de considérer l'ensemble de l'activité scientifique seulement chez les Grecs. Nous en avons esquissé aussi le tableau concernant le progrès mathématique. Ce tableau comprend trois phases distinctes: 1° L'appropriation des connaissances que l'humanité possédait déjà. 2° Le progrès indépendant de la science. Commencé sous l'influence de plus en plus décroissante des maîtres, il est bientôt entièrement dominé par le génie de la nation elle-même. 3° L'époque de la décadence. Les travaux mathématiques laissent à désirer sous le rapport de la qualité autant que sous celui de la quantité. Le génie grec se soumet à des influences étrangères et cette soumission n'est que trop prouvée par un accroissement d'ouvrages dans les domaines et les directions le moins propres à l'esprit grec. Enfin tout semblant d'originalité s'éteint dans les écrits des mathématiciens grecs.

Tentons maintenant un aperçu des progrès successifs dans les mathématiques chez les autres peuples de l'Europe.

Les Romains furent la première nation civilisée que heurtèrent si souvent les Celtes d'abord, les Germains et les Slaves ensuite. A l'Orient, après le démembrement de l'Empire, il y a les Bysantins, descendants dégénérés d'un peuple glorieux. Les jeunes races européennes eurent donc à recevoir de ces deux nations, et de la première surtout, le dépôt scientifique légué par l'antiquité. Voyons, quelle a été l'oeuvre des maîtres et ce qu'ils ont transmis aux élèves.

Nous venons de dire que les Bysantins étaient une race dégénérée. Quant à la nation romaine, barbare sous plus d'un point, elle s'était consumée en entreprises guerrières et ne fut accessible à des intérêts plus élevés qu'en touchant à la décadence et à la dégénération. Les Romains s'étaient vite approprié le côté extérieur et pour la plupart négatif de la civi-

lisation grecque. Il n'en fut point ainsi pour le fin fond de l'intelligence hellénique. En science comme en philosophie, les Romains restèrent à tout jamais de faibles disciples des Grecs, n'avançant pas au delà de l'élémentaire et des applications pratiques. Les élèves des Romains n'eurent donc pas grand'chose à recevoir de leurs maîtres.

Les habitants du Bas-Empire étaient à même de donner davantage, si non en vertu des connaissances qu'ils possédaient, du moins a l'aide des trésors littéraires et scientifiques qu'ils avaient hérités. Mais leur situation géographique les isolant de la plus grande partie de l'Europe, ils ne pouvaient user de leur influence que de par l'Italie.

Pour l'Europe adolescente il y a pourtant un avantage dans la faiblesse de ses maîtres: elle les comprend plus facilement. Néanmoins, les connaissances qu'ils transmettent se répandent fort lentement. La marche en devient plus rapide à mesure que s'accomplit la fusion des Romains, affaiblis et agonisants, avec les tribus germaines dont la presqu'île est envahie. Une nation nouvelle se forme alors dans ce pays, une nation qui surpasse en culture les jeunes races européennes et que le lecteur devine être les Italiens. En effet, soit qualités héritées des ancêtres indigènes civilisés, soit dépôt esthétique et intellectuel conservé malgré les invasions, les Italiens occupent la première place dans la vie intellectuelle de l'Europe pendant tout le Moyen âge, comme au début de l'histoire moderne. En donnant au monde le créateur de l'érudition monastique, tel que CASSIODORE, l'Italie fit participer le clergé aux intérêts littéraires et en partie scientifiques. Elle le rendit donc promoteur des connaissances romaines parmi les jeunes peuples européens. Cette impulsion donnée au clergé se répandit quoique lentement en dehors de l'Italie. Les peuples le plus rapprochés des Italiens par la culture en furent touchés les premiers et la transmirent par dégrés à des voisins plus arriérés. Comme représentants principaux de ce mouvement citons au 7[e] siècle le célèbre ISIDORE en Espagne, au 8[e] siècle le moine écossais BÈDE le Vénérable et le savant ALCUIN dans la Grande Bretagne. Pour le domaine mathématique nous avons l'illustre GERBERT, qui, dans les dernières années de sa vie, occupa le saint-siège sous le nom de Silvestre II. Avec lui se clôt la première phase du progrès mathématique en Europe occidentale, celle de l'appropriation de la science romaine († 1003).

Après les Romains ce sont les Arabes qui continuent leur oeuvre civilisatrice. Voyons ce que l'Europe va recevoir en fait

des mathématiques de ces maîtres nouveaux et à une culture supérieure. Les Arabes avaient reçu leurs premières connaissances mathématiques des Indous; cela fait, ils puisèrent avec toute la fougue de jeunesse aux trésors laissés par les mathématiciens grecs. La précocité intellectuelle les empêcha toutefois de posséder à fond les tendances et l'esprit des mathématiques grecques et ils travaillèrent toujours dans la direction arithmético-algébrique, héritée des Indous. Cela a peutêtre pour cause que la science indoue ne fut point transmise aux Arabes dans l'exposé sévèrement scientifique d'un EUCLIDE, d'un ARCHIMEDES ou d'un APOLLONIOS, mais sous des formes plus simples et dont les différentes *Siddhantas* nous donnent une idée.

Quoique les Arabes n'aient pas réussi à s'approprier en entier l'oeuvre des Grecs, ce qu'ils importaient en Europe était bien la science dans le véritable sens de ce mot, et non un recueil de connaissances pratiques auquel s'étaient bornés les Romains.

L'oeuvre civilisatrice des Arabes commence au temps de GERBERT, arrive toujours croissant à l'époque des Croisades et atteint son plus haut dégré dans celle qui les suit. Le système des chiffres indous est la première chose que les Arabes enseignent à l'Europe. Celle-ci étudie ensuite leur science mathématique et les auteurs grecs d'après leurs traductions. Aux 12^e et 13^e siècles on voit des générations entières, occupées à traduire de l'arabe, en Italie comme en Espagne. ALPHONSE X, roi de Castille, a une large part dans l'encouragement de ces travaux.

Nous avons dit que pendant tout le Moyen âge l'Italie se trouve à la tête de la vie intellectuelle de l'Europe. C'est à elle aussi que revient le rôle prédominant dans l'étude des mathématiques arabes. C'est elle qui fut la patrie des traducteurs éminents, tels que PLATON de Tivoli, GÉRARD de Crémone, GIOVANNI CAMPANO. A la fin du 12^e siècle c'est l'Italien LÉONARD de Pise, qui s'approprie la science des mathématiques arabes dans toute son étendue. Les oeuvres de ce savant deviennent la source principale à laquelle puise l'Italie et, par l'entremise des universités italiennes, l'Europe entière. Mais LÉONARD a devancé son temps de deux siècles et demie. L'appropriation générale de la science arabe en Italie n'arrive que vers 1494. Alors elle est clairement démontrée par le code d'un certain LUCA PACIUOLO. Mathématicien médiocre et homme à l'intelligence ordinaire, PACIUOLO entreprend de former un livre de tout ce que l'Europe a reçu des Arabes en fait des

mathématiques. Dans son recueil il se sert avant tout des oeuvres de LÉONARD de Pise. La fin du 15^{e} siècle peut donc être considérée comme terminant pour les peuples européens l'époque de l'appropriation des mathématiques arabes.

Le 16^{e} siècle vient appuyer à plus forte raison ce que nous venons de dire. On y voit les mathématiciens italiens, FERRO, TARTAGLIA, CARDANO, FERRARI poursuivre les recherches des Arabes dans le domaine de l'algèbre. Après avoir égalé les maîtres, les élèves continuent leur oeuvre. Une ère nouvelle s'ouvre pour la science mathématique en Europe. Nous ne saurions assez répéter cependant, que le progrès en est limité à la direction arithmético-algébrique reçue des Arabes.

Pendant tout le Moyen âge la science grecque, dans ses sources originales, est demeurée étrangère à l'Europe. Ce n'est qu'après la chute de Bysance que l'Occident se vit en possession des trésors légués par la Grèce. Or le dépôt en était trop riche et trop profond. Il arriva donc que les oeuvres classiques des géomètres grecs, mal comprises et imparfaitement retenues, furent étudiées superficiellement, sans qu'on ait cherché à descendre au fond des méthodes elles-mêmes. Les élèves se sont trouvés incapables de continuer l'oeuvre des maîtres. S'il y a pourtant des progrès géométriques à noter c'est encore sur un fond arithmético-algébrique, dans les applications de l'algèbre à la géométrie, déjà considérablement développées par les Indous et les Arabes. Cette faiblesse de la géométrie continue jusqu'à DESCARTES.

Le génie du penseur français termina les recherches antérieures sur l'application de l'algèbre à la géométrie, en rangeant celle-ci définitivement au nombre des sciences qui se développent à l'aide de algèbre ou plutôt de l'analyse. La Géométrie Analytique, cette création éminente de DESCARTES, et plus encore l'Analyse infinitésimale, découverte par NEWTON et LEIBNIZ bientôt après, fournirent enfin à la géométrie les méthodes qui lui avaient manqué dans l'antiquité et même à un géant de pensée tel que ARCHIMEDES. Dès lors la géométrie fait des progrès rapides, mais nous y insistons — sur un terrain qui lui est parfaitement étranger. C'est toujours un fond arithmético-algébrique secondé par des moyens indirects quoique étroitement liés à la géométrie. Ce n'en est point la voie directe et originale, servie par des moyens résultant de sa propre nature.

Ainsi, devenus explorateurs dans la géométrie dont le domaine leur avait été fermé si longtemps, les Européens conti-

nuèrent l'oeuvre des Grecs relativement à ce qui en faisait le sujet; mais en en méconnaissant l'esprit et les vrais moyens. Ils se laissèrent entrainer par la facilité et la rapidité à découvrir les vérités géométriques nouvelles. Ils étaient loin de s'apercevoir que dans leurs travaux ils s'écartaient de la direction purement géométrique léguée par la science grecque et que, ne traitant point la géométrie au point de vue de la synthèse, ils ne pouvaient la posséder véritablement. Ceux qui, comme DESARGUES et PASCAL, y avaient pénétré plus au fond, n'allèrent pas au delà de quelques modestes tentatives dans la voie dejà tracée par les géomètres grecs.

Ce mépris au fond involontaire de la géométrie synthétique dure jusqu'à la fin du siècle dernier, alors que les travaux de MONGE et de CARNOT en assurent le progrès en en créant les moyens. Leurs disciples et successeurs, PONCELET, STEINER, CHASLES nous font enfin assister au 19e siècle aux progrès de la géométrie dans les voies qui lui sont propres. C'est à partir de ce moment que les Européens peuvent se croire en possession complète des mathématiques grecques. Ils peuvent aussi se flatter de tenir en leurs mains le progrès futur des sciences mathématiques dans tous les domaines, comme dans toutes les directions actuellement connues.

En comparant ce qui vient d'être dit avec le mouvement des mathématiques grecques dans le tableau exposé plus haut, nous voyons que dans les deux cas le progrès successif de la nation dans la voie mathématique a suivi le même plan et traversé les mêmes phases. L'Europe a terminé celle de l'appropriation des connaissances, antérieurement acquises par l'humanité; elle a aussi fait immensément dans celle qui suit et qui est l'époque du progrès original de la science. Mais jusqu'où elle s'y est avancée et a-t-elle touché au point culminant, après lequel vient le déclin, ainsi que le soutiennent quelques auteurs, c'est ce qu'en notre qualité de contemporains nous ne sommes pas à même de juger.

[1] BOBYNIN, *Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques.* Biblioth. Mathem. 1892, 1—2.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

F. Müller. ZEITTAFELN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, PHYSIK UND ASTRONOMIE BIS ZUM JAHRE 1500, MIT HINWEIS AUF DIE QUELLEN-LITERATUR. Leipzig, Teubner 1892. 8°, IV + 103 + (1) p.

Le but de cet ouvrage est, d'une part de rendre compte, en ordre chronologique, tant des savants qui ont contribué aux progrès des sciences mathématiques que de leurs principales découvertes, d'autre part de servir de guide pour ceux qui veuillent approfondir l'étude de l'action scientifique d'un certain mathématicien et qui, par conséquent, ont besoin de connaître quels écrits il faut consulter à cet effet. Conformément à l'indication du titre, M. MÜLLER n'a pas continué ses *Zeittafeln* au delà de l'an 1500, sans doute parce que, pour ce qui concerne les mathématiques modernes, il faut procéder d'une manière un peu différente.

Pour donner une épreuve du plan adopté par M. MÜLLER, nous reproduisons ici les lignes qu'il a consacrées à LEODAMAS (p. 13):

> 380. **Leodamas** von Thasos. Schüler des Platon, der für ihn die analytische Methode geschaffen haben soll, mit deren Hilfe Leodamas vieles neue in der Geometrie entdeckte.

A la fin de l'écrit, on trouve une table alphabétique des noms et des matières, qui en fait l'usage plus commode.

Il va sans dire qu'il est actuellement impossible de rédiger un compendium tel que celui de M. MÜLLER dont toutes les indications soient exactes. Ainsi p. ex. l'auteur du commentaire sur le *Centiloquium*, auquel fait allusion M. MÜLLER à la page 60, n'est pas IBN RIDHWAN, mais AHMED BEN JUSUF (voir Biblioth. Mathem. 1891, p. 42). De même, d'après ce qui a montré GOVI, LEONARDO DA VINCI ne s'est pas servi des signes + et —, comme l'indique M. MÜLLER. Mais en général, autant que nous avons pu les contrôler, les notices de M. MÜLLER sont exactes. — Pour ce qui concerne les renseignements bibliographiques, il est très difficile de faire un choix juste parmi les nombreux ouvrages et notes historiques parues jusqu'à présent, et il est impossible de faire le choix d'une manière qui satisfasse à tous. De notre côté, nous avons très peu à objecter à la partie bibliographique du livre; nous nous permettons seulement de faire observer que, à notre avis, l'écrit de BIERING (p. 9), qui est un simple plagiat, ne mérite pas

d'être mentionné, mais que, d'autre part, en parlant de BEHAIM, M. MÜLLER aurait dû indiquer l'intéressant écrit de M. GÜNTHER *Martin Behaim* (Bamberg 1890) et la note du même auteur *Die erste Anwendung des Jakobsstabes zu geographischen Ortsbestimmungen* citée déjà à la page 77.

En somme, l'ouvrage de M. MÜLLER est très utile, et nous le recommandons vivement aux étudiants de l'histoire des mathématiques, auxquels il facilitera sans doute l'étude de cette science; nous espérons aussi avec l'auteur que son travail sera un moyen de propager l'intérêt pour des recherches historiques dans le domaine des mathématiques.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

F. Rudio. ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE. VIER ABHANDLUNGEN ÜBER DIE KREISMESSUNG. DEUTSCH HERAUSGEGEBEN UND MIT EINER ÜBERSICHT ÜBER DIE GESCHICHTE DES PROBLEMS VON DER QUADRATUR DES ZIRKELS VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS AUF UNSERE TAGE VERSEHEN. Leipzig, Teubner 1892. 8°, VIII + 166 p.

En 1890, M. RUDIO, publia dans le tome 35 de la Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich une notice historique sur la quadrature du cercle. L'écrit dont nous allons rendre compte contient un remaniement complet de cette notice et une traduction ou reproduction de quatre ouvrages importants sur le rapport de la circonférence d'un cercle au diamètre, savoir: 1) ARCHIMEDES: *Κύκλου μέτρησις*; 2) HUYGENS: *De circuli magnitudine inventa*, paru en 1654; 3) LAMBERT: *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur des Circuls suchen*, parues en 1770; 4) LEGENDRE: *Note où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son carré sont des nombres irrationnels*, parue en 1794.

Sans doute, l'histoire du problème de la quadrature du cercle doit être considérée comme la meilleure introduction à l'étude de l'histoire des mathématiques, d'une part parce que le problème dont il s'agit est le plus populaire des mathématiques pures, d'autre part parce que les recherches sur la quadrature du cercle ont été liées à presque toutes les branches des mathématiques avant d'être menées à fin par les travaux de MM. HERMITE, LINDEMANN er WEIERSTRASS. Tres justement, M. RUDIO fait observer (p. 68—69):

Ursprünglich eine rein geometrische Aufgabe von verhältnissmässig untergeordneter Bedeutung, hat sich die Frage

nach der Quadratur des Zirkels im Laufe der Jahrhunderte zu einem arithmetischen Probleme von der höchsten Interesse herausgebildet. Es hat Teil genommen an allen wichtigeren Wandlungen, welche die mathematischen Anschauungen und Methoden allmählich erfahren haben, es ist mit ihnen und durch sie im Laufe der Zeit selbst umgestaltet worden bis sich schliesslich die Fragestellung so abklärte und präzisierte, dass eine bestimmte Antwort gegeben werden konnte.

L'exposition que donne M. RUDIO de l'histoire de la quadrature du cercle est en même temps très complète et très succincte, et nous sommes convaincu qu'il réussira dans son dessein »das Interesse für historisch-mathematische Studien zu wecken und zu fördern». Quant aux quatre écrits annexés à la notice historique, ils méritent tous d'être étudiés par les jeunes mathématiciens de nos universités et par les élèves des écoles normales; aux derniers, le travail de HUYGENS fournira en particulier des leçons utiles aussi au point de vue pédagogique.

En terminant cette courte annonce du livre de M. RUDIO, nous regrettons seulement qu'il n'y ait pas ajouté à la fin une table alphabétique des noms des auteurs cités; on ne peut pas trop insister sur l'utilité d'une telle table pour quiconque veuille consulter un ouvrage historique.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1892: 3. — [Analyse de l'année 1891:] Fiziko-matem. naouki **11**, 1892, 31—36. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
1892: 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
37 (1892): 3—6.

°**Berlet, B.,** Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coss von Adam Riese. Frankfurt a/M. 1892.
8°, 64 p. + portr. + facsim. — [1 Mk.]

Besthorn, R. O., Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa.
Biblioth. Mathem. 1892, 65—66.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. **2**: 3 [1787—1791]. Москва 1890—1892.
8°, (2) + 161 + (1) p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» **9** (1890).

Braunmühl, A. v., Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts.
| Katalog der mathematischen Ausstellung zu Nürnberg 1892. 35 p.

Cajori, F., Evolution of criteria of convergence.
New York, Mathem. Soc., Bulletin **2**, 1892, 1—10.

°**Derousseau, J.**, Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti. Bruxelles, Hayez 1892.
8°, 52 p. + 1 pl.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1892, 85—90.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Volumen I. DIOPHANTI quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893.
8°, IX + 481 p.

Favaro, A., Studi italiani sulla storia della matematica.
Biblioth. Mathem. 1892, 67—84.

Fergola, E., Per Annibale de Gasparis.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconti **6**$_2$, 1892, 65—66. — Nécrologie.

Galilei, G., Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem italiänischen übersetzt und erläutert von E. STRAUSS. Leipzig, Teubner 1892.
LXXIX + 585 p. — [Analyse:] Zeitschrift für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 213—215. (CANTOR.)

Gerhardt, C. J., Desargues und Pascal über die Kegelschnitte.
| *Berlin*, Akad. d. Wissensch., Mittheilungen 1892. 22 p.

°**Graves, R. P.**, Life of sir W. R. Hamilton. Addendum. London 1892.
8°. — [1 Mk.]

Heiberg, J. L., Die von Wilhelm von Moerbek benutzten Handschriften.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 81.

Lampe, E., La formule de Snell ou d'Ozanam appartient à Nicolas de Cusa.
Mathesis 2_2, 1892, 230—231.

Martin, A., Note on an error in Ball's History of mathematics.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1892, 10—11.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892.
8°, IV + 103 + (1) p. — [2·40 Mk.]

Narducci, E., Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. B. Boncompagni. Seconda edizione. Roma 1892. 4°.

Nesselmann, G. H. F., Anmerkungen zu Diofant [mitgeteilt von M. Curtze].
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 121—146, 161—192.

Ovidio, E. d', Discorso in commemorazione di Angelo Genocchi pronunciato nella inaugurazione di un busto marmoreo presso la reale accademia delle scienze di Torino addì 26 giugno 1892. Torino 1892.
8°, 19 p.

Pascal, E., Il senatore Errico Betti.
Rivista di matem. **2**, 1892, 151—153.

Pinto, L., Per Dino Padelletti.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto 6_2, 1892, 49—50. — Nécrologie.

Reyes y Prósper, V., Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos especialmente de los post-boolianos.
El progreso matem. **2**, 1892, 229—232.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892.
8°, VIII + 166 p.

ШПАЧИНСКІЙ, Э. К., Іосифъ Андреевичъ Клейберъ. (Некрологъ.)
Vjestnik elem. matem. **12**, 1892, 134—136. — Schpatschinskij, E. K., J.-A. Kleiber. Nécrologie.

СТОЛѢТОВЪ, А., ЖУКОВСКІЙ, Н. и НЕКРАСОВЪ, П., Софья Васильевна Ковалевская. Москва 1891.
8°, 55 p. + portrait. — [1 roub.] — Stoljetoff, A., Choukowskij, N. et Nekrasoff, P., Sophie Kowalevski.

Tannery, P., Sur les lettres inédites de Descartes à la bibliothèque de l'Institut.
Bullet. d. sc. mathém. 16_2, 1892, 229—232.

Tannery, P., A propos de la correspondance de Huygens.
Bullet. d. sc. mathém. 16_2, 1892, 247—255.

Index.

[redacted]

LIOTHECA MATHEMATICA

TSCHRIFT

DER MATHEMATIK

GEBEN VON

JOURNAL

D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893.

NOUVELLE SÉRIE 7.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

ENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. 1893.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893.

NEUE FOLGE 7. — NOUVELLE SÉRIE 7.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. 1893.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. Nº 1.

NEUE FOLGE. 7. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 7. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Zur Geschichte der Trigonometrie.

Von H. SUTER in Zürich.

Vor einem Jahre erschien in Konstantinopel ein Buch, betitelt: *Traité du quadrilatère, attribué à* NASSIRUDDIN EL-TOUSSY, nach einem Ms. aus der Bibliothek des Grosswezirs EDHEM PASCHA, arabisch und in's französische übersetzt durch ALEXANDER PASCHA KARATHEODORY, ehemaligen Minister der auswärtigen Angelegenheiten. Es ist diese Herausgabe ein sehr verdienstliches Werk, da sie der Geschichte der Trigonometrie eine wesentlich andere Beleuchtung gibt, als dies bis jetzt der Fall war. Obgleich dieses Werk bereits zwei französische Besprechungen erfahren hat (die eine durch CARRA DE VAUX im Journal asiatique **20**$_7$, 1892, die andere durch P. TANNERY im Bulletin des sciences mathématiques, mai 1892), so glaubte ich doch, es dürfte noch eine deutsche nachfolgen, zumal in jenen beiden Besprechungen der wesentliche Fortschritt der historisch-trigonometrischen Forschung mir nicht scharf genug hervorgehoben zu sein schien, und weil ich selbst durch genaues Vergleichen der beiden Texte des Werkes die Korrektheit der Übersetzung in allen wesentlichen Punkten nachzuweisen unternommen hatte.

Mit *Traité du quadrilatère* übersetzt KARATHEODORY das arabische *Schakl al-kattâ*, das in arabischen Bücherverzeichnissen bisweilen auftritt und »Sekantenfigur» oder »Transversalenfigur» bedeutet und nichts anderes als eine Behandlung des Satzes

des MENELAOS mit seiner Anwendung auf die Trigonometrie (anfänglich nur sphärische) ist. Bekanntlich hatte schon TÂBIT BEN KURRA eine Abhandlung unter diesem Titel geschrieben,[1] auf die auch am Schlusse seines Buches NASSIR ED-DIN verweist. Ich gebe im folgenden eine Übersicht des Inhaltes des Werkes.

Das I. Buch handelt über die Zusammensetzung der Verhältnisse; die für das folgende wichtigsten Sätze desselben sind:

1) Sind A, B, C 3 homogene Grössen, so ist stets $\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \cdot \frac{C}{B}$.

2) Aus $\frac{A}{B} = \frac{C}{E} \cdot \frac{D}{F}$ folgt: $A \cdot E \cdot F = B \cdot C \cdot D$.

Das II. Buch handelt über das *ebene* vollständige Vierseit. Hinsichtlich der verschiedenen Fälle, die stattfinden können in Bezug auf die gegenseitige Lage der 6 Schnittpunkte der 4 Geraden, ist NASSIR ED-DIN (wie übrigens auch nach seinen Angaben seine Vorgänger) nach Art und Weise der alten Geometer furchtbar weitschweifig; was man heutzutage in 2 Fällen abthut, daraus machten die Alten 48 Fälle. Mit Rücksicht auf die verschiedenen Lagen der schneidenden Linie gegenüber den drei andern geschnittenen kommt NASSIR ED-DIN auf die ungeheure Zahl von 497664 Fällen des Satzes des MENELAOS: er bemerkt hierzu allerdings, dass unter dieser Zahl der Fälle viele sind, in denen dieselben Abschnittsverhältnisse auftreten und bricht dann in die Worte aus: »Siehe, wie diese kleine Figur alle diese Verhältnisse ergibt; so hat es der Mächtige, der Weise geordnet!« Er kommt dann auf PTOLEMAIOS und bemerkt, dass dieser sich bloss auf 2 einzige Fälle beschränkt habe. Was in diesen zwei ersten Büchern auf 60 Seiten (im arabischen Text 47) gesagt ist, würde heute ein Mathematiker auf 3 Seiten abthun.

Das III. Buch enthält Vorbereitungen auf das *sphärische* vollständige Vierseit. Der erste Satz als Hülfssatz für das folgende lautet: Wenn in einem Kreise die Sehne der Summe zweier aneinanderstossender Bogen durch den vom Zusammenstosspunkt ausgehenden Durchmesser geschnitten wird, so verhalten sich die beiden Abschnitte derselben wie die Sinus der beiden Bogen. — Im 2. Capitel behandelt er die verschiedenen Auflösungsfälle des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Hierbei verfährt er zuerst ganz nach PTOLEMAIOS' Weise mit Hülfe der Sehnen der doppelten Winkel statt der Sinus (vergl. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alter-*

[redacted]

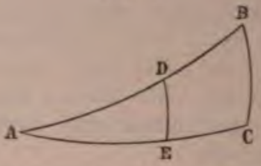
thum und Mittelalter p. 287 über Gâbir ben Aflah), gibt dann aber nachher auch die moderne Art der Berechnung mit Hülfe des Sinussatzes, den er auf zwei verschiedene Arten und jedesmal für das spitz- und für das stumpfwinklige Dreieck beweist. Den Fall zweier Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel behandelt er durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige, denjenigen der drei Seiten löst er mit Hülfe des Cosinussatzes, den er allerdings noch nicht ganz in der jetzigen Form ausspricht, sondern statt des Cosinus die Projection der einen Seite auf die andere einführt:[2] $a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$. — Im 3. Capitel wird die Aufgabe gelöst, zwei Winkel eines Dreieckes zu berechnen, wenn man ihre Summe (resp. Differenz) und das Verhältniss ihrer Sinus kennt.

Das IV. Buch geht zum sphärischen Vierseit über. Im 2. und 3. Capitel werden das sogenannte explicite und implicite Verhältniss des Ptolemaios bewiesen, d. h. in unsere Sprache übersetzt der Satz des Menelaos für die beiden Fälle, wo die Transversale entweder zwei Seiten des Dreiecks und die Verlängerung der dritten, oder alle drei Seiten in der Verlängerung schneidet; Nassir ed-Din gibt in erster Linie die Ptolemäischen Beweise dieser Sätze, dann aber auch seine eigenen, die »seinen bisherigen Entwicklungen und Principien conformer seien», und insoweit wirklich sehr consequent sind, als das sphärische Vierseit durch Konstruktion der Sehnen zu den einzelnen Bogen auf das ebene Vierseit zurückgeführt wird.

V. Buch. Die drei ersten Kapitel enthalten wieder weitschweifige Auseinandersetzungen über die verchiedenen Arten von sphärischen Dreiecken in Bezug auf die Grösse der Seiten und Winkel. In den folgenden Kapiteln geht er zur Berechnung der unbekannten Stücke aus den gegebenen über; im 5. und 6. behandelt er als Einleitung hierzu die sogenannte »*ersetzende Figur*» (Satz), *asch-schakl al mugni,* d. h. diejenige, welche die Sekantenfigur des Menelaos ersetzt, und die »*Tangentenfigur*», *asch-schakl az-zilli.* Die ersetzende Figur ist nun nichts anderes als der sphärische Sinussatz, den Nassir zuerst für das rechtwinklige und dann für das schiefwinklige Dreieck nachweist und zwar gibt er für den ersteren Fall eine Reihe von Beweisen, so einen ersten von Abû Nasr 'Ali ben 'Irâk[3] und Abû'l-Wefâ, einen zweiten und dritten von Abû Nasr, einen vierten von Abû'l-Wefâ, einen fünften von Abû'l Fadl an-Nairizi[4] (in seinem Commentar zum *Almagest*) und Abû Dscha'far al-Châzin (in seinem Buche: Untersuchungen über die Neigung der partiellen Neigungen und die Aufgänge auf der geraden

Sphäre[5]), einen sechsten von Abû Mahmûd al-Chodschendî, einen siebenten von Abû-Rihân al-Birûnî, und endlich einen achten (vielleicht von Nassir selbst?) mit Hülfe des sphärischen Vierseits. Alle diese Beweise sagen also aus, dass in einem sphärischen Dreieck mit einem rechten Winkel (Fig. 1):

Fig. 1.

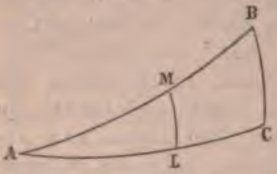


$$\frac{\sin AB}{\sin BC}=\frac{\sin C(=1)}{\sin A} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin AB}{\sin AD}=\frac{\sin BC}{\sin DE},$$

wenn E auch ein rechter Winkel ist, was Nassir so ausspricht: Die Sinus der Bogen verhalten sich wie die Sinus ihrer Neigungen.[6] Von diesen Beweisen ist unstreitig derjenige mit Hülfe des Satzes des Menelaos der eleganteste und einfachste, dann folgt ihm wohl der vierte von Abû'l-Wefâ; ich muss den Leser hierfür auf das Werk selbst verweisen um nicht zu weitläufig zu werden.[7]

Nach diesem leitet Nassir ed-Din den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck ab, dann die Formeln $\cos c = \cos a . \cos b$ und $\cos A = \cos a . \sin B$ für das rechtwinklige. Hierauf kommt er im 6. Capitel zu der sogenannten Tangentenfigur und schickt hier zuerst einige einleitende Bemerkungen über die neuen Begriffe: »Tangente« (*zill* = Schatten), »Cotangente« (*zill at-tamâm* = Tangente der Ergänzung), »Sekante« (*kutr* = Durchmesser der Tangente) und »Cosekante« (Durchmesser der Cotangente) voraus; er bemerkt hierzu, dass die *Erfindung der Tangente* unbestritten dem Abû'l-Wefâ angehöre, wie Abû Rihân al-Birûnî selbst bezeuge. Dann beweist er die Formel (Fig. 2):

Fig. 2.

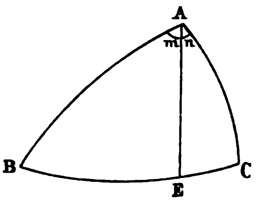


$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin AC}{\sin AL}=\frac{\operatorname{tg} BC}{\operatorname{tg} ML},$$

wenn C und L rechte Winkel sind.

Nassir spricht diesen Satz in Worten auch so aus: die Sinus der Bogen verhalten sich wie die Tangenten ihrer Breiten (analog zur »ersetzenden Figur»). Er gibt ebenfalls mehrere Beweise dafür. Als Anwendung dieses Satzes auf das schiefwinklige Dreieck gibt er die Sätze (Fig. 3):

Fig. 3.



$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin CE}{\sin BE} \text{ und } \frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n} = \frac{\operatorname{tg} BE}{\operatorname{tg} CE}.$$

Als weitere Ergebnisse der Anwendung der Tangentenfigur auf das rechtwinklige Dreieck werden die Formeln abgeleitet:

$$\cos A = \frac{\cot c}{\cot b} \text{ und } \cos c = \frac{\cot A}{\operatorname{tg} B} = \cot A \,.\, \cot B.$$

Als Beziehung zwischen 4 Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks leitet er noch ab:

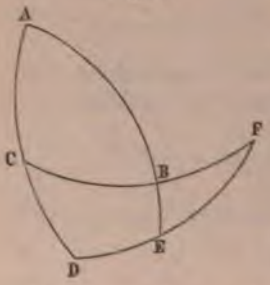
$$\frac{\cot A}{\operatorname{tg} b} = \frac{\cos c}{\sin a}.$$

In einem Schlusswort zu diesem Capitel tritt Nassir der Behauptung »hervorragender Vertreter der mathematischen Wissenschaften» entgegen, die Tangentenformel und die aus ihr abgeleiteten seien wegen des schnellen Wachsens der Tangente bei grössern Winkeln nicht mehr brauchbar; er bemerkt hierzu, dass in allen solchen Fällen die Tangente eines solchen Winkels einfach durch die Cotangente ersetzt werden könne, indem man zugleich die Multiplikation mit Division und umgekehrt vertausche. — Im 7. Capitel nun behandelt er die sechs Fälle des rechtwinkligen Dreiecks sowohl mit Hülfe der »ersetzenden Figur» (Sinussatz) und ihrer Ableitungen, als auch mittelst der »Tangentenfigur» und ihrer Folgerungen. Dann folgen die sechs Fälle des schiefwinkligen Dreiecks. Hierbei wendet er an: 1) den Sinussatz; 2) die Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke; 3) den Satz: wenn man die Summe (resp. Differenz) zweier Winkel und das Verhältniss ihrer Sinus kennt, so kann man hieraus die einzelnen Winkel finden (diesen benutzt er beim Fall: gegeben die 3 Seiten); 4) den Satz: $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin CE}{\sin BE}$ (siehe

oben). Den sechsten Fall: gegeben die 3 Winkel, führt er mittelst des Polardreieckes auf den Fall der 3 Seiten zurück. Auch die Ergänzung zweier Seiten zu Quadranten und Herstellung des vollständigen Vierseits wird zu Hülfe gezogen (doch ohne etwa hierauf den Satz das MENELAOS anzuwenden). Der Cosinussatz, den nach CANTOR (a. a. O. I, 633) und HANKEL (a. a. O. p. 281) schon AL-BATTÂNÎ gekannt hat, findet sich bei NASSIR ED-DIN nicht.[8]

Wir können nicht umhin, hier die elegante Lösung des Falles der 3 Seiten wiederzugeben. ABC (Fig. 4) sei das Dreieck, dessen 3 Seiten gegeben sind. Man vervollständige die Seiten AC und AB zu Quadranten (AD und AE) und ergänze die Figur zum vollständigen Vierseit $ADFB$. Da AC und AB bekannt sind, so kennt man auch CD und BE; nun ist $\frac{\sin CD}{\sin BE} = \frac{\sin CF}{\sin BF}$; letzteres Verhältniss ist also bekannt, ebenso die Differenz der Bogen CF und $BF = BC$, also kann nach dem oben angeführten Satze sowohl CF als BF gefunden werden, mithin sind in den rechtwinkligen Dreiecken CDF und BEF je 2 Seiten bekannt, also kann man die Winkel bei C und B berechnen, ebenso die Seiten DF und EF, kennt dann also auch den Bogen DE, der den Winkel A misst.

Fig. 4.



Am Schluss des Werkes gibt er noch einen Auszug aus dem Buche TÂBITS über die *Figur al-kattâ* und die zusammengesetzten Verhältnisse, in welchem ein besonderer, von dem Ptolemäischen verschiedener Beweis des Satzes des MENELAOS gegeben wird.

Fassen wir kurz das historische Facit zusammen: NASSIR ED-DIN stellt zum *ersten Mal* eine vollständige Trigonometrie unabhängig von der astronomischen Anwendung auf. Sie zerfällt in eine *ebene* und *sphärische;* jene wird von ihm zum ersten Mal[9] mit Hülfe der trigonometrischen Functionen, des Sinus- und Cosinussatzes der Ebene, unabhängig von der Ptolemäischen Sehnenrechnung behandelt; in dieser kennt er alle sechs Hauptformeln des rechtwinkligen Dreiecks, löst alle sechs Fälle des schiefwinkligen ohne Anwendung (wir wollen nicht sagen »Kenntniss«) des sphärischen Cosinussatzes (für den er entsprechende Surrogate hat), und führt auf elegante Weise den Fall der 3 Winkel auf denjenigen der 3 Seiten zurück. Dies

der Stand der Trigonometrie zur Zeit NASSIR ED-DINS! Was wäre da dem 15. Jahrhundert zu thun übrig geblieben, wenn es alles das gekannt hätte? Oder haben die Hauptvertreter desselben in den mathematischen Wissenschaften etwas hiervon gewusst? Diese Frage ist noch nicht endgültig entschieden.

[1] Vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 6, 1892. Sie befindet sich nach STEINSCHNEIDER (Biblioth. mathem. 1891, p. 69) in der Amplon. Sammlung als Ms. Qu. 349[16], und auch in Paris Cod. 7377 B.

[2] GÂBIR (DSCHÂBIR) BEN AFLAH benutzt in seinen *Astronomiae libri IX* den Satz in der Form: $a^2-b^2=p^2-q^2$, wo p und q die durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Seite c sind.

[3] Wird auch nur ABÛ NASR BEN 'IRÂK geschrieben. KARATHEODORY vermuthet, dass derselbe identisch sei mit dem von WENRICH p. 211 genannten Commentator der Sphaerik des MENELAOS, ABÛ NASR MANSÛR(?). Es wäre auch möglich, dass ALFARABI damit gemeint wäre, der einen Commentar zum *Almagest* (vergl. STEINSCHNEIDERS *Alfarabi*, p. 78) verfasst haben soll, der vielleicht mit dem »königlichen Almagest« identisch ist, der ihm in diesem Werke NASSIR ED-DINS (p. 125 des arab. Textes, p. 162 der Übersetzung) zugeschrieben wird.

[4] Sein richtiger Name ist ABÛ'L-ABBÂS AL-FADL BEN HÂTIM AN-NAIRIZI, vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* a. a. O.

[5] KARATHEODORY übersetzt unrichtig: »introduction sur la sphère droite«. »Neigung der partiellen Neigungen« ist wahrscheinlich die »totale Neigung (Schiefe)« der arabischen Astronomen.

[6] Diese Ausdrucksweise ist aus der Astronomie entlehnt: AB und AD sind Bogen der Ekliptik, BC und DE ihre Neigungen (Schiefen) zum Aequator.

[7] Aus den Namen der hier angeführten Autoren der verschiedenen Beweise des Sinussatzes, die alle vor DSCHÂBIR BEN AFLAH gelebt haben (vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* a. a. O.) ergibt sich, dass die bisherige Annahme, der letztere Mathematiker sei der erste, der diesen Satz ausgesprochen habe (vergl. HANKEL, a. a. O. p. 285, 286 und CANTOR, *Vorl. über Gesch. der Mathem.* I, 682, 683) wohl nicht mehr haltbar ist, ja nach einer Stelle NASSIRS (p. 125 d. Textes, p. 162 d. Übersetzung) hatte sogar schon TÂBIT BEN KURRA die »ersetzende Figur« behandelt, ABÛ NASR ihr aber erst

diesen Namen gegeben; AL-BIRÛNÎ dagegen behaupte, dass der Name von KUSCHJÂR BEN LEBBÂN (vergl. CANTOR, a. a. O. I, p. 654) herstamme. Wir kommen auf diese historischen Fragen gelegentlich noch näher zu sprechen.

[8] Bei AL-BATTÂNÎ findet sich der sphärische Cosinussatz im 11. Cap. seiner *Scientia stellarum*, das »de azimuth» überschrieben ist, aber in einer schwer verständlichen Form.

[9] Damit wollen wir nicht etwa behaupten, dass er hierin ohne Vorgänger gewesen sei, wir kennen bis jetzt einfach keine solche.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

4. Théorie des congruences.

Dans la *Philosophie des mathématiques,* WRONSKI attribue une grande importance à la notion de congruence établie par GAUSS. Il dit que ce principe et son application forment la plus belle découverte faite depuis cinquante ans dans les mathématiques pures; c'est, selon lui, dans l'histoire de ces sciences, une époque hors de comparaison avec tout ce qui a été fait dans l'intervalle indiqué. Il faut dériver la notion de congruence de la loi citée plus haut pour les fonctions alephs, qu'il écrit sous la forme

$$\aleph[N_\omega - n_p]^{(m)} \equiv \aleph[N_\omega - n_q]^{(m)} \pmod{n_q - n_p};$$

WRONSKI donne un essai d'une méthode générale pour la résolution des congruences de tous les ordres et degrés, qui consiste à ramener les congruences données à la forme de cette loi et dans la détermination des éléments n. Dans les travaux postérieurs et nommément dans la *Réforme du savoir humain,* I, il modifie le point de départ. Il voit ici le fondement de toute la théorie des nombres dans la loi dite »téléologique» donnant la résolution de la congruence binôme $x^m \equiv a \pmod{M}$, et il réduit tous ces problèmes, par une transformation convenable, à cette forme fondamentale. Ces formules »téléologiques», constituant »la troisième loi de l'Algorithmie» de WRONSKI et données par lui sans déduction, ont la forme suivante:[28]

$$a = (-1)^{\omega+1}\left\{h(1^{k/1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m \aleph\left[\frac{M}{(1^{k/1})^2}, \omega\right]^{\omega-2} + Mi,$$

$$x = h + (-1)^{\pi+k} \aleph\left[\frac{M}{(1^{k/1})^2}, \pi\right]^{\pi-1} + Mj,$$

$$M = \text{fact}\left[a(1^{k/1})^{2m} - \left\{h(1^{k/1})^2 - (-1)^{k+1}\right\}^m\right].$$

La dernière formule signifie que le module M doit être un facteur de l'expression renfermée dans les crochets [ ]; i et j sont nombres entiers arbitraires; k et h sont des nombres entiers jouant un rôle principal dans la méthode de WRONSKI. Le premier est nommé *genre,* le second *espèce.* Le nombre k est originairement tout nombre positif et entier compris entre zéro

et la moitié de module diminué de l'unité, lorsque ce module est un nombre premier ou bien généralement entre zéro et la moitié pareille du plus petit nombre premier parmi les facteurs de ce module. Le nombre h est originairement tout nombre entier positif ou négatif, y compris zéro, plus petit que le module M. La congruence binôme donnée peut donc être envisagée comme un cas particulier de la congruence binôme générale:

$$X(k, h)^m \equiv A(k, h) \pmod{M},$$

et les formules de WRONSKI expriment alors les relations qui doivent exister entre les nombres donnés de la congruence; les valeurs spéciales des nombres caractéristiques k et h indiquent les cas dans lesquels la congruence est résoluble ou non en nombres entiers (sous la forme donnée par WRONSKI).

Sur cette base sont développées les méthodes concernant la résolution des problèmes de la théorie des congruences, nommément la résolution des congruences $z^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$, le problème de décomposition des nombres entiers en facteurs, la résolution des congruences de la forme

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m \equiv 0 \pmod{M},$$

ainsi que des congruences des ordres supérieurs (avec plusieurs inconnues) et des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés.

La simplicité et la fécondité de ces méthodes méritent notre attention.[29] Partout y entrent les nombres caractéristiques k et h, c'est à dire les »éléments» des quantités inconnues. Les quantités inconnues dans les questions de la théorie des nombres échappent, comme dit WRONSKI, à la loi de continuité et se rangent au contraire et exclusivement sous la loi d'isolément, c'est à dire sous la loi de singularité où elles ne peuvent être atteintes méthodiquement que par leurs éléments »philosophiques», leur genre k et leur espèce h.

Il faut aussi mentionner la formule de WRONSKI dans laquelle il réunit les théorèmes de FERMAT et de WILSON:

$$(a\omega + 1)^{k/1} \cdot (b\omega + 1)^{\omega - k - 1/1} + (-1)^k x^{\omega - 1} \equiv 0 \pmod{\omega}$$

ω étant un nombre premier, a et b des nombres entiers arbitraires, x un nombre entier premier avec ω; $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(a-1)$. La démonstration du théorème de FERMAT est analogue à celle de GAUSS dans les *Disquisitiones* (art. 51), avec cette différence que le point de départ de WRONSKI est un peu plus général.

Gauss part de la somme $S = n_1 + n_2 + \ldots + n_x$, et en élévant les deux membres de cette égalité à la puissance ω il obtient

$$S^\omega \equiv n_1^\omega + n_2^\omega + \ldots + n_x^\omega \pmod{\omega}.$$

Wronski, au lieu des puissances, prend la factorielle

$$S^{\omega/\mu\omega} = (n_1 + n_2 + \ldots + n_x)^{\omega/\mu\omega}$$

et obtient la congruence

$$S^{\omega/\mu\omega} \equiv n_1^{\omega/\mu\omega} + n_2^{\omega/\mu\omega} + \ldots + n_x^{\omega/\mu\omega} \pmod{\omega}$$

de laquelle il résulte que si $n_1 = n_2 = \ldots = n_x = n$,

$$(xn)^{\omega/\mu\omega} \equiv x(n)^{\omega/\mu\omega} \pmod{\omega}$$

d'où pour $n = 0$ on obtient le théorème de Fermat.

5. Canons de logarithmes.

Ces canons avaient été construits par Wronski plusieurs années avant leur publication (en 1827). Ils se distinguent parmi toutes les tables connues par le moindre volume, car ils se réduisent à une petite table qu'on peut embrasser d'un seul coup d'oeil. Leur construction est fondée sur la formule de la théorie des différences

$$F(x + t) = F(x) + \frac{t}{1 \cdot h} \Delta_h F(x) + \frac{t(t-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2} \Delta_h^2 F(x)$$

qui étant appliquée aux logarithmes conduit à l'équation:

$$\begin{aligned} &\log(\omega a + \omega m + \omega z) \\ &= \log(\omega a) + \Delta_m \log a + z\Delta_1 \log(a + n) \\ &+ \left(1 - \frac{m}{n}\right) z \left\{ \Delta_1 \log a - \Delta_1 \log(a + n) \right\} - z \frac{m(n-m)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 \log a; \end{aligned}$$

m et $a < n$ sont ici deux nombres quelconques, $z < 1$ et ω un facteur arbitraire. Les quantités ωa, ωm, ωz sont les parties »initiale», »moyenne» et »finale» du nombre donné; les parties correspondantes du logarithme sont respectivement:

$$\log \omega a,$$

$$\Delta_m \log a,$$

$$\begin{aligned} &z\Delta_1 \log(a + n) \\ &+ \left(1 - \frac{m}{n}\right) z \left\{ \Delta_1 \log a - \Delta_1 \log(a + n) \right\} - z \frac{m(n-m)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 \log a. \end{aligned}$$

Toutes ces parties des nombres et des logarithmes sont disposées de manière qu'on peut les trouver facilement par le prin-

cipe de l'intersection des lignes horizontales avec des lignes verticales. L'interpolation à l'aide de l'expression $2\frac{m(n-m)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 \log a$ n'est nécessaire que pour la partie finale.

WRONSKI a construit six canons: le n° 1 avec 4 figures décimales des logarithmes; les nos 1^{bis}, 2 et 3 avec 5 décimales, le n° 3^{bis} avec 6, enfin le n° 4 avec 7 figures décimales.

6. Fonctions trigonométriques des ordres supérieurs.

La science doit à WRONSKI l'introduction dans l'analyse de ces transcendantes nouvelles. Dans la *Philosophie des mathématiques* il donne leur définition et un aperçu de leur théorie qu'il développe plus tard dans la *Technie algorithmique* et dans la *Réforme du savoir humain*. Le mémoire d'OLIVIER[30] (1827) cité par GÜNTHER[31] comme le premier dans ce domaine d'analyse est donc fort postérieur aux recherches de WRONSKI. La théorie de WRONSKI est très complète et générale. Il définit ces fonctions par l'équation

$$a^{x\psi(m,n)} = f_0 x + f_1 x\psi(m, n) + f_2 x\psi(m, n)^2 + \ldots + f_{m-1} x\psi(m, n)^{m-1}$$

où

$$\psi(m, n) = \left\{(-1)^n\right\}^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{n\pi}{2m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2m}.$$

Les fonctions $f_0 x, f_1 x, \ldots, f_{m-1} x$ sont nommées fonctions transcendantes ou sinus de l'*ordre* $m-1$ et de plus du *genre elliptique*, lorsque le nombre n est impair, du *genre hyperbolique*, quand ce nombre est pair. La fonction $f_0 x$ (le sinus du degré 0) est dite aussi le cosinus. De la formule fondamentale on tire l'expression générale

$$f_\mu x = \frac{(-1)^\mu}{m}\Big\{\psi(m, n_1)^{m-\mu} a^{x\psi(m,n_1)} + \psi(m, n_2)^{m-\mu} a^{x\psi(m,n_2)} + \ldots$$
$$\ldots + \psi(m, n_m)^{m-\mu} a^{x\psi(m,n_m)}\Big\},$$

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ étant des valeurs différentes du nombre n entre 1 et $2m$. WRONSKI énonce les propriétés principales de ces nouvelles transcendantes.

La première propriété correspond à la relation fondamentale des sinus et cosinus ordinaires, c'est à dire à la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et elle s'exprime p. ex. pour le cas du genre elliptique et du troisième ordre par la formule:

$$f_0 x^2 + f_1 x^2 + f_2 x^2 + f_3 x^2 = a^{x\sqrt{2}} + a^{-x\sqrt{2}}.$$

Une deuxième propriété (le théorème d'addition) est représentée pour le même cas par les équations

$$
\begin{aligned}
f_0(x+y) &= f_0x f_0y - f_2x f_2y - f_1x f_3y - f_3x f_1y \\
f_1(x+y) &= f_1x f_0y + f_0x f_1y - f_3x f_2y - f_2x f_3y \\
f_2(x+y) &= f_0x f_2y + f_2x f_0y + f_1x f_1y - f_3x f_3y \\
f_3(x+y) &= f_3x f_0y + f_0x f_3y + f_1x f_2y - f_2x f_1y .
\end{aligned}
$$

Une troisième propriété consiste dans le retour périodique des différentielles de ces fonctions. On a par exemple dans l'ordre ρ pour le genre elliptique (si l'on fait $a=e$)

$$
\begin{aligned}
df_0x &= -f_\rho x\,dx \\
df_1x &= +f_0x\,dx \\
df_2x &= -f_1x\,dx \\
&\cdots\cdots\cdots \\
df_\rho x &= +f_{\rho-1}x\,dx .
\end{aligned}
$$

Une autre propriété est la détermination de ces fonctions pour un multiple quelconque de la variable au moyen de puissances de ces mêmes fonctions simples. On a la formule générale

$$
\left\{ \Sigma_\mu f_\mu x \psi(m\,,\,n)^\mu \right\}^\xi = \Sigma_\mu f_\mu(\xi x)\,\psi(m\,,\,n)^\mu .
$$
$$
(\mu=0,1,2,\ldots,n-1)
$$

Une fonction quelconque des sinus et des cosinus supérieurs peut être développée par rapport à ces mêmes sinus et cosinus des multiples progressifs de la variable; Wronski indique le moyen d'y parvenir. On doit aussi à lui l'application de ces fonctions à l'intégration des équations différentielles. Il attribue à ces nouvelles transcendantes un rôle important dans la science future. »Déjà même», dit-il, »l'usage des sinus et des cosinus du premier ordre est, comme on sait, indispensable dans l'astronomie, dans la mécanique céleste et dans toutes les hautes questions de la physique; et cependant ces fonctions périodiques du premier ordre ne font que revenir sur elles-mêmes, sans aucun accroissement ni décroissement dans ce retour périodique. Mais comme on trouve, dans les mouvements des astres, des écarts de leur état moyen ou plutôt des oscillations continues qui, indépendamment de leurs retours périodiques, impliquent des accroissements et des décroissements continus et alternatifs, il est évident que nos transcendantes des ordres supérieurs pourront seules représenter leurs mouvements.»

Les travaux d'APPELL, de GLAISHER, de NIKODEMI, cités par GÜNTHER,[32] d'YVON VILLARCEAU,[33] de FARKAS,[34] de WEST,[35] de J. C. et W. KAPTEYN[36] ont développé la théorie de ces transcendantes. Et les travaux récents de SCHAPIRA[37] qui ouvrent uue nouvelle voie à des recherches fort intéressantes, dérivent quoique indépendamment de la même source qui a inspiré l'auteur de la *Philosophie des mathématiques*.

[28] HANEGRAEFF, a démontré les formules de WRONSKI dans la *Note sur l'équation de congruence* $x^m \equiv r \pmod{p}$ (Paris 1860). Voir aussi BUKATY, *Déduction et démonstration de trois lois primordiales de la congruence des nombres etc.* (Paris 1873).

[29] J'ai donné un aperçu de ces méthodes de WRONSKI dans l'écrit: »Les principes de la théorie des nombres de HOENE-WRONSKI» (en polonais; Cracovie 1892). Voir aussi la note: »Sur la résolution de la congruence $z^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$» (ibid. 1893).

[30] OLIVIER, *Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben wie die Cosinus und Sinus.* Journal für Mathem. **2**, 1827, 243—251.

[31] GÜNTHER, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle 1881), p. 395.

[32] GÜNTHER, l. c., chapitre IV.

[33] VILLARCEAU, *Théorie des sinus des ordres supérieurs.* Comptes rendus des séances de l'acad. des sciences [de Paris] **86**, 1878, 1160—1166, 1216—1222, 1287—1290. — *Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles.* Ibid. **90**, 1880, 721—727, 767—769. — *Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs.* Ibid. **91**, 1880, 195—197.

[34] FARKAS, *Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs.* Comptes rendus etc. **91**, 1880, 544—547. — *Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires.* Ibid. **91**, 1880, 1543—1545.

[35] E. WEST, l. c., p. 298—308.

[36] J. C. KAPTEYN et W. KAPTEYN. *Les sinus de quatrième ordre.* Archives néerland. d. sc. exactes **24**, 1885, 1—98. — *Die höheren Sinus.* Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. zu Wien; (Mathem. Cl.) **93**, 1886, 807—868.

[37] H. SCHAPIRA, *Grundlagen zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen* (Leipzig 1881). — *Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen.* I (Leipzig 1892).

Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli.

Nota di ANTONIO FAVARO in Padova.

La menzione fatta dall' illustre MAURIZIO CANTOR[1] di due diverse edizioni dell' *Algebra* di RAFAEL BOMBELLI, respettivamente pubblicate a Venezia nel 1572 ed a Bologna nel 1579 diede occasione ad un quesito dal ch^{mo} G. ENESTRÖM[2] nel quale, posta in chiaro la inesattezza per cui le due anzidette edizioni sarebbero state pubblicate in città diverse, mentre, qualunque sia il giudizio che intorno ad esse possa formarsi, figurano pubblicate ambedue »In Bologna», avvertito che il RICCARDI nella pregevolissima sua *Biblioteca matematica Italiana* accenna a credere trattarsi di due edizioni distinte,[3] mentre il BONCOMPAGNI afferma trattarsi di una edizione unica, cioè di quella del 1572,[4] della quale alcuni esemplari portano nel frontespizio il millesimo MDLXXII ed altri il MDLXXIX, si domanda se effettivamente l'opera del BOMBELLI sia stata nel 1579 ristampata.

La Biblioteca Universitaria di Padova possiede un esemplare di quest' opera con la data del MDLXXII ed un altro con quella del MDLXXIX, ed ho perciò stimato opportuno istituire sopra di essi un diligente esame allo scopo di rispondere al suaccennato quesito.

L'esemplare segnato »SN 11234» ha il titolo seguente: L'ALGEBRA | PARTE MAGGIORE | DELL' ARITMETICA | DIVISA IN TRE LIBRI | DI RAFAEL BOMBELLI | DA BOLOGNA | *Nouamente posta in luce.* | *IN BOLOGNA* | *Nella stamperia di Giouanni Rossi* | *MDLXXII.* | Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Nel qual titolo la parola »nouamente», non è già da interpretarsi nel senso di nuova edizione, ma bensì che l'opera è di fresco data alla luce. Consta questo esemplare di 710 pagine, delle quali le 1^a—56^a, 707^a—710^a non sono numerate, le 57^a—706^a sono numerate 1—650, e le 3^a—8^a contengono una lettera dedicatoria indirizzata nella prima di queste sei pagine »AL REVER^{MO} | MONS. IL SIG. | ALESSANDRO RVFINI | VESCOVO DIGNISSIMO | DI MELFI | SIGNORE E PADRON SVO | SEMPRE OSSERVANDISS. | Rafael Bombelli da Bologna.»

L'esemplare segnato »XXXI. 277» e che porta il timbro del primo regno italico, è intitolato:

L'ALGEBRA | OPERA | DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna | Diuisa in tre Libri. | *Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta | cognitione della teorica dell' Aritmetica.* | Con una Tauola copiosa delle materie, che | in essa si contengono. | *Posta hora in luce a beneficio degli studiosi di | detta professione.* | IN BOLOGNA, | Per Giouanni Rossi. MDLXXIX. | *Con licenza de' Superiori.*

Si compone di 710 pagine, delle quali le 1ª—56ª, 707ª—710ª non sono numerate, le 57ª—706ª sono numerate 1—650; le 57ª—710ª sono identiche colla 57ª—710ª della anzidetta edizione del 1572 e le 3ª—56ª contengono ciò che trovasi nelle pag. 3ª—56ª della edizione stessa, con questa differenza che le tre carte contenenti la suaccennata dedicatoria vennero effettivamente ristampate, mentre non lo furono le altre contenenti l'indice delle materie: il testo delle suddette lettere, ristampato pagina a pagina e linea a linea è indirizzato: »AL REVERENDISSIMO | MONSIGNOR, IL SIGNOR | ALESSANDRO RVFINI, | VESCOVO DIGNISS. | DI MELFI, | Signore, e Padron suo sempre osseruandiss. | RAFAEL BOMBELLI DA BOLOGNA.»

Il Conte GIOVANNI MARIA MAZZUCHELLI nel cenno da lui dettato intorno al BOMBELLI nota le due edizioni distintamente l'una dall' altra;[5] ma SILVESTRO GHERARDI, dopo avvertito che il TIRABOSCHI avea fatto altrettanto,[6] riferiti i due diversi frontespizii, aggiunge: »Parendomi difficile che un libro di tal genere avesse potuto godere, a quei tempi, tutto quel favore che farebbero supporre due edizioni del medesimo eseguite nello stesso luogo, nel breve lasso di sette anni, volli collazionare fra di loro li esemplari dall' uno e dall' altro frontespizio, che ne possiede la Biblioteca di questa P. Università.[7] Vidi subito che erano identici, d'una sola e medesima edizione, eccetto la differenza de' frontispizi ed eccetto la ristampa fatta, per li esemplari del secondo frontispizio, della Lettera dedicatoria a Monsignor RUFINI, conservatavi però la data: *In Bologna il dì XXII di Giugno MDLXXII,* che leggesi nell' esemplare dal primo frontispizio. La conformità della qual data coll' annata 1572 dello stesso frontispizio in un col tenore della Lettera fanno conoscere che l'edizione che porta questa medesima annata 1572 non è già una ristampa, come di prima giunta potrebbero insinuare le parole: *Novamente posta in luce,* che veggonsi nel ridetto primo frontispizio, onde quel *Novamente* va pigliato in senso di *Presentemente.* Il prestantissimo LAGRANGE non vide dell' Algebra Bombelliana che esemplari dal secondo frontispizio,

poichè la disse stampata in Bologna nel 1579 (Lezioni cit., lez. terza, pag. 49). — Il FANTUZZI che cita quest' Opera del BOMBELLI, sotto i due frontispizi, in guisa da far quasi credere che le due citazioni corrispondano a due opere diverse dello stesso Autore, menziona anche una ristampa di essa nel 1593 in Bologna, sull' autorità d'una *Biblioteca Exotica, sive Catalogus Officinalis etc.,* stampata in Francfort l'anno 1610, pag. 196 (FANTUZZI, ecc. Tomo 2, pag. 283). Ma in Bologna non abbiamo potuto ritrovare il libro del BOMBELLI con quest' ultima data, e dubitiamo fortemente che sia giammai esistito. — Rispetto agli esemplari dai due riportati frontispizi, che simulano due edizioni successive, aggiungeremo pure (per coloro che non avesser idea di queste piccole contrafazioni tipografico-librarie), che, a non dubitarne, il tipografo Rossi, trovandosi avere ancora, nel 1579, un bel fondo dell' Algebra Bombelliana, stampata da lui sette anni prima, rinnovò negli esemplari di essa soltanto il frontispizio e la dedica, colla speranza che la fresca data di quello gli accrescesse lo spaccio del suo fondo.»[8]

Io concordo pienamente, dopo accurato esame dei due succitati esemplari, con la opinione espressa dal GHERARDI; anzi mi vi sono associato già, quasi vent' anni or sono, quando trattai altra volta ed a fondo questa medesima questione.[9]

[1] M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Matematik.* **2** (1892), p. 570.

[2] Bibliotheca Mathematica 1892, 96.

[3] RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* **1** (1870), 145—146.

[4] BONCOMPAGNI, *Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Marie.* Biblioth. Mathem. 1886, col. 44.

[5] G. MAZZUCHELLI, *Gli scrittori d'Italia, cioè notizie storiche e critiche intorno alle vite e agli scritti dei letterati italiani.* Vol. II. Parte III (Brescia 1762), pag. 1509.

[6] TIRABOSCHI, *Storia della letteratura italiana.* Tomo VII. Par. 2ª. Lib. 2°. Cap. 2°. § 44.

[7] Cioè di Bologna.

[8] S. GHERARDI, *Di alcuni materiali per la storia della facoltà matematica nell' antica università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri* (Bologna 1846), pag. 86—87.

[9] A. FAVARO, *Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, pag. 494—495.

Sur la propagation des signes numériques cunéiformes.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Les habitants de l'ancienne Chaldée parvenus à un degré de culture supérieur à celui de leurs proches voisins ne manquèrent pas d'exercer une influence plus ou moins grande sur ces derniers. L'ascendant en serait même peut être devenu exclusif sans la proximité d'une contrée encore plus civilisée, telle que l'Egypte. La propagation des signes numériques cunéiformes fait justement partie de l'influence exercée par les Chaldéens sur leurs voisins. Il va sans dire que cette propagation n'a pu avoir lieu sans que des changements notables n'aient été opérés dans l'extérieur de ces signes, changements qui ne laissèrent pas de s'accroître avec le temps. C'est donc tout modifiés que nous trouvons les signes de numération cunéiformes chez les plus proches voisins de la Chaldée, les Phéniciens, les Araméens ou les Palmériens.

Conformément à l'écriture cunéiforme, les Phéniciens n'avaient possédé tout d'abord que trois signes numériques différents. C'étaient: un trait vertical pour désigner l'unité; une ligne droite plus ou moins inclinée ayant le bout de dessus courbé à droite et souvent muni d'un angle, pour exprimer le nombre 10; enfin une ligne droite horizontale (ou le signe de 10) placée entre deux traits verticaux et servant à rendre le nombre 100.[1] On voit sans peine que le premier de ces signes provient d'un signe correspondant dans l'écriture cunéiforme, et qui est le coin vertical, ou ne présente qu'un reste similaire de son antécédant, l'écriture figurée.

Le second signe sous sa forme d'angle est bien une reproduction soit directe, soit quelque peu variée d'un autre signe correspondant dans l'écriture cunéiforme et qui est un angle formé de coins. Le sommet en est tourné dans la direction de l'écriture, c'est à dire non à gauche, mais à droite. C'est bien l'opposé de l'écriture cunéiforme qui a la direction de gauche à droite contrairement aux caractères phéniciens imités d'Egypte.

Quant au signe représentant le nombre 100, la première forme n'en fait qu'un avec la seconde ainsi qu'il va être démontré. Considérée comme la forme primitive, elle est encore une reproduction directe d'un signe correspondant dans l'écri-

ture cunéiforme et qui est la réunion du coin vertical au coin horizontal. Le trait droit et vertical en est alors regardé comme marquant l'unité et donnant à entendre que l'unité des centaines y est prise une seule fois, — cela conformément à la manière d'exprimer les multiples de 100 dont nous allons prendre connaissance. Or voici les modifications que subit avec le temps la forme phénicienne des signes de numération cunéiformes. En premier lieu on se sert d'un trait horizontal pour exprimer le nombre 10, ce qui peut bien amener à remplacer la droite horizontale dans la figure du nombre 100 par le signe de 10 en général. En second lieu on introduit pour le nombre 20 un signe à part composé de deux traits inclinés et d'un troisième unissant deux points pris sur ces derniers. Les Phéniciens employaient ce signe à côté de l'expression habituelle du nombre 20, au moyen de deux lignes, l'une surmontant l'autre et figurant chacune le nombre 10. Evidemment ce n'en est là qu'une modification.

La parenté des chiffres phéniciens à l'écriture cunéiforme n'est pas seulement bornée à leur nombre et à leur extérieur. Elle est prouvée plus vivement encore par les moyens d'en réunir les signes numériques pour exprimer les multiples des unités des ordres. Ceux-ci étaient représentés dans les ordres des unités et des dizaines par le signe de l'unité de l'ordre, marqué un nombre correspondant de fois. Ainsi que dans l'écriture cunéiforme, les signes en question, répétés à plusieurs reprises, étaient partagés en groupes, à trois, disposés l'un au dessus de l'autre ou l'un à côté de l'autre. Le signe exprimant le nombre 20 une fois trouvé, on chercha à abréger l'expression des nombres du deuxième ordre, multiples de 20, et on y arriva en remplaçant le signe de 10 par celui de 20 un nombre correspondant de fois. Nous ne saurions manquer de voir dans ce procédé, comme dans le signe de 20 qui y avait abouti, l'une des voies dont l'humanité s'était servie en inventant des signes à part pour les multiples des unités des ordres. Elle y voyait un moyen de diminuer le nombre des signes nécessaires à l'expression des nombres. Les multiples des unités des hauts ordres, ou tout au moins de celui des centaines, étaient encore exprimés chez les Phéniciens conformément à l'écriture cunéiforme. Ils associaient au signe de l'unité de l'ordre en question un nombre, marquant combien de fois cette unité se trouvait répétée. Il a fallu discerner ce dernier signe d'avec son semblable, servant à marquer le nombre des unités destinées à former avec le nombre écrit des centaines un nombre

entier composé. On convint donc que le premier dans la direction usitée de l'écriture précéderait le signe de l'unité de l'ordre en question, tandis que le second le suivrait. Placé donc dans l'écriture cunéiforme, comme nous l'avons vu plus haut, à gauche de l'unité de l'ordre en question, c'est à droite de ce même signe qu'il se trouve dans les caractères phéniciens qui ont une direction opposée.

Quant aux nombres entiers composés, ils étaient rendus comme à peu près partout par une série de signes numériques, servant de multiples aux unités des ordres différents qui les composaient. L'ordre de leur disposition était décroissant par rapport à la direction de l'écriture, c'est à dire chez les Phéniciens de droite à gauche.

Les chiffres des Palmériens, employés à Palmyre entre l'an 2 après J. Ch. et jusque vers le milieu du 3[me] siècle, présentent une forme quelque peu variée du système phénicien de ces mêmes signes, ou du système cunéiforme lui-même. Ils diffèrent du premier par emploi d'un signe à part pour le nombre 5, ressemblant un peu à l'Y. Ils en diffèrent encore par certaines modifications dans les signes équivalents à 10 et à 20. Ils en diffèrent enfin par l'emploi d'un seul trait vertical, nommément du trait droit, dans le signe du nombre 100. Dans tout le reste les chiffres palmériens coïncident entièrement avec ceux des Phéniciens.

Les signes de numération employés par les Palmériens furent transmis, avec de certaines modifications sans doute, aux manuscrits syriaques des 6[e] et 7[e] siècles. Pour juger du caractère des changements qui ont eu lieu dans ce cas là, il suffit d'observer que le nombre 2, par exemple, y était exprimé par deux traits verticaux et unis dans le bas par la partie du trait droit courbée en arc.

[1] A. P. Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes*. Paris 1860, p. 164—167.

Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus.

Von H. Weissenborn in Eisenach.

Als ich im vorigen Jahre unter dem Titel: *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert* ein Schriftchen herausgab, dessen Zweck war, die Persönlichkeit des in Gerberts Briefen erwähnten Joseph *Sapiens* oder Joseph *Ispanus* nachzuweisen, eine Untersuchung, die mich nach mehrjähriger Forschung zu der Überzeugung führte, der Fragliche sei höchst wahrscheinlich ein s. g. Schutz-Jude des Grafen Borrel von Barzelona gewesen, fand diese Ansicht wenig Beachtung, weil ein greifbarer Beweis für ihre Richtigkeit sich nicht beibringen liess. Dieser Umstand sowohl als der, dass ich bald nach Vollendung meiner Schrift zufällig unter Büchern, die sich auf spanische Geschichte beziehen, ein älteres Werk »Über die Grafen von Barzelona« aus dem Jahre 1836, angeführt fand, liessen es mir nicht als überflüssig erscheinen, nochmals in der Kürze auf die Frage einzugehen, die zum Abschluss zu bringen ich mir, ich kann sagen, zur Lebens-Aufgabe gemacht habe. Der Titel liess mich wohl auch hoffen, etwas Näheres über den Joseph *Sapiens* zu erfahren. Zwar zeigte sich, als es mir gelungen war des betreffenden Werkes habhaft zu werden, dass derselbe etwas anders lautet, als ich ihn, offenbar der Kürze wegen, angegeben gefunden hatte, nämlich: *Los condes de Barcelona vindicados, y cronologia y genealogia de los reyes de España consideratos como soberanos independientes de su Marca. Por* D. Próspero de Bofarull y Mascarò (Barcelona 1836, 2 Teile), und meine Hoffnungen schwanden; dagegen fand ich bei der Abfassung des Werkes zu Hilfe gezogen die 1829 vollständig veröffentlichte *Cronica universal de Cataluña,* von Dr. Gerónimo Pujades und die von Jaime Ripoll 1834 herausgegebenen Urkunden aus dem Staatsarchiv von Vich, und dies veranlasst mich, einige hier in Betracht kommende Thatsachen und Ansichten mitzuteilen.

Als Stammvater der Grafen von Barzelona wird (I, p. 4 von Bofarulls Werk) angeführt ein Urgrossenkel Karl Martels, Wifred I *el velloso* (874—898). Ferner ist zu erwähnen, dass, wie (I, p. 23—24) aus den Acten des Klosters zu Ripoll hervorgeht, im 10. und. 11. Jahrhundert in Spanien den Mön-

chen die Ehe wenigstens stillschweigend erlaubt und gestattet gewesen ist; es scheint also hier mehr Freiheit geherrscht zu haben, als anderswo. Weiter lesen wir (I, p. 78, Anmerk. 2): »In den Archiven der Königl. Klöster von Ripoll und Campredon existiren verschiedene Schriften der 10. Jahrhunderts, welche sich auf einen Bischof von Gerona Namens *Bonifilio* beziehen, dessen keine Episkopologie Erwähnung thut. Bei der Übereinstimmung der Zeiten und Würden jenes *Bonifilio* mit dem Grafen MIRON von Gerona vermuten wir, dass dies ein Beiname (*sobrenombre*), den er hatte, gewesen ist.» Ebenso soll die Tochter BORRELL's, die nach der Zerstörung des Nonnenklosters in Barzelona zur Äbtissin gewählt wurde, eigentlich ADELAZI, ADELEZ oder ADELAIDE geheisen haben, und *Bonafilia* nur ein Beiname gewesen sein (I, p. 135—137). Endlich wird als Jahr der Eroberung Barzelonas durch die Sarazenen nicht 985 angegeben, welches die *Marca Hispanica*, die der Verfasser BOFARULL mehrfach erwähnt, ausdrücklich hervorhebt (s. Anm. 34 meiner oben angeführten Schrift), sondern als Datum jenes Ereignisses wird das in der *Appendix* zur *Marca Hispanica* zweimal genannte Jahr 986, wie es scheint, nach denselben Quellen, die bei der Abfassung derselben *Appendix* gedient haben, bezeichnet (I, p. 161—162).

Was mich nun zu der in meinem oben genannten Schriftchen ausgesprochenen Ansicht, an der ich noch heute festhalte, geführt hat, ist der Umstand, dass sich auch bei der sorgfältigsten Nachforschung ein JOSEPH *Sapiens*, dem wir ein Verdienst um das Rechnen zuschreiben könnten, oder ein hervorragender Gelehrter und Mathematiker nicht ergeben hat, sodann der entschieden jüdische Name JOSEPH, der bei Christen in jener Zeit in der Mark nicht vorkommt, und endlich die Bemerkung, dass sich in dem von dem damaligen Vezier ALMANSOR unternommenen Sarazenen-Einfall, der doch wohl länger dauerte, als man gewöhnlich glaubt, manches, was sonst rätselhaft erschiene, eine leichte und natürliche Erklärung findet. Dahin rechne ich z. B. die Unterbrechung der von dem Kanzler oder Notar ARNULF in die Pyrenäen-Klöster gemachten Visitations-Reise, den Mangel an Nachrichten über den Verbleib des LUPITUS von Barzelona und des BONIFILIUS von Girona (mir wenigstens scheint diese Ursache der Wahrheit näher zu kommen, als die oben angeführte), und das Verschwinden des Büchleins *De multiplicatione et divisione numerorum* sammt seinem Verfasser. Dies Alles macht begreiflich weshalb fassbare Beweise nicht gefunden worden sind und auch wohl in Zukunft nicht werden gefunden

[redacted]

werden. Wenn aber GERBERT selbst den JOSEPH *Sapiens*, der das Büchlein geschrieben, nicht als Juden bezeichnet, so beweist dies nur, wie gut und richtig er die Menschen zu beurteilen verstand. Und doch hatte er selbst Verdacht und üble Nachrede nicht von sich abzuhalten vermocht. Oder wäre es so unwahrscheinlich, dass in jenen weit zurückliegenden Jahren, trotz GERBERTS und seiner Freunde Vorsicht und Zurückhaltung, eine dunkle Kunde von dem wahren Stande der Dinge in das Volk hindurchgesickert wäre, und indem dies die jüdische Kabbala mit der Wissenschaft der Sarazenen verwechselte, die seltsamen Märchen, die WILHELM VON MALMESBURY über ihn erzählt (Anm. 16 meines Schriftchens), hervorgerufen hätte?

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est **P. Tannery.** Volumen I. Diophanti quae exstant omnia continens. Lipsiae, Teubner 1893. 8°, IX + 481 p.

Il y a 9 ans, nous avons inséré dans ce journal une *Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul Tannery* (voir Biblioth. Mathem. 1884, col. 47—48). Nous nous permettons d'en reproduire ici les lignes suivantes:

> L'ouvrage en question comprendra une édition critique du texte grec de Diofantos, avec une traduction latine, faite en employant les notations modernes, des commentaires étendus, et, de plus, le texte grec, encore inédit, des scholies attribués à Maximus Planudes.
>
> La collation complète des cinq manuscrits de Diofantos qui existent à Paris, a convaincu M. Tannery qu'il y a en fait deux familles de manuscrits, dérivant d'une source commune.
>
> L'archétype de la première famille est antérieur à Maximus Planudes et avait ses scholies propres, d'ailleurs en petit nombre et peu étendus, qui seront également publiés. Le plus ancien manuscrit de cette famille est le n° 191 du Vatican.
>
> Le plus ancien de la seconde famille est le n° 308 de San Marco à Venezia. C'est à cette famille qu'appartiennent les manuscrits utilisés par Xylander et par Bachet de Méziriac. Mais ceux de la première famille sont préférables et permettront de combler plusieurs lacunes et d'apporter des corrections importantes.
>
> L'intérêt de la nouvelle édition sera surtout, au point de vue du texte grec, dans la restitution aussi fidèle que possible des notations algébriques de Diofantos souvent abandonnées ou défigurées dans les manuscrits et dans les éditions de Bachet et de S. Fermat.

D'après le plan de M. Tannery, la publication de la nouvelle édition aurait eu lieu déjà en 1885, mais ce n'est que vers la fin de l'année passée que la première partie en a paru. Ce retard a permis à M. Tannery de consulter quelques manuscrits qui lui étaient inconnus en 1884, en premier lieu le Cod. Matritensis 48 (du 13^e siècle), qui est le plus ancien de la première famille et dont le n° 191 du Vatican est une copie faite en Italie vers le milieu du 15^e siècle. En tout, M. Tannery

a eu connaissance de 22 manuscrits, dont seulement 8 ont mérité d'être collationnés pour la nouvelle édition. Pour la réstitution du texte, il s'est servi en premier lieu du cod. Matritensis déjà cité. Quant aux notations algébriques, M. TANNERY fait remarquer dans la préface qu'il est presque impossible de savoir comment DIOFANTOS a désigné la quantité inconnue, et quel symbole il a employé pour distinguer entre un nombre entier et une fraction fondamentale ayant ce nombre pour dénominateur; les signes qu'à choisis M. TANNERY, sont ceux qu'il a jugés les plus probables.

Comme l'indique le titre, le premier volume de l'édition de M. TANNERY contient tous les écrits de DIOFANTOS qui nous sont parvenus, c'est à dire *Arithmeticorum libri sex* et *De polygonis numeris liber* avec traduction latine; dans cette traduction les notations modernes (x, X_1, X_2, etc.), pour des quantités inconnues sont toujours employés, ce qui en facilite essentiellement la lecture.

La seconde partie embrassera entre autres choses les scholies attribués à MAXIMUS PLANUDES, et une notice sur les manuscrits connus des ouvrages de DIOFANTOS et des scholies.

L'édition soigneuse de M. TANNERY rendra assurément de grands services aux savants qui voudront étudier d'après les sources mêmes l'arithmétique et l'algèbre des Grecs.

Aux deux errata indiqués à la fin de la préface il faut ajouter: p. 209, ligne 5, *au lieu de* $35x$ *lire* $35x^3$.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES RÉDIGÉE SOUS LES AUSPICES DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE D'AMSTERDAM. TOME I. PREMIÈRE PARTIE. Amsterdam, W. Versluys 1893. 8°, (4) + 104 p.

De nos jours, où les mathématiques sont cultivées avec tant d'ardeur, il devient de plus en plus difficile de suivre le mouvement scientifique dans toutes ses branches et dans tous les pays. Le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik est un excellent guide pour quiconque veut prendre connaissance des recherches faites pendant les dernières années, mais il passe en général un temps de trois ans entre la publication d'un mémoire et la publication de l'analyse correspondante dans le Jahrbuch, et pendant ce temps intermédiaire il faut chercher ailleurs les renseignements nécessaires. Pour cette raison nous commençâmes en 1884 de publier dans la prem-

série de la Bibliotheca Mathematica des listes trimestrielles d'écrits récemment parus dans le domaine des mathématiques pures, mais, pour des motifs qui sont indiqués dans la préface à l'année 1886 du journal, la publication de ces listes ne fut plus continuée. Maintenant notre plan a été repris avec quelques modifications par la société mathématique d'Amsterdam, qui l'a en même temps considérablement amplifié, en joignant aux indications des titres aussi de petites analyses des mémoires respectifs. Pour donner une idée du plan de la Revue, nous reproduisons ici un extrait de l'»Avis» de la société.

En publiant la *Revue semestrielle* la société mathématique d'Amsterdam s'est proposé de faciliter l'étude des sciences mathématiques, en faisant connaître, sans délai de quelque importance, le titre et le contenu principal des mémoires mathématiques publiés dans les principaux journaux scientfiques.

La *Revue semestrielle* sera rédigée d'après les règles suivantes:

1. Le titre du mémoire sera précedé d'une ou de plusieurs notations, renvoyant au système de classification, adopté par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques et suivi d'un compte rendu très sommaire du contenu du mémoire. Dans le cas pourtant que les notations et le titre indiquent suffisamment le contenu du mémoire, le compte rendu pourra être supprimé.

2. Les titres seront donnés en entier ou en abrégé dans la langue des auteurs. Pour les analyses on se servira de la langue allemande, anglaise ou française, selon que le mémoire a été rédigé en allemand, en anglais ou en français; pour les mémoires rédigés dans une autre langue l'analyse se fera d'ordinaire en français.

3. En général on ne donnera des comptes rendus que des mémoires se rapportant aux mathématiques pures et à la mécanique, y compris l'hydrodynamique et la théorie de l'élasticité et à l'exclusion de la mécanique appliquée, de la physique mathématique et de l'astronomie. Cependant on inscrira les notations de classification et les titres des mémoires sur des sujets exclus, si ces memoires se trouvent dans des journaux presque exclusivement mathématiques.

— — — — — — — — — — — — —

5. Les deux parties dont se composent les tomes annuels de la Revue paraîtront en général le 1 janvier et le 1 juillet. La première partie contiendra l'analyse des travaux publiés depuis le 1 mars jusqu'au 1 octobre de l'année précé-

dente; la seconde partie contiendra celle des travaux parus depuis le 1 octobre de l'année précédente jusqu'au 1 mars de l'année courante. Les mémoires y seront rangés d'après leur ordre dans les journaux, les journaux d'après l'ordre alphabétique des différents pays.

6. Pour faciliter les recherches, chaque partie contiendra trois tables, une table des journaux, une table des notations de classification et une table des auteurs.

— — — — — — — — — — — — —

La rédaction de la Revue a été confiée à MM. P. H. SCHOUTE, D. J. KORTEWEG, J. C. KLUYVER, W. KAPTEYN et P. ZEEMAN avec la collaboration de MM. C. VAN ALLER, F. DE BOER, J. CARDINAAL, D. COELINGH, R. J. ESCHER, W. MANTEL, P. MOLENBROEK, P. VAN MOURIK, M. C. PARAIRA, A. E. RAHUSEN, G. SCHOUTEN, J. W. TESCH, J. VERSLUYS, J. DE VRIES et M^lle^ A. G. WIJTHOFF. Le prix de l'abonnement annuel est de 8·50 fr.

Dans le cahier paru sont analysés 56 différents recueils, dont 4 ont été publiés en Amérique, 3 en Belgique, 1 en Danemark, 10 en l'Allemagne, 10 en France, 11 en Angleterre, 6 en Italie, 2 en Néerlande, 1 en Norvège, 4 en Autriche, 1 en Portugal, 1 en Finlande et 2 en Suède. Outre ces recuils, la rédaction indique 64 autres, dont il sera rendu compte dans les cahiers suivants. Nous espérons que la liste de recueils sera bientôt complétée, de manière qu'elle embrasse au moins quelques journaux publiés en langue russe et quelques recueils parus en Suisse. En même temps nous nous permettons de demander à la rédaction s'il n'est pas possible d'ajouter aussi dans chaque cahier une liste des ouvrages mathématiques récents publiés en dehors des recueils périodiques.

Nous recommendons vivement la Revue semestrielle à nos lecteurs; comme nous l'avons déjà indiqué, elle ne fait pas double emploi avec le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Abstraction faite de quelques errata sans importance, dont certains sont indiqués à la page 99 du cahier, l'exécution matérielle de la Revue est très soignée.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1892: 4. — [Analyse de l'année 1892:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{4}_7$, 1893, 403—409. (A. FAVARO.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. БОБЫНИНЫМЪ. Москва. 8°.

1891: 3-4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
38 (1893): 1—2.

°**Apollonii Pergaei** quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Volumen II. Lipsiæ 1893.

8°, 85 + 368 p. — [4·50 Mk.]

Beltrami, E., Enrico Betti.

Palermo, Circ. matem., Rendiconti **6**, 1892, 245—246. — Nécrologie. — [Traduite en espagnol:] El progreso matem. **3**, 1893, 30—32.

Besso, D., Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci.

Periodico di matem. **8**, 1893, 1—16.

Birkenmajer, L., Marcin Bylica z Olkusza oraz narzedzia astronomiczne, ktore zapisal uniwersytetowi Jagellonskiemu w roku 1493.

Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **25**, 1892, 1—164. — MARTIN BYLICA d'Olkusz et les instruments astronomiques qu'il avait procurés à l'université de Krakow. — [Compte rendu en allemand:] *Krakow*, Akad. umiej., Bulletin 1892, 98—110.

Bobynin, V., Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe.

Biblioth. Mathem. 1892, 110—114.

БОБЫНИНЪ, В. В., Изъ біографіи НИЛСА-ГЕНРИКА АБЕЛЯ.

Fiziko-matem. naouki **10** (1891), 1893, 78—94. — BOBYNIN, V. V., De la biographie de N.-H. ABEL. (Séjour à Paris; rétour à la Norwège.) — Cfr. Biblioth. Mathem. 1891, p. 93.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи расвитія фисико-математическихъ знаній въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣйствія развитію научныхъ знаній.

Fiziko-matem. naouki **9**, 1890, 23—47; **10**, 1891, 33—37, 65—77; **11**, 1892, 27—30. — BOBYNIN, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque de l'appui du gouvernement pour le développement des connaissances scientifiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. **2** : 4 [1792—1799]. Москва 1891—1893.
8°, (2) + 271 + (1) p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» **10** (1891).

Böcher, M., A bit of mathematical history.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 107—109. — Sur l'histoire des fonctions de BESSEL.

Favaro, A., Per il terzo centenario dalla inaugurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Firenze 1892.
Folio, 29 p. + portr. + 25 facsim.

Favaro, A., Galileo Galilei ed il suo terzo centenario cattedratico nella università di Padova.
Natura ed arte (Milano) **1**, 1892, 297—321.

Favaro, A., Stemmi ed inscrizioni concernenti personaggi Galileiani nella università di Padova. Padova 1893.
8°, 15 p.

G[aldeano], Z. G. de, Notas que pueden servir para un artículo biográfico acerca de Gerono.
El progreso matem. **3**, 1893, 28—30.

Gerhardt, C. J., Leibniz und Pascal.
Berlin, Akad. d. Wissensch., Mittheilungen 1892, 505—520.

°**Graf, J. H.,** Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jacob Huber aus Basel (1733—98). Bern 1892.
8°, 75 p. + portr. — [1 Mk.]

Hunrath, K., Zur Geschichte der Decimalbrüche.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 25—27.

Köpper, F. Th., Notizen über die Zahlwörter im Abacus des Boethius.
| *S:t Pétersbourg*, Acad. d. sc., Mélanges gréco-romains **6**, 1892, 18 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 210—211. (CANTOR.)

Lampe, E., Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Rede zum Geburtfeste seiner Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula der königlichen technischen Hochschule zu Berlin am 26. Januar 1893. Berlin 1893.
8°, 26 p.

Lloyd Tanner, H. W., On the history of Arbogasts rule.
Messenger of mathem. **20**, 1890, 83—101.

Loria, G., Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.
Biblioth. Mathem. 1892, 97—109.

Mackay, J. S., Historical notes on a geometrical problem and theorem.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **8**, 1890. 93—94.

Müller, F., Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede in der Aula des königlichen Friedrich Wilhelms Gymnasiums am 29. Oktober 1892. Berlin, Reimer 1893.
8°, 35 p.

Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario dalla inaugurazione del suo insegnamento nel Bò pubblicati per cura della r. accademia di Padova. Padova 1892.
4°, 46 + (1) p. — Cette publication contient les notices suivantes relatives à l'histoire des mathématiques: A. FAVARO, *Galileo Galilei e l'accademia di Padova* (p. 5—8); G. ENESTRÖM, *Remarque sur l'étude des écrits de Galilei en Suède au commencement du 17e siècle* (p. 26—27); A. WOLYNSKI, *Carteggio Galileiano* (p. 44—46). — Parmi les autres contributions, celles de MM. P. RICCARDI et E. WOHLWILL se rapportent plus étroitement à l'histoire des mathématiques.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Галилео Галилей, его жизнь и научная дѣятельность.
Vjestnik elem. matem. **13**, 1893, 177—184, 197—204. — PERGAMENT, O., GALILEO GALILEI, sa vie et son action scientifique.

Pinto, L., Per Enrico Betti.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem. **6**$_2$, 1892, 143—144. — Nécrologie.

Schubert, H., The squaring of the circle.
Washington, Smithson. instit., Report 1890, 97—120. — Traduction de l'écrit indiqué à la Biblioth. Mathem. 1889, p. 61—62.

Segre, C., Riccardo de Paolis. Cenni biografici.
Palermo, Circ. matem., Rendiconti **6**, 1892, 208—224.

Studnicka, F. J., Johannes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und gelehrtes Wirken. Festvortrag gehalten bei der am 31. Jänner 1891 stattgehabten Jahresversammlung der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1891.
8°, 32 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 39.

Sturm, R., Heinrich Schröter.
Journ. für Mathem. **109**, 1892, 358—360. — Nécrologie.

Suter, H., Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vice königlichen Bibliothek in Kairo. Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 1—24, 41—57.

Wiedemann, Notiz über ein von Ibn al Haitam gelöstes arithmetisches Problem.
Erlangen, Phys.-med. Soc., Sitzungsber. **24**, 1892, 83.

Question 40 [sur le géomètre allemand Bürmann].
Biblioth. Mathem. 1892, 120. (G. ENESTRÖM.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Band 22 (1890). Berlin, Reimer 1893. 8°. — Les pages 1—60 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1890.

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Mathesis 3_2, 1893, 16. (P. M.)

FAVARO, A., Nuovi studi Galileiani. Venezia 1891.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 87—91. (CANTOR.)

LORIA, G., Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Genova 1892. 4°.
El progreso matem. **2**, 1892, 267—269. (Z. G. DE G.) — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 215—216. (CANTOR.) — Rivista di matem. **2**, 1892, 179—186. (E. PASCAL.) — [Réponse à la critique de M. E. PASCAL:] Rivista di matem. **3**, 1893, 6—15. (G. LORIA.) — Jorn. de sc. mathem. **11**, 1892, 59. (G. T.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 115—116. (G. ENESTRÖM.)

RUDIO, F., Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Hamburg 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 213. (CANTOR.)

RUDIO, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 116—117. (G. ENESTRÖM.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 211—212. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 117—120. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 39—40. — Fiziko-matem. naouki **10** (1891), 1893, 95—132.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

41. Dans les recueils de récréations mathématiques publiés au 17[e] siècle on trouve la question suivante: »On veut ranger 15 chrétiens et 15 juifs de manière qu'il ne reste que des

chrétiens, si l'on écarte d'abord le neuvième homme, puis le neuvième homme à partir de l'homme éloigné, etc., jusqu'à ce que 15 hommes soient supprimés. Comment doit on s'y prendre à cet effet?»

Cette question a été mentionnée déjà en 1484 par CHUQUET, elle paraît avoir été publiée pour la première fois (comparez CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**, 1892, p. 701—702) en 1518 par ELIAS LEVITA, qui l'attribue à ABRAHAM IBN ESRA († 1167; voir aussi STEINSCHNEIDER, *Abraham Ibn Esra;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **3**, 1880, p. 123—124). D'autre part, d'après HEGESIPPUS (*De bello judaico* III: 16—18), la question semble tirer son origine de l'écrivain juif FLAVIUS JOSEPHUS († environ 100 après J. C.); aussi elle est appelée *Ludus Joseph* en 1539 par CARDANO (voir CANTOR, l. c. p. 460).

En Suède, la question est connue sous le nom de *jeu de S:t Pierre* (»Sankt Peders lek»); elle est rapportée dans un traité manuscrit d'arithmétique composé en 1601 par RIZANESANDER, et sa solution a été inscrite sur plusieurs bâtons runiques (*runstafvar*) faits en Suède au 17ᵉ siècle. Même en Japon la question n'est point inconnue (voir LE VALLOIS, *Les sciences exactes chez les Japonais;* Compte rendu du 1er congrès international des orientalistes **1** [Paris 1874], p. 289—299).

On demande une notice critique sur l'origine et sur l'histoire de la question qui vient d'être mentionnée.

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 7. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 7.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482.

Von G. VALENTIN in Berlin.

M. CANTOR sagt in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Bd. II (Leipzig 1892), S. 266, bei Besprechung der ersten EUCLID-Ausgaben: »Gleich im ersten Jahre 1482 sind zweierlei Ausgaben vorhanden, beide bei RATDOLT in Venedig gedruckt, unterschieden in den ersten Bogen, späterhin übereinstimmend. Es ist natürlich ganz unmöglich, zu entscheiden, ob man hier wirklich von zwei Ausgaben zu reden hat, oder ob nur die erste Lage noch einmal gedruckt worden ist, wofür wir allerdings einen Grund nicht abzusehen vermögen».

Die eine dieser Ausgaben, welche HAIN in seinem *Repertorium* unter N:o 6693 beschrieben hat,[1] ist alter Bestand der Kgl. Bibliothek zu Berlin, die andere Ausgabe[2] ist vor Kurzem ebenfalls in deren Besitz gelangt, und da meines Wissens eine Beschreibung der Verschiedenheiten in den beiden Drucken bisher noch nicht veröffentlicht worden ist, so will ich im Folgenden eine kurze Darstellung derselben geben. Dabei werde ich die von HAIN beschriebene *B*, die andere Ausgabe *A* nennen.

Beide Ausgaben enthalten *r* Bogen, von welchen der Bogen *a* quinarius, die Bogen *b* bis *r* quaterni sind. Vom Bogen *a* ist Bl. 1ª unbedruckt, Bl. 1ᵛ enthält die Dedication RATDOLTS an den Fürsten IOANNES MOCENICUS; vom Bogen *r* ist Bl. 8ª und 8ᵛ unbedruckt. In der Dedication und von Bogen *a* Bl. 10ª an bis zum Schluss des Bogens *r* Bl. 7ᵛ stimmen beide

Ausgaben im Text, in der Interpunctation, in den Abbreviaturen und in den Figuren vollständig überein, so dass auch namentlich der Schluss in beiden übereinstimmend lautet:

> Opus elementor*um* euclidis megarensis in geometri*am* art*em* In id quo*que* Campa- | ni *per*spicacissimi C*om*mentationes fini*unt*. Erhardus ratdolt Augustensis impressor | solertissimus. venetijs impressit. Anno salutis MCCCCLXXXIJ. Octauis Caleñ. | Iuñ. Lector. Vale.

Anders verhält es sich dagegen mit den Blättern 2 bis 9 des Bogens *a*. Schon der Eingang ist verschieden; in *A* heisst es:

> Preclarissim*um* opus element*or*um Euclidis megar*ensis* ūna *cum* *com*- | mentis Campani *per*spicacissimi in art*em* geometri*am* incipit felici*ter*.

in B:

> Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi- | cacissimi: in artem Geometrie incipit qu*am* foelicissime:

Die 16 Seiten der 8 Blätter schliessen übereinstimmend mit dem gleichen Worte, die einzelnen sich entsprechenden Zeilen dagegen nur selten, da in *B* häufig ganz andere Abbreviaturen gebraucht sind, wie in *A*. Der Text ist ungeändert geblieben, nur finde ich im Druck folgende Abweichungen, wobei ich die falsche Lesart mit cursiven Lettern wiedergebe und wenn in beiden Ausgaben derselbe Fehler ist, die richtige Lesart hinzusetze.

		A	*B*	Richtige Lesart
Bl. 2ᵛ Z.	26.	animi	*ainmi*	
	37.	Propositio. 1.	Propositio prima	
3ᵃ	9.	*linea*	linee	
	14.	*puncca*	puncta	
	18.	*hee*	he	
	26.	*collocauimus*	collocabimus	
	43.	*data*	date	
3ᵛ	8.	demantur de	*demantur*	
	17.	*in puncto*	in puncto. f.	
4ᵃ	4.	*equalis*	equalia	
	7.	*intellige*	intelligo	
	33.	due	*dne*	
	36.	*ila*	illa	

[redacted]

	A	*B*	Richtige Lesart
Bl. 4ᵛ Z. 4.	. b. d. et b. c.	*.b.d.et.b.d.et.b.c.*	
15.	*. b. e.*	*. b. e.*	. b. c.
5ᵃ 13, 14.	*pro-* | *ham*	14: protraham	
20.	*.d. b. c.*	.a. d. c.	
24.	*Tit*	25: Sit	
29.	*. c. b. d.*	. e. b. d.	
5ᵛ 26.	*. b: g. h.*	. b. g. h.	
28.	*. b. c. a.*	*. g. c. a.*	.g. a. c.
34.	*. e.*	*. e.*	.c.
6ᵃ 20, 21.	*mi* | *nor*	21: maior	
37.	circulum. k. h.	*. k. h.*	
6ᵛ 11.	*Propositio. 14.*	Propositio. 24	
29.	*quinti*	*qnte*	quintae
7ᵛ 3.	*. d. et .e. f.*	*. d. et .e. f.*	.c. d. et. e. f.
18.	*. a. b: et .c. d.*	. a. b. et .c. d.	
33, 34.	*Sint ergo in omnes super-* | *ficie vna*	Sint ergo omnes in super- | ficie vna	
34.	. a. b. et .c. d.	*. a. b. et :c. d.*	
8ᵃ 17.	*angulus*	angulus. a.	
9ᵃ 22.	*ipsi*	ipse [sc. superficies]	
26.	*constitute*	constituti [sc. trianguli]	
34.	*. c. f.*	*. c. f.*	. e. f.
9ᵛ 14.	*idem*	15: eidem [sc. triangulo]	
20.	Propositio. 40.	[fehlt]	
34.	Propositio. 41.	[fehlt]	

Die am Rande gegebenen Figuren zeigen endlich folgende Verschiedenheiten:

Bl. 2ᵃ. In *A* ist, entsprechend dem Texte, zuerst *Punctus*, dann *Linea* abgebildet, in *B* ist es umgekehrt; in *A* folgt dann *Linea curva* und *recta*, welche in *B* fehlen; in *A* ist in der Figur des Kreises ausser *Diameter* auch *Circumferentia* gedruckt, in *B* fehlt letzteres.

Bl. 2ᵛ. In *A* ist ausser *Parallele* und *Sil'is helmu(aym)* noch die Figur eines *Helmuaripha* gegeben, welche in *B* fehlt. Zur Erläuterung der *Petitiones* ist in *A* gezeichnet: 1) eine Gerade; 2) zwei rechtwinklig sich schneidende Linien; 3) drei concentrische Kreise; 4) zwei convergirende von einer dritten Geraden geschnittene Linien, bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert.

In *B* dagegen fehlen die beiden ersten Figuren, die drei concentrischen Kreise sind grösser als in *A*; und endlich sind die beiden convergirenden Linien der 4. Figur nicht bis zu ihrem Durchschnitt verlängert, der hier rechts von der schneidenden Geraden liegen würde, während er in *A* links von derselben liegt.

Bl. 3^v. In *A* sind zu *Propositio 2* noch zwei Figuren für die Fälle beigedruckt, dass der gegebene Punkt erstens Endpunkt der gegebenen Linie ist und zweitens in der gegebenen Linie selbst liegt; beide Figuren fehlen in *B*.

Bl. 4^a. Die Figur zu *Propositio 5* des *A* ist in *B* auf Bl. 3^v.

Bl. 9^a. Die zu *Propositio 39* gehörige Figur ist in *A* in kleinerem Maasstabe als in *B*.

Eine fernere Verschiedenheit ist, dass in *B* oben am Rande von Bl. 2^a die Worte gedruckt sind: »De principijs per se notis: et primo de diffinitionibus earundem», welche in *A* fehlen.

Als letzte Verschiedenheit der beiden Ausgaben ist zu erwähnen, dass in der ganzen Ausgabe *A* am Kopf jeder Seite von Bl. 2^v an »Liber I» (resp. II, III, u. s. w.) gedruckt ist, und zwar so, dass auf der linken Seite »Liber», auf der rechten »I» (resp. II, III, u. s. w.) steht; dasselbe ist in *B* der Fall mit Ausnahme der Blätter 2 bis 9, so dass also auf Bl. 9^v (= Seite 18) das Wort »Liber» fehlt, auf der gegenüberstehenden Seite (Seite 19 = Bl. 10^a) dagegen »I» steht.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun, dass die beiden Ausgaben in den Blättern 2—9 und nur in diesen verschieden sind; es scheint mir daher klar zu sein, dass man nicht von zwei verschiedenen Ausgaben des Jahres 1482 reden darf, sondern dass man es nur mit einer Ausgabe zu thun hat, von welcher während des Druckes aus irgend einem Grunde der erste Bogen neu gesetzt wurde. Was mag der Grund dafür gewesen sein? Sachlich unterscheiden sich die beiden Drucke im Wesentlichen nur darin, dass in *B* am Anfang der Name CAMPANUS fortgelassen ist und einige Figuren in ihr fehlen, dagegen der Zusatz am Rande von Bl. 2^a »De principiis etc.» neu hinzugekommen ist. Diese Änderungen können aber schwerlich einen Grund abgegeben haben, den ersten Bogen ganz neu zu setzen. Zwei Erklärungen scheinen mir daher für den Neudruck nur übrig zu bleiben: entweder bemerkte man, nachdem eine Reihe von Abzügen gemacht war, die grosse Menge von Druckfehlern im ersten Bogen, oder es ist die Satzform desselben mitten im Druck durch einen unglückligen Zufall unbrauchbar geworden. Im ersten Falle würde sich aber RATDOLT wohl damit begnügt haben, nur die Fehler im ersten Satz zu verbessern, anstatt den

ganzen Bogen neu zu setzen. Nun folgt aber aus den vielfach veränderten Abbreviaturen unzweifelhaft, dass der erste Bogen ganz neu gesetzt ist und deshalb neige ich mich der Ansicht zu, dass die Form für den ersten Bogen während des Druckes verunglückt ist und RATDOLT sich desshalb genöthigt sah, den ersten Bogen noch eimal zu setzen. Hierbei mögen auch die Holzschnitte der drei concentrischen Kreise und der zwei convergirenden Linien auf Bl. 2^v, sowie der zu *Propositio 39* gehörigen Figur beschädigt sein, so dass neue Holzschnitte dafür angefertigt werden mussten. Wäre der Satz der Druckfehler wegen erneuert worden, so würden wohl auch die als fehlerhaft erkannten Exemplare nicht in den Handel und somit auch nicht auf uns gekommen sein.

Eine zweite Frage welche sich aufdrängt ist die, welcher von den beiden Drucken ist der erste, welcher der zweite Satz? Einen überzeugenden Beweis zu liefern, halte ich nicht für möglich; wir sind hier, wie oben, auf Vermuthungen angewiesen und will ich im Folgenden kurz die Gründe angeben, aus denen ich die Ausgabe *B* für die spätere halte.

1) Von den 28 Druckfehlern der Blätter 2 bis 9 des *A* sind in *B* 22 beseitigt, 2 sind verändert aber nicht richtig und 4 sind stehen geblieben, dafür haben sich freilich 8 neue eingeschlichen. RATDOLT hat also den neuen Satz benutzt um den Text von einer Reihe von Druckfehlen zu befreien. Läge die Sache dagegen umgekehrt, so würden 22 neue Druckfehler neu hineingekommen sein; diese grosse Anzahl könnte aber nur durch die Schnelligkeit, mit welcher der Bogen neu gesetzt werden musste, erklärt werden, was meiner Meinung nach nicht angeht.

2) Der zweite Grund für meine Ansicht ist das Fehlen von Liber I am Kopfe jeder der neugedruckten 16 Seiten, denn es ist wahrscheinlicher, dass bei dem neuen Satz diese Bezeichnung vergessen worden ist, als dass ihr Fehlen einen Grund zu einem völlig neuen Satz mitabgegeben hat. Ein gleiches Vergessen erklärt das Fehlen des Wortes Circumferentia in der Figur des Kreises auf Bl. 2^a in *B*.

3) Die Euklidischen Lehrsätze sind einzeln durch die Überschrift *Propositio 1* (bezw. 2, 3, u. s. w.) kenntlich gemacht; es würde der Gleichmässigkeit entsprechen, auch den Euclidischen Grundsätzen eine Überschrift zu geben; das hat man in der zweiten Ausgabe (*B*) nachgeholt, war aber genöthigt, sie an den Rand zu setzen, weil der Text der 16 Seiten des ersten Druckes wieder 16 Seiten, nicht mehr, nicht minder, des zweiten

Satzes ausfüllen musste. Aus diesem Grunde mussten schliesslich auf Bl. 9v auch die Überschriften *Propositio 40* und *Propositio 41* fortfallen; sie an den Rand zu setzen ging aber in diesem Falle nicht an, weil sonst die dazu gehörigen Figuren fortgelassen oder in verkleinertem Maasstabe hätten neu geschnitten werden müssen.

[1] Vergleiche auch KÄSTNER, *Geometriae Euclidis prima editio* (Lipsiae 1750) und WEISSENBORN, *Die Übersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti* (Halle 1882), S. 4 ff.

[2] Vergleiche CURTZE, in der Zeitschr. für Mathem. 19, 1874, p. 80.

L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche.

Di Gino Loria a Genova.*

Nella stessa guisa che ogni popolo civile, non appena si sia assicurato uno stabile assetto politico, attende a che sia serbata memoria delle gesta compiute per conseguirlo, e con amorosa cura raccoglie i nomi di coloro che ne furono più efficaci fattori, quasi volesse dalle glorie del passato derivare gli auspici dell' avvenire; così ogni scienza, appena trascorso quel periodo di ricerca affannosa ed ininterrotta che la rese degna di tal nome, si dà premura di compilare gli annali delle imprese condotte a termine da chi con maggiore successo la coltivò o promosse. Le grandi opere storiche che è fama componessero i Peripatetici Teofrasto da Lesbo ed Eudemo da Rodi stanno a dimostrare quanto di buon ora siasi sviluppato negli studiosi questo sentimento elevato di ben intesa riconoscenza verso coloro che li precedettero nell' arringo scientifico.

Come la storia civile e politica ebbe le sue scaturigini nell'epopea e soltanto dopo essersi purgata dagli ingredienti introdottivi dalle leggende popolari e dalla fantasia dei poeti assunse i lineamenti che oggi riteniamo come caratteristici di una vera storia; così la storia scientifica, prima di divenire ciò che essa è oggi, si presentò come una sequela di nomi d'autori e titoli di libri, lardellata di aneddoti più o meno interessanti e, quel che più monta, di autenticità in generale insostenibile.

Ma, mentre lo stadio epico — appartenendo ad un' epoca tanto remota ed essendo così schiettamente separato dagli stadi posteriori — non proietta alcuna luce sinistra sulle serietà degli intendimenti e il rigore dei metodi della storia politica; per converso, sono così vicini a noi i tempi nei quali si credeva (si vegga ad es. Kästner) di scrivere la storia di una scienza quando si faceva un catalogo ragionato delle opere racchiuse in una ricca biblioteca, si narravano le circostanze in cui esse vennero acquistate e si dava qualche notizia intorno a chi le compose, che non deve essere cagione di meraviglia il constatare come molti pensino tuttora essere la storia della scienza immeritevole del nome di scienza, lo studio di essa di scarsa o

---

* Riassunto di una relazione letta dinnanzi al V Congresso storico italiano tenutosi in Genova nel settembre 1892.

nessuna utilità, indegno quindi di venire consigliato o incoraggiato. Ora, poichè nella continuità ininterrotta della storia il pensiero scientifico dell' oggi per ineluttabile necessità si lega al pensiero scientifico di ieri, e dal ritornare alle sue origini lontane o prossime arriva ad una migliore conoscenza di sè medesimo e ad un più sicuro procedere verso le inevitabili trasformazioni future, così io sono convinto sia urgente opporsi a che quell' opinione, basata su un' imperfetta cognizione del vero stato delle cose, si affermi e diffonda. Lo penso anche, perchè, a mio avviso, lo studio della storia della scienza esercita una salutare influenza sulla mente di ogni scienziato. Questi acquista col mezzo di essa serenità nell' accogliere ed imparzialità nel giudicare le nuove dottrine, dopo avere su mille esempi riscontrato come l'errore segni il cammino dall' ignoranza alla verità, e il paradosso dell' oggi possa divenire domani dogma scientifico; e si procurerà in tal modo un antidoto contro quell'avversione a tutto ciò che sa di nuovo, la quale può soffocare i più nobili tentativi di scoperta del vero. Egli diverrà indulgente verso le imprese più chimeriche, apprendendo quanto debba la chimica alla ricerca della pietra filosofale, la fisica a quella del moto perpetuo, l'astronomia allo studio dell' influenza dei corpi celesti sui destini dell' uomo; sarà guardingo prima di condannare all' ostracismo i lavori meno perfetti, percorrendo opere che, come l'Ottica di NEWTON, sono sempre degne di ammirazione e di studio per quanto abbiano siccome canoni fondamentali delle proposizioni oggi inammissibili; egli si corazzerà infine contro il pericolo di ritenere assolutamente indispensabile per una fertile indagine della verità quell' immenso arsenale di strumenti dei quali ogni giorno egli si serve, quando apprenderà gl'ingegnosi espedienti usati in passato per sopperire alla loro mancanza.

Tuttavia se, per queste ragioni ed altre molte che il desiderio di esser breve mi persuade a passare sotto silenzio, ritengo ingiusto il severo giudizio che molti sulla storia della scienza pronunciano, sono costretto ad ammettere essere esso, in parte almeno, giustificato dal modo con cui essa veniva intesa e trattata in epoche non molto discoste da noi. Ed invero, sino a poco tempo addietro, si dimenticava essere la storia tanto racconto di effetti quanto ricerca di cause, epperò si riguardava essere cómpito esclusivo dello storico l'ammassare il più gran numero di notizie bibliografiche, e il diminuire l'aridità di una tale raccolta con particolari relativi alla vita dei singoli autori; unica preoccupazione dello storico era quella di rendere

l'esposizione gradita al gran pubblico, ed intelligibile anche per coloro che non erano versati nella scienza di cui egli scriveva i fasti. Oggi all' opposto si tende ad espellere dalla storia di qualsivoglia dottrina tutto che rifletta esclusivamente la vita privata dei cultori di essa, per tener conto soltanto delle circostanze atte ad illuminare l'origine e l'evoluzione successiva delle loro idee e, più generalmente, l'ambiente intellettuale nel quale essi operarono; per compenso si esaminano con occhio di lince tutte le produzioni superstiti, per iscoprirne l'orditura e constatarne le più importanti conseguenze e determinare quindi le successive fasi di sviluppo di ogni teoria ed i loro scambievoli rapporti, in base alle quali desumere il modo in cui lo spirito umano procede dalle tenebre alla luce. In una parola, alla biografia degli scienziati si sostituisce la storia delle idee, e il desiderio di dilettare un pubblico numeroso si surroga coll' intendimento di completare l'istruzione necessaria a chiunque voglia coltivare con successo una data disciplina.

Ora siccome in ragion diretta della serietà degli ideali di chi proponesi di studiare un determinato tema, crescono gli ostacoli che si frappongono al conseguimento dell' intento, così il condurre oggi a buon termine una ricerca storica esige non di rado degli sforzi intellettuali comparabili a quelli necessari per compiere certe investigazioni scientifiche; tanto più che le difficoltà da sormontare sono di natura differente a norma del periodo storico che si studia. E così colui che esamina i fatti accaduti nelle antiche età deve, più che in qualunque altra circostanza, tenere presente il primo dei cardini posti da Cartesio al sano filosofare, quella cioè di *non accettare mai per vera cosa alcuna che non si conosca ad evidenza esser tale;* armarsi in conseguenza, non di un cieco pironismo, ma di un scetticismo illuminato, a fine di ascrivere fra i veri soltanto quei fatti su cui non può nascere discussione. Orbene, per raggiungere tale certezza è quasi sempre necessario passare attraverso una lunga trafila di testimonianze intermedie; per avere piena conoscenza di una dottrina non basta attingere alle opere di un autore e de' suoi contemporanei, ma bisogna spesso percorrere la letteratura di parecchi secoli e chiedere informazioni a coloro che poterono valersi dei manoscritti originali; di ogni documento fa d'uopo dimostrare l'autenticità, di ogni autore bisogna indagare i procedimenti per discernere le citazioni di prima da quelle di seconda mano; ciascuna fonte secondaria deve venire minutamente discussa; per ogni tradizione conviene indagare il modo di formazione e la via per la quale giunse

fino a noi; nè si deve dimenticare la determinazione dell' ordine in cui si succedettero le varie ricerche e dell' età relativa de' vari autori, per non essere trascinati a giudizi tanto erronei quanto sarebbero quelli che farebbe un individuo incapace di percepire giustamente il rilievo degli oggetti e ignaro di tale imperfezione del suo organo visivo. Ma sgraziatamente, anche attenendosi a tutte queste regole, anche usando tutte le cautele immaginabili, non si arriva sempre a conseguenze che tutti ritengono per vere; spesso *si sente* di aver raggiunto la verità, ma si è tormentati dalla persuasione di essere incapaci di trasfondere in altri il proprio convincimento; donde deriva che certe questioni ricevettero parecchie soluzioni fra loro contradditorie eppure egualmente verosimili, fra le quali ciascuno è libero di scegliere quella che maggiormente lo soddisfa.

Alle investigazioni concernenti le origini di un' antica dottrina, le quali formano le delizie dello storico propriamente detto, fanno splendido riscontro quelle, che esercitano la più grande attrazione sullo scienziato di professione, aventi per iscopo la ricostruzione di un edificio scientifico del quale siasi conservato un solo frammento, ricostruzione analoga a quella (che l'anatomia comparata rese possibile) di un animale del quale ci siano presentate alcune membra. Tali lavori di divinazione possono essere condotti con metodo uniforme e guidare a risultati la cui verosimiglianza confini con la certezza, nelle matematiche, ove le varie proposizioni sono siffattamente collegate fra loro che non si può conoscerne una senza essere in possesso anche delle precedenti; ed in fatto molte delle notizie che abbiamo intorno alla geometria greca prima di EUCLIDE sono il frutto di una rigorosa applicazione di tale procedimento.

Passando dalla contemplazione delle splendide produzioni del genio greco, all' esame dei contributi arrecati dall' età di mezzo alle nostre cognizioni positive, saremo dolorosamente impressionati dall' assenza quasi totale di pensatori originali; troveremo in regola dei commentatori, non degli autori; proveremo quindi una sensazione non dissimile da quella che avverte chi passa da un luogo sfarzosamente illuminato ad uno avvolto in una fitta tenebra: e se un accurato esame ci farà scorgere nell' ampia oscurità qualche punto brillante, a cui curiosamente ci avviciniamo, che cosa troveremo? tranne rarissime eccezioni, non una fiamma che avviva e riscalda, ma un pallido fuoco fatuo, ultimo derivato dei prodotti di altri tempi che l'ambiente mefitico conduce alla decomposizione.

Perciò nello studio delle opere medioevali si va incontro,

più che in qualunque analoga circostanza, al grave pericolo di smarrire la diritta via e seppellire quelle opere sotto il più profondo disprezzo. Per evitarlo fa mestieri rievocare il mezzo intellettuale nel quale esse furono pensate e scritte, rendersi esatto conto delle condizioni in cui versavano i loro autori in un tempo nel quale, secondo la geniale congettura di un grande poeta, l'architettura sacra era così sviluppata ed ardita perchè rappresentava l'unico campo in cui poteva liberamente estrinsecarsi l'umano intelletto. Tale rievocazione riesce senza dubbio sommamente difficile a noi che viviamo in una epoca in cui la scienza impera come sovrana assoluta; ove però perveniamo a trasportarci col pensiero in quell' epoca, il disprezzo nel quale saremmo tentati di tenere quanto allora venne intrapreso, trasformasi ben presto in ammirazione verso coloro che curarono a che la face della scienza non si spegnesse del tutto; e lo fecero, non già colla fiducia di ritrarne onore e fama, ma colla prospettiva di essere tenuti in conto di maghi o di allucinati; non già colla speranza di raggiungere una onorata fama, ma disposti ad essere in conseguenza tratti sulla via che conduce alla tortura od al rogo.

Nelle ricerche storiche riferentisi alla vita intellettuale del medio evo spesso accade di trovarsi di fronte ad errori assai gravi in cui incorsero gli studiosi di quel tempo, errori per ognuno dei quali si ripresenta la questione se sia debito dello storico il registrare, assieme agli sforzi coronati da buon successo, i tentativi falliti. A me sembra che sia dovere della storia della scienza l'indagare quali idee furono fertili di conseguenze degne di nota, l'assegnare ad esse un posto stabile nel nostro patrimonio scientifico e constatare il naufragio di quelle che non furono abbastanza robuste da poter navigare nel mare procelloso di una critica acuta e rigorosa. In conseguenza, se da un lato credo sarebbe ingiustizia passare sotto silenzio quei conati, infruttuosi bensì, ma in cui esistono germi che diedero in altre circostanze frutti sani e succosi, o quelli che servono a indicare una certa vita intellettuale in un' epoca di letargo; se inoltre credo assai utile porre allo scoperto l'errore che s'annida in certi pseudo-ragionamenti; per converso il serbare memoria di certi grossolani paralogismi, che sembrano quasi prodotti dall' avere i loro autori di deliberato proposito chiuso gli occhi dinanzi alla luce del vero, è a mio credere dannoso forse o per lo meno inutile: e mi sembra indegno della scienza e della storia seguire il consiglio di chi (Montucla) vorrebbe, quasi per rappresaglia, tradurre come malfattori dinnanzi alla posterità le persone che i fatti dimostrarono intellettualmente degradate.

L'eterno oblio non è forse la sorte che ragionevolmente spetta a coloro che con mezzi illeciti tentarono di elevarsi più di quanto avevano diritto? e d'altronde l'oscurità non è forse condanna abbastanza grave per chi volle brillare ad ogni costo?

Il constatare ora come una gran parte delle questioni che s'incontrano studiando la storia scientifica antica e medioevale, abbiano le loro analoghe nella storia moderna di soluzione estremamente più facile, può far credere che la bisogna di chi indaga le vicende della scienza in tempi a noi vicini sia assai agevole. Ma che ciò non sia si riconosce osservando come alle difficoltà che presenta l'investigazione dello stato della scienza in epoche da noi lontane, altre non meno gravi subentrino passando a tempi più vicini, prodotte dall' ingente produzione intellettuale e dalla maggiore varietà ed elevatezza di concetti su cui essa aggirasi. Sicchè lo storico coscienzioso deve disporre di un' accuratezza infinita per procurarsi un completo materiale di studio, di una vasta coltura scientifica che gli consenta di intendere le opere che deve esaminare, e di un non comune acume critico per valutare il valore di quelle opere, e cioè il valore intrinseco, il valore rispetto all' epoca in cui furono composte, il valore riguardo alle conseguenze che ebbero. Qui pertanto si manifesta più chiaramente la necessità di un mutamento nell' indirizzo delle ricerche storiche, fondato sulla divisione del lavoro; e mentre un tempo il MONTUCLA si illuse che un sol uomo potesse render conto di tutti i progressi che le matematiche, sia pure che applicate, fecero dalle origine fino a'giorni suoi, ora si è già riconosciuto indispensabile studiare a parte la storia della matematica pura e quella di ciascuna delle sue svariate applicazioni; anzi si va ognor più raffermando e diffondendo la convinzione che anche ciascuna di queste storie parziali non potrà mai raggiungere il desiderato grado di perfezione, se non allor quando si sarà ricchi di un buon numero di particolari monografie storiche su ogni ramo delle matematiche, scritte da persone aventi speciale competenza.

Altre difficoltà presenta la storia moderna, perchè si esige che essa porga particolari incomparabilmente più minuti dell' antica: si vuole che da essa vengano rivelati i fattori prossimi e remoti delle scoperte di maggiore rilievo, messi in luce i rapporti fra gli autori più noti, e che col suo mezzo vengano definitivamente risolte quelle spinose questioni di priorità che turbano quella bella concordia che d'ordinario regna fra gli scienziati. Per rispondere a tutte le domande che in conseguenza si affollano alla sua mente, lo storico si trova di sovente trasci-

nato a compiere delle scorrerie in campi estranei alla cerchia consueta de' suoi studi nell' intento di procurarsi il combustibile con cui fare un po' di luce, e spingersi perfino a indagare tanto le relazioni politiche, commerciali ed intellettuali fra popolo e popolo, quanto le condizioni interne di ogni paese.

Errerebbe chi credesse che il vasto programma dell' odierna storia scientifica, del quale ho dianzi indicati alcuni articoli, sia ancora tutto da svolgere. Al contrario, si è già percorso buon tratto di cammino verso la conoscenza di quanto accadde in passato, e con gioia posso constatare come il moto in avanti, lungi dall' arrestarsi, accenni a proseguire con velocità crescente ed invadere tutto il mondo civile.

L'angustia dello spazio mi costringe a tacere degli importanti documenti, di recente scoperti e pubblicati, che svelarono le cognizioni aritmetiche e geometriche possedute dai popoli che precorsero gli Europei nell' arduo cammino delle scienze. Ma non posso per converso lasciare inosservato come la storia della matematica greca abbia raggiunto in questo ultimo quarto di secolo una perfezione insperata; cosicchè, prescindendo da qualche nube (che forse non si giungerà mai a dissipare) ancora avvolgente alcuni metodi di ricerca e specialmente i procedimenti di calcolo numerico, si è in grado di delinearne i contorni e disegnarne con esattezza anche molti particolari. È forza e dovere riconoscere che ciò è stato reso possibile dal valido aiuto che i cultori della filologia classica volonterosamente offrirono ai matematici: essi, col preparare delle eccellenti edizioni critiche dei più eminenti scienziati greci, nelle quali sono indicati i passi di origine dubbia, le interpolazioni, le aggiunte di posteriori commentatori, in una parola facendo servire a nostro vantaggio gli attrezzi ed i metodi dell' esegesi e dell' ermeneutica moderne, ci posero in grado di accertare la genuinità di alcuni testi, di migliorarne altri e di ricostruirne altri ancora.

Quanto alla storia della matematica presso i Romani, dopo il bel lavoro di Maurizio Cantor, ben poco ci resta a fare; d'altronde l'epoca in cui essi dominarono è una delle più sterili in produzioni scientifiche, tanto che si sarebbe tentati di giudicare quei nostri lontani progenitori come incapaci a piegare il loro genio pratico alle astrazioni della scienza; si può tutt' al più far merito ad essi di avere fatto in principio del medio evo quello che alla fine fecero gli Arabi, di avere cioè conservata e trasmessa la tradizione del sapere greco.

Per quanto concerne la storia scientifica dell' età di mezzo furono già raccolti e sfruttati molti importanti materiali; molti,

ma non ancora a sufficienza. E per rendere meno imperfetta la nostra conoscenza di quell' epoca la generalità dei matematici deve rivolgersi per aiuto agli orientalisti, la cui collaborazione sembra indispensabile per determinare con esattezza quanto fecero gli Arabi, sia di originale, sia per tramandarci le produzioni dell'antica Grecia; si rivolgono agli eruditi di professione per ottenere vengano tolti dagli archivi, decifrati e pubblicati quei preziosi manoscritti a cui troppo spesso si tributa un culto simile a quello degli Egiziani per le mummie schierate nei sotterranei.

Finalmente per quanto concerne la storia scientifica moderna, siamo giunti recentemente in possesso del secondo volume dell' opera magistrale dell' illustre capo della scuola storica tedesca, volume che ci abilita a giudicare quanto i matematici fecero prima dell' invenzione del calcolo infinitesimale. Inoltre di quei tempi e dei tempi posteriori altre scritture sono capaci di porgere ampie sebbene non complete notizie. Esse però non hanno il potere di sconsigliare dal portare a compimento, cambiandone forse il piano e le tendenze, la grande impresa a cui si accinse GUGLIELMO LIBRI scrivendo l'*Histoire des sciences mathématiques en Italie;* il lasciarla più a lungo nello stato frammentario nel quale attualmente si trova potrebbe ingenerare la falsa opinione che, spento GALILEO e dispersa la sua scuola, l'Italia sia stata, sino ai nostri tempi, sterile in matematici originali.

Intanto mi sia concesso esprimere il desiderio che queste pagine abbiano in primo luogo la virtù, se non di svelare agli spregianti o incuriosi la grandezza della storia della scienza, almeno di ricordare le belle parole di LEIBNIZ: *La verità è più diffusa di quanto si pensi; ma è spessissimo nascosta, avvolta, affievolita, mutilata, corrotta da aggiunte. Col rilevare le traccie di verità presso gli antichi ed i predecessori si caverà il diamante dalla sabbia, la luce dalle tenebre, e si riuscirà a formare una filosofia perenne.* E in secondo luogo quello di attrarre l'attenzione degli eruditi sul campo vasto e fertile in utili risultati che loro offre la storia della scienza; di scuoterli dall' indifferenza che molti affettano per essa, convincendoli esser dessa un elemento integrante della conoscenza di qualunque popolo, di qualunque secolo; di indurli quindi a prestare il loro valido aiuto agli scienziati titubanti nell' interpretare gli antichi testi; in una parola di stringere un' alleanza fra gli scienziati ed i cultori delle discipline storiche e filologiche, senza della quale sembra vana la speranza che la storia delle matematiche compia in avvenire dei progressi comparabili a quelli che incessantemente vanno facendo gli altri rami dello scibile.

Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.

Di Gino Loria a Genova.

Nel presentare al r. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti il vol. V (nuova serie) delle Bibliotheca Mathematica, il prof. Favaro notava, a proposito dell' *Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche* ivi contenuto (p. 99—112), che io avrei potuto forse fare a quel lavoro delle nuove aggiunte »pescando nelle famose *Riviste di giornali* del Bellavitis».[1] Sembrommi quindi doveroso di seguire il consiglio implicitamente contenuto in questa osservazione; ed ora mi gode l'animo nell' asserive che, avendo percorsa attentamente la completa e variopinta collezione delle prelodate *Riviste,* trovai in un solo punto di esse fatto un cenno rapidissimo del teorema su cui erigesi la teoria delle equazioni algebriche. Alludo a quel passo della *Settima rivista*[2] ove il celebre inventore del metodo delle equipollenze discorre della dimostrazione del Foscolo (n. 36),[3] per segnalare i punti di contatto che essa manifesta con una esposta assai prima dal Bellavitis stesso nel § 15 del *Saggio sull' algebra degli immaginarii.*[4]

Forse non mi sarei deciso a far noto questo piccolo risultato di quella modesta ricerca bibliografica, ove non avessi così rinvenuta l'occasione desiderata per dare notizia di alcune importanti investigazioni[5] che vennero ad accrescere in modo notevole la letteratura dell' argomento in questione.

Fra esse meritano il posto d'onore quelle di Weierstrass,[6] le quali in sostanza arrivano a trasformare in argomentazione rigorosa e concludente uno pseudo-ragionamento antichissimo, il cui punto debole non era sfuggito a Gauss. Infatti il grande analista di Berlino si propone di dimostrare che, posto

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=x^n+\sum_\nu (x_1\ldots x_n)_\nu x^{n-\nu},$$

ove ν qui ed in seguito assume successivamente tutti i valori interi da 1 a n, e supposte date n costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, esistono sempre n altre quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfacenti le n equazioni seguenti

$$\text{(S)} \qquad (x_1\ldots x_n)_\nu = C_\nu,$$

tali, cioè, che, posto

$$f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n$$

risulti identicamente

$$f(x) = \prod_\nu (x - x_\nu).$$

A tale scopo egli insegna un algoritmo con cui, date le C, si possono determinare le quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfacenti il sistema (S), senza, ben inteso, presuppore nota prima l'esistenza di tali quantità. In questo metodo di calcolo si ammette essere differente da o il discriminante di $f(x)$ e noto un sistema di n quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soddisfacenti le condizioni

$$\text{(C)} \qquad | C_\nu - (a_1 a_2 \ldots a_n)_\nu | < d_0,$$

ove d_0 è un numero positivo soggetto a certe limitazioni che per brevità qui si tacciono; da esso sistema se ne deducono successivamente altri $a'_\nu, a''_\nu, \ldots,$ mediante le equazioni

$$a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\prod_\mu (a_\nu - a_\mu)}, \qquad a''_\nu = a'_\nu - \frac{f(a'_\nu)}{\prod_\mu (a'_\nu - a'_\mu)}, \ \ldots \ \text{ove } \mu \gtrless \nu.$$

Le quantità $a_\nu^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ così definite sono tutte finite. Se si pone $A_\nu^{(\lambda)} = (a_1^{(\lambda)} \ldots a_n^{(\lambda)})_\nu$ e si chiama $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$, per un certo valore di λ, la massima fra le quantità $| C_\nu - A_\nu^{(\lambda)} |$, si avrà $\varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda}$. Finalmente se si designa con $\varphi_\lambda(x)$ il prodotto $\prod_\nu (x - a_\nu^{(\lambda)})$ e con $\psi_\lambda(x)$ la differenza $f(x) - \varphi_\lambda(x)$, le n quantità

$$(*) \qquad x_\nu = a_\nu - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\varphi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})},$$

queste soddisfaranno il sistema (S). Tutto dunque è ora ridotto ad assodare la esistenza delle quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soddisfacenti le condizioni (C): ciò vien fatto dal WEIERSTRASS nel terzo § della sua memoria, servendosi di due proposizioni che, a mò di lemmi, egli premise nel secondo. Per una prossima scrittura egli riserba l'esposizione di complementi al suo notevolissimo ragionamento (a dimostrarne l'importanza basta segnalare le formole (*), le quali dànno esplicitamente tutte le varie radici della equazione proposta), dopo averne con una semplice os-

servazione estesa la portata sino ad includere il caso in cui il discriminante di $f(x)$ sia nullo.

Le altre indagini su cui credo opportuno di fissare l'attenzione degli algebristi sono dovute al MERTENS[7] e rappresentano uno svolgimento ulteriore dei concetti che governano le anteriori pubblicazioni del medesimo autore sullo stesso tema (n. 74). Come le antiche, le nuove indagini sono di quelle che è impossibile riassumere; ci limitiamo pertanto alla seguente notizia. Quando un' equazione algebrica ad un' incognita $f(z)=0$ non possiede alcuna radice (reale o complessa) razionale, in generale ad essa non si può soddisfare che adoperando un procedimento di approssimazione continua illimitata; laonde dimostrare il teorema fondamentale dell' algebra non può significare altro che scoprire un modo per determinare successivamente dei valori razionali di $z=x+iy$ che rendano $|f(z)|$, funzione continua e sempre positiva delle variabili reali x e y, minore di qualsia numero positivo dato; e (supposto ancora che $f(z)$ e $f'(z)$ siano funzioni fra loro prime) a tale scopo è sufficiente sapere determinare, mediante un numero finito di tentativi, un valore a partir dal quale la notissima regola di NEWTON rappresenti un vero metodo di approssimazione. Gli è quello in cui mirano ed a cui giungono le argomentazioni del MERTENS.

Mi sia lecito di lamentare da ultimo che anche nel più pregevole trattato d'algebra che — per quanto a me consta — vide la luce in questi ultimi tempi,[8] il teorema fondamentale venga dimostrato con qual ragionamento incompleto,[9] che è oggi a cognizione di tutti per opera del *Cours d'algèbre supérieure* di J. A. SERRET.

[1] A. FAVARO, *Sulla Bibliotheca mathematica di Gustavo Eneström.* Atti del r. istituto Veneto **3**$_7$, 1892, p. 643.

[2] Atti dell' i. r. Istituto Veneto **10**$_3$, 1865, p. 136—137.

[3] I numeri in parentesi servono di richiami all' Elenco con cui si chiude il mio articolo precitato.

[4] Memorie dell' i. r. Istituto Veneto **4**, 1852, p. 263.

[5] Escludo quelle di E. AMIGUES e P. MANSION di cui fa cenno il T. XXII (p. 107) del Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

[6] Furono annunziate all' Accademia di Berlino nel 1859 (v. Monatsberichte p. 758) e di nuovo nel 1868 (v. Monatsberichte p. 428); vennero ad essa poi presentate il 21 Febbrajo 1889 ed inserite nel resoconto della seduta del 17 Dicembre 1891, sotto il titolo *Neuer Beweis des Satzes*

dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen.

[7] *Der Fundamentalsatz der Algebra.* Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wiss. in Wien (Math.-naturv. Classe) **101**, 1892, p. 415—424; e Monatshefte für Mathem. und Phys. (Wien) **3**, 1892, p. 293—308.

[8] G. CHRYSTAL, *Algebra, an elementary text-book.* Part I. Second Edition. Edinburgh 1889.

[9] Cfr. Bibliotheca Mathematica 1891, p. 101.

Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen.

Notiz von M. Steinschneider in Berlin.

Ich beabsichtige in dieser Zeitschrift eine chronologische Übersicht der mathematischen Studien der Juden seit dem 10. Jahrhundert zu geben; einen wichtigen *Teil* der betreffenden Literatur bilden hebräische *Übersetzungen* aus verschiedenen Sprachen, welche ich in einer Monographie behandelt habe. Da ich auf letztere öfter werde Bezug nehmen müssen, so mag die nachfolgende Notiz darüber als *Vorläufer* der, im nächsten Hefte beginnenden Übersicht angesehen werden.

Im Jahre 1880 stellte die »Académie française» als Preisaufgabe eine vollständige Bibliographie der hebräischen Übersetzungen des Mittelalters ohne Unterschied des Inhaltes und der Sprache der Originale. Mein Memoire in französicher Sprache hatte das Glück, im Jahre 1884 den Preis zu erlangen. Es sind darin nicht bloss die Übersetzungen, sondern auch die Commentare und Compendien etc. erschöpfend behandelt. Ich habe es vorgezogen, meine Untersuchungen in deutscher Sprache zu veröffentlichen, und das betreffende Werk ist so weit gediehen, dass die 8 Register, welche die Titel, die Namen und Sachen und die angeführten Handschriften umfassen, auf Seite 1086 abschliessen. Wenn diese Zeilen in die Hände der Leser gelangen, ist auch die kurze Vorrede abgedruckt, und das fertige Werk in 2 Bänden erschienen.* Wenn auch anzunehmen ist, dass diejenigen Gelehrten welche sich mit Geschichte der Mathematik beschäftigen, bei dem Zusammenhange der Geschichte der Wissenschaften überhaupt, sich für verschiedene Partien des Werkes interessiren könnten, welches nicht bloss die hebräischen Übersetzungen vollständig aufzählt, sondern auch die Autoren und Werke selbst zum Gegenstand der Forschung macht; so scheint es mir doch aus dem oben angegebenen Grunde angemessen, die Leser der Bibliotheca Mathematica durch die folgenden Zeilen mit dem Inhalte des Abschnittes »Mathematik» (S. 501—650) genauer bekannt zu machen.

* Das Werk (in 300 Exemplaren gedruckt) ist, zum Preise von 30 Mk. direct von dem Bibliographischen Bureau in Berlin oder durch jede Buchhandlung zu beziehen. Um das Publikum in Stand zu setzen, den Inhalt und Umfang des Werkes zu beurtheilen, habe ich von der speciellen »Übersicht» eine Anzahl von Exemplaren, gewissermassen als Prospect, drucken lassen, welcher auf Verlangen gratis zu beziehen ist.

Im Allgemeinen sei bemerkt, dass das Werk in 5 Abschnitte zerfällt; vorangeht: »Allgemeines» (Encyklopaedik und dergl.). Abschn. I: Philosophie; II: Mathematik; III: Medicin; IV: Verschiedenes; V: die Juden als Dolmetscher. Jeder der Abschnitte I—IV zerfällt in IV Kapitel: Griechen, Araber, Juden, Christen; die Paragraphen laufen von 1—590 fort; jeder Artikel beginnt mit Angaben über Zeit und Vaterland des Verfassers unter Anführung der besten Quellen. Die hebräischen Übersetzungen, welche nicht direct aus den Originalen geflossen sind, werden auf ihre Mittelquelle zurückgeführt. Es handelt sich überwiegend um mss., welche vollständig aufgezählt sind.

Der Abschnitt Mathematik beginnt mit Vorbemerkungen zu Kapitel I: Griechen § 309. Es folgen (in alphabetischer Reihe) ARCHIMEDES, von der Sphäre und dem Cylinder, *de mensura circuli* § 310. AUTOLYKOS, von der Sphäre in Bewegung 311. EUKLID, Elemente 312—313, arabische und andere Commentare 314; *Data*, Optik, Buch der Spiegel 316. EUTOCIUS, Commentar zu ARCHIMEDES 317. HERMES, über die Fixsterne 318. MENELAOS, *Sphaerica* 319. NIKOMACHOS, Arithmetik 320. PTOLOMÄUS, 321; *Almagest* 322—324, *Quadripartitum* 325, *Centiloquium* 326—328, *Planisphaerium* 329, 330, Astrolab 331, 332, Hypothesen 333. Einleitung (GEMINUS) 334, Verschiedenes 335. THEODOSIUS, *Sphaerica* 336.

II. Kapitel: Araber. IBN AFLA'H, Astronomie 337, Sector des MENELAOS 338. ALBUBATER 339. AVERROËS, kurzer *Almagest* 340. BATTANI, Astronomie 340[b]. BITRODJI, Astronomie 341. COSTA BEN LUCA, *Globus* 342. FERGANI, Astronomie 343, Compendien und Commentare 344. AL-'HASSAR, Rechenkunst 345. IBN AL-HEITHAM, *de Imaginibus* 346, Astronomie 347—349. KABISI (ALCABITIUS), Astrologie 350. AL-KINDI, Nativitäten, Regen, Ursachen des Regens 351. KUSCHJAR, Tabellen 352. ABU MA'ASCHAR, Einleitung in die Astrologie 353—354. AL-MATANI (MUTHANNA), Gründe der Tafeln des KHOWAREZMI 356. IBN MU'ADS, Sonnenfinsternisse, Morgenröte 357. MUHAMMED BEN MUHAMMED, Bogenquadrant 358. OMAR BEN MUHAMMED, Astronomisches Compendium 359. IBN ABI'L RIDJAL, Astrologie 360—361. IBN AL-SAFFAR, Astrolab 362. IBN AL-'SAM'H, Cylinder und Kegel 363. SCHODJA, Algebra 364—367. THABIT BEN KORRA, *Figura sector* 368. ZARKALI, *Safi'ha* (Scheibe) 369—371. — Anonyme Schriften 372, 373.

III. Kapitel: Juden. JAKOB AL-CORSONO, Astrolab; JOSEF ISRAELI, Compendium der Astronomie seines Vaters 374. JOSEF IBN NA'HMIAS, Licht der Welt (Astronomie) 375. JOSEF IBN

WAKKAR, astronomische Tabellen 376. MAIMONIDES, Chronologie 377. MASCHALLAH 378, astrologische Fragen, Eklipsen 379. SAHL BEN BISCHR 380—381, astrologische Urteile 382. — Anhang: JAKOB BEN MACHIR (PROPHATIUS), *Quadrans novus* 383—386. JAKOB POËL, astronomische Tafeln 387.

IV. Kapitel: Christen. ALFONS X, astronomische Tafeln 388. (St. ARCHANGEL 389). ALFONSO, Quadratur des Zirkels 391. BARTOLOMEO DEI MANFREDI, Celidario 392. BIANCHINI, *Tabularum canones* 393, 394. CHRYSOCOCCA, persische Tafeln 395, 396. DARDI aus Pisa,[1] 194 Probleme aus den Beziehungen der 5 numerischen Quantitäten 397. GERARD VON SABBIONETTA 398, *Theorica planetarum* 399. HERMANNUS CONTRACTUS, *de mensura astrolabii* 400. JOHANNES VON GMUND, Aspecte der Sterne 401. JOHANNES DE SAXONIA, *Canones, Mutatio aëris*(?) 402. LUCA PACIUOLO, *Summa de Arithmetica* etc. 403. PEDRO IV, astronomische Tafeln 404. ALESS. PICCOLOMINI, *La spera del mondo, theoriche* 404[b]. PURBACH, *Theorica planetarum* 405. REGIOMONTANUS, Ephemeriden 406. SACROBOSCO, *Sphaera mundi* 407—411. — Anonyme Schriften: Pariser Tafeln, Quadrant, Eklipsen, geometrische Probleme, astrologisches Fragment 412.

Von der gesammten hier behandelten Literatur ist fast gar Nichts gedruckt. Zwei Übersetzungen von SACROBOSCO's *Sphaera* erschienen Offenbach 1720, 4°, eine Abhandlung über den jüdischen Kalender von MAIMONIDES, aus dem Arabischen, Frankfurt a. M. 1849 (näheres im *Catal. Bodl.* p. 2254 und 1917). Hingegen sind *Hunderte* von Mss. in aller Welt zerstreut, deren bekannte Beschreibungen vielfach einer kritischen Zurechtstellung bedurften.

[1] Über diesen Autor (ms. Paris 1029) habe ich keine Nachricht auffinden können.

Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.

Nota di P. Riccardi a Modena.

Nelle mie indagini intorno ai codici Euclidei mi è occorso di consultare un codice miscellaneo di proprietà privata, il quale per la sua importanza merita una particolareggiata descrizione.

Esso consta di un volume rilegato in cartapecora, delle dimensioni nei fogli di milimetri 245×182, composto di 147 carte in 4°; cioè car. numerate 1, ..., 66, due car. senza numeri, car. 77 numerate 67, ..., 143, e due car. bianche nel fine, senza numerazione. Le car. 1ª, 8ª e 9ª, 16ª e 17ª, 25ª e 26ª, 34ª e 35ª, 42ª e 43ª, 50ª e 51ª, 58ª e 59ª, 66ª, 67ª, 68ª e 69ª, 76ª e 77ª, 84ª e 85ª, 92ª e 93ª, 100ª e 101ª, 109ª e 110ª, 118ª e 119ª, 126ª e 127ª, 134ª e 135ª, 142ª e 143ª sono membranacee e le altre tutte bombicine con marca di fabbrica.

E scritto in carattere ebraico nitidissimo, quasi uniforme e presumibilmente della stessà mano; ed è corredato di figure geometriche ed astronomiche ben disegnate, interposte al testo. Come ammanuense vi è indicato Mordechai Finzi da Mantova, il quale afferma di averlo trascritto nel periodo dal 1441 al 1456.[1]

Contiene i seguenti scritti.

I. Da car. num. 1 *verso* a car. 67 *v°*. I primi sette libri degli Elementi di Euclide tradotti dall' arabo in ebraico dal Rabbino Jahakov Ben Machir, nato a Cordova verso la fine del secolo XII, ed appartenente alla celebre famiglia dei Tibboniadi, valenti volgarizzatori di opere arabe.[2]

Al testo dei primi libri degli Elementi, preceduto da una breve prefazione del traduttore, sono intercalate le figure geometriche rispondenti al testo Euclideo secondo la versione dall' arabo attribuita al Campano.

II. Da car. 68 *recto* a car. 83 *verso:*

L'astrolabio di Abraham Aben Ezra.

In una nota illustrativa dell' ammanuense si legge: »Tutto questo è detto in modo approssimativo; ed eccoti un' altra lezione sullo stesso soggetto, tratta da un' altra spiegazione dell' astrolabio fatta dal dotto Rabbino Abraham Aben-Ezra, nell' anno 4906» (dell' era ebraica, corrispondente al 1146 dell' era volgare).

Vi sono intercalate alcune altre note dell' ammanuense, precedute sempre dalla locuzione: »Dice MORDECHAI FINZI ec.»

Nell' ultima di queste note si legge: »Qui finisce la spiegazione dell' astrolabio del dotto Rabbino ABRAHAM ABEN-EZRA del suo secondo esemplare».

Segue nel fine una nota del figlio del traduttore, sul modo di determinare le distanze e le altitudini, preceduta dalle parole dell' ammanuense: »Dice EMANUEL figlio di JAHAKOV ec.»

III. Da car. 84 *recto* a car. 104 *recto*. L'astrolabio di TOLOMEO.

a) Indice dei 40 capitoli componenti l'opera di TOLOMEO sugli strumenti (sic) dell' Astrolabio.

Nel fine dell' indice trovasi la nota dell' ammanuense: »Quì finisce la descrizione dell' astrolabio, tradotta dall' arabo in ebraico dal dotto Rabbino JAHAKOV figlio del dotto stimato Rabbino MACHIR di felice memoria.»

b) Modo di costruire l'astrolabio secondo il sistema di TOLOMEO (ricavato dal libro sui sette climi dello stesso astronomo).

L'ammanuense intercala al testo del summenzionato trattato (car. 97 *v*°—100 *r*°) parecchie sue note illustrative, facendole precedere dalla solita locuzione: »Dice MORDECHAI FINZI ec.»

A car. 99 *v*° trovasi la figura dell' astrolabio ben disegnata.

In altra notarella, scritta in carattere più minuto, si legge: »L'ho scritto io (intendasi il codice) MORDECHAI FINZI e l'ho corretto tutto, meno l'ultimo capitolo, nel mese di Scevat [Gennajo-Febbrajo] anno 201» [cioè 52ỏ1 dell' era ebraica, corrispondente all' anno 1441 dell' e. v.].

IV. Da car. 104 *v*° a car. 123 *v*°. Epistola sul modo di costruire la tavola detta *Zeppichà*, di ABU ISAC IBN ALZRACALA.[3]

Indice dei capitoli del trattato, cui fa seguito la nota dell' ammanuense: »Prima di cominciare a spiegare i summenzionati capitoli parve bene a me, MORDECHAI FINZI, di descrivere la tavola che vi va unita, e di chiarirla secondo mi venne fatto di comprendere dalle spiegazioni avute oralmente dal dotto maestro BARTOLOMEO DALL' OROLOGIO, abitante quì in Mantova, da me consultato e che mi fu largo di aiuto.»

Nel margine poi della pagina num. 105 *v*° si trova una nota del traduttore, scritta in carattere minutissimo, nella quale dà la descrizione della tavola *Zeppichà*.

V. Da car. 124 *r*° a car. 142 *r*°. Trattato della sfera celeste composto da COSTA figlio di LUCA, per HASMON ABDALAH IBN JACHIA.

Prefazione, indice dei 65 capitoli dei quali si compone il trattato, e nel fine del trattato la nota: »E finito il trattato della composizione della sfera celeste di COSTA figlio di LUCA. Lo tradusse il dotto Rabbino JAHAKOV, figlio di MACHIR, figlio di TIBBON. La traduzione fu terminata nell' anno 5016 della creazione» (corrispondente al 1256 dell' e. v.).

Segue nel fine la nota dell' ammanuense:

»Terminai di scriverlo io MORDECHAI FINZI, oggi mercoledì 10 Agosto 5216 della creazione (an. 1456 dell' e. v.) qui in Mantova, ed è libro assai corretto».

VI. Da car. 139 *v°* a car. 141 *v°*.

Modo di costruire il Mappamondo. (Anonimo).

VII. Da car. 142 *r°* a car. 143 *r°*.

Modo di costruire la meridiana. (Anonimo).

Da quanto ho esposto si comprende che MORDECHAI FINZI, cui è dovuta la trascrizione del codice, non era solo un accurato scrivano, ma un istruito ammanuense e conscienzioso postillatore; e che a vantaggio della storia della scienza codesto codice, tradotto in lingua più conosciuta, forse meriterebbe di essere pubblicato.

[1] Debbo alla cortesia del dotto sig[r] SALOMONE JONA, Rabbino maggiore in Modena, la traduzione italiana degli squarci del testo che mi occorrevano per compilare questa recensione.

[2] V. nel catalogo del PASINI: *Codices manuscripti bibl. R. Taurinensis* ec. (Taurini, 1749, T. I, p. 3, col. 1ª, e p. 25 col. 2ª) la descrizione di preziosi codici ebraici degli Elementi di EUCLIDE tradotti dall' arabo da MOSE figlio del R. SAMUELE, figlio di GIUDA, figlio di TIBBON. E similmente si consulti il catalogo degli ASSEMANI: *Codices manuscripti biblioth. apost. vaticanae* (Romae 1756). Cfr. cod. CCXC, CCCXXXVIII, e CCCC.

[3] Nel British Museum esiste un ms. di ABU ISHAC IBRAHIM IBN AL ZARCILAH AL TULAITILI, intitolato: *Liber operationis per planam tabulam astronomicam, compositam ad dispositionem siderum et inveniendam aequationem prout figura celestis postulet.* Cfr. HOUZEAU et LANCASTER, *Bibliographie générale de l'astronomie,* t. I, par. I, p. 475.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

A. Rebière. MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATICIENS. PENSÉES ET CURIOSITÉS. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°, 4 + II + 566 p.

Ce livre se compose de quatre parties, dont la première se rapporte à la philosophie et à l'histoire des mathématiques, la deuxième contient des variétés et des anecdotes sur les mathématiciens, et la troisième est un recueil de paradoxes et de singularités mathématiques; dans la quatrième partie l'auteur a réuni un certain nombre de problèmes curieux, et à la fin il donne une liste bibliographique d'ouvrages sur la philosophie, l'histoire, les applications, l'enseignement et les curiosités des mathématiques.

Dans un journal consacré à l'histoire des mathématiques, le livre de M. REBIÈRE peut être mentionné pour deux raisons. D'une part, il contient, outre une esquisse de l'histoire des mathématiques, beaucoup de notices détachées sur le même sujet; d'autre part, on y trouve un recueil de matériaux pour l'histoire des opinions sur les mathématiques.

Quant à l'esquisse de l'histoire des mathématiques, elle n'embrasse que six pages (p. 119—124); l'auteur y a divisé le développement des mathématiques en sept périodes qu'il caractérise succinctement, et il ajoute quelques mots sur chacun des mathématiciens suivants: THALES, PYTHAGORAS, PLATON, EUKLIDES, ARCHIMEDES, APOLLONIOS, HIPPARCHOS, PTOLEMÆUS, DIOFANTOS, PAPPOS, GERBERT, LEONARDO PISANO, LUCAS PACIOLI, COPERNICUS, CARDANO, VIÈTE, NEPER, HARRIOT, GALILEI, KEPLER, DESCARTES, FERMAT, PASCAL, HUYGENS, NEWTON, LEIBNIZ, EULER, D'ALEMBERT, LAGRANGE, MONGE, LAPLACE, CARNOT, GAUSS, PONCELET, CAUCHY, JACOBI, CHASLES. Les indications sont parfois un peu superficielles; en voici deux exemples: »DIOPHANTE (350 ans ap. J.-C.) surnommé le Père de l'algèbre, crée enfin cette nouvelle branche dans ses *Arithmétiques*»; . . . »MONGE (1746—1818) fonde la géométrie descriptive, si utile aux ingénieurs».

Parmi les nombreuses notices historiques disséminées dans le livre de M. REBIÈRE, nous nous permettons d'indiquer ci-dessous quelques-unes qui méritent d'être complétées ou corrigées pour une troisième édition.

P. 124, 130. CHASLES est mort le 18 déc. 1880 (non 1876).

P. 140. L'auteur comprend l'*Histoire des sciences mathématiques* de M. MARIE parmi les ouvrages les plus importants

et les plus remarquables; cette indication aura peut-être besoin d'être un peu modifiée.

P. 142. M. Rebière mentionne les principaux journaux mathématiques publiés actuellement en France; il serait à propos de donner aussi une liste des principaux journaux mathématiques étrangers.

P. 273—275. La liste des mathématiciennes décédées peut être complétée par les noms Maria Cunitz (mort en 1664) et Maria Mitchell (1818—1889), professeur d'astronomie à Vassar College (New York, U. S. A.). Parmi les nombreuses mathématiciennes vivantes, il convient de signaler aussi Charlotte Angas Scott, professeur à Bryn Mawr College (Pennsylvania, U. S. A.).

P. 301. Le premier traité d'arithmétique qui a été imprimé n'est pas celui de Borgo (Venezia 1484), comme l'indique M. Rebière. En effet on connaît un traité d'arithmétique imprimé à Treviso en 1478, et deux traités parus à Bamberg respectivement en 1482 et en 1483.

P. 319. La notice sur les dimensions de la grande pyramide, probablement tirée de l'ouvrage connu de Piazzi-Smyth, n'a guère de fondement réel.

P. 416. L'auteur dit: »Fermat affirme, sans démonstration, qu'au-dessus du cube, la somme des puissances semblables de deux nombres n'est jamais la puissance semblable d'un troisième nombre«. Ici il faut mettre *carré* au lieu de *cube;* Fermat savait très bien que l'équation $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour $n = 3$.

P. 443. Parmi les savants qui ont fait des recherches sur les propriétés géométriques des alvéoles des abeilles, on peut signaler aussi F. W. Hultman (1868), K. Müllenhoff (1883) et H. Hennessy (1885).

Nous avons déjà fait observer que le livre de M. Rebière, contient des matériaux pour l'histoire des opinions sur les mathématiques. En effet, l'auteur a réuni un grand nombre de citations empruntées non seulement aux mathématiciens, mais aussi aux poètes, aux philosophes, aux hommes politiques aux orateurs sacrés, etc., et se rapportant toutes aux mathématiques. Ces citations ne sont pas toujours flatteuses; écoutons par exemple ce que dit Condillac (p. 351): »Le géomètre avance de supposition en supposition, et retournant sa pensée sous mille formes, c'est en répétant sans cesse *le même est le même,* qu'il opère tous ses prodiges.« Ce jugement peu favorable me rappelle quelques mots de l'amiral Jurien de la Gravière,

non cités par M. REBIÈRE, et que je me permets de rapporter ci-dessous:

> Les géomètres ont, plus que d'autres, besoin d'être jugés par leurs pairs: la géométrie, en effet, est un arcane. Elle tient ses assises à part, décerne ses prix sans phrase et, contemplant avec une juste fierté l'univers soumis en ses plus intimes profondeurs aux lois dont elle a saisi l'enchaînement, se refugie, calme et impossible, dans sa royauté silencieuse. C'est bien une royauté, en effet, et une royauté absolue qu'exerce cette science maîtresse qui ne connaît pas le doute comme ses soeurs et n'a jamais, depuis le temps d'EUCLIDE, bâti sur le sable. Ajoutous que, par son exemple, la géométrie a influé sur la direction imprimée à toutes les branches des connaissances humaines. (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, p. 1307.)

La lecture des aphorismes sur les mathématiques reproduits par M. REBIÈRE est souvent très instructive; en les comparant on trouve parfois la même pensée exprimée par plusieurs personnes. On pourrait donc se proposer comme un problème historique d'étudier le développement d'une certaine pensée à travers les âges. Prenons pour exemple la sentence de M^me^ DE STAËL (p. 162): »Rien n'est moins applicable à la vie qu'un raisonnement mathématique«. Sans doute cette pensée a été rendue un très grand nombre de fois depuis l'antiquité jusqu'à nos jours; en voici la dernière forme que je connaisse: »Les mathématiques donneront une fausse précision, une rigeur apparente, qui masque la faiblesse des raisonnements, une raideur inflexible qui multiplie les erreurs, les rend irréparables, et empêche la juste notion des choses. Helas! qu'il y a peu de mathématiques dans les choses de la vie: elles sont complexes, changeantes, faites de finesses, de sous-entendus, de détails, et impossibles à exprimer par une formule« (voir l'article de M. CHANDOS: *A propos de l'école polytechnique;* Revue scientifique **39**, 1887, p. 563).

La classification des morceaux choisis par M REBIÈRE n'est pas toujours satisfaisante. Dans la préface à la nouvelle édition il dit que les sujets analogues y ont été mieux groupés et réliés que dans la première édition, mais sans doute il reste encore des améliorations à faire à ce point de vue. Ainsi le problème des parapluies rapporté aux pages 401—402 est au fond identique avec le problème sur les chameaux à la page 482, et la démonstration de NICOLE, qu'il y a sur le globe au

moins deux hommes ayant le même nombre de cheveux, est mentionnée deux fois (p. 233—234, p. 482—483).

Afin que les lecteurs puissent retrouver sans difficulté les différents sujets traités dans le livre, M. REBIÈRE y a ajouté, outre la table des matières, un index ou table alphabétique comprenant les noms de choses et ceux de personnes.

Par ce qui précède, on voit que l'ouvrage dont nous avons rendu compte contient beaucoup qui puisse intéresser vivement les étudiants de l'histoire des mathématiques, et pour cette raison nous nous permettons de le recommander aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1893: 1.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
38 (1893): 3.

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Second edition. London, Macmillan 1893.
8°, XXIV + 520 p. — [10 sh.]

Besthorn, R. O. et Heiberg, J. L., Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. I: 1. Hauniæ 1893.
8°, (4) + 88 p.

Bobynin, V., Sur la propagation des signes numériques cunéiformes.
Biblioth. Mathem. 1893, 18—20.

Cantor, M., Ein historischer Papyrus in griechischer Sprache.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 81—87. — Sur le papyrus d'Akhmîm.

Craig, T., Some of the developments in the theory of ordinary differential equations between 1878 and 1893.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 119—134.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1893, 9—14.

Echols, W. H., Wronski's expansion.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 178—184. — Sur la loi suprême de WRONSKI.

El »Tratado sobre los cuerpos flottantes« de Arquímedes.
La controversia (Madrid) **7**, 1893, 280.

Favaro, A., Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli.
Biblioth. Mathem. 1893, 15—17.

Favaro, A., Serie ottava di scampoli Galileiani.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **9**, 1893, 9—48.

Favaro, A., Sopra un capitolo attribuito a Galileo Galilei.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{4}_7$, 1893, 725—730.

Favaro, A., Gli oppositori di Galileo. II. Liberto Froidemont.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{4}_7$, 1893, 731—745.

Gebbia, M., Guiseppe Albeggiani.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **7**, 1893, 39—47. — Nécrologie.

°**Gerland, E.,** Geschichte der Physik. Leipzig 1892.
8°, 356 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 62. (CANTOR.)

Gram, J. P., Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.
| *Kjöbenhavn,* Vidensk. Selskab, Oversigt 1893. 11 p.

Homén, Th., Galileo Galilei.
Finsk tidskrift (Helsingfors) **34**, 1893, 81—102.

Hyde, E. W., The evolution of algebra.
American association, Proceedings 1891, 51—65.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques, publié par la commission permanente du répertoire. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, XIV + 80 p. — [2 fr.]

Loria, G., L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte. Relazione fatta al quinto congresso storico italiano addì 22 settembre 1892. Genova 1893.
8°, 17 p.

Loria, G., Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare.
Periodico di matem. **8**, 1893, 81—113.

Loria, G., Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini.
| Giornale di matem. **31**, 1893. 8 p.

Macfarlane, A., The imaginary of algebra.
American association, Proceedings 1892, 33—55. — Mémoire en grande partie historique.

Mackay, J. S., Matthew Stewart's theorem.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **10**, 1892, 90—94. — [Résumé:] Mathesis $\mathbf{3}_2$, 1893, 63—64.

Mansion, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, 86 p. + portr.

Mc Clintock, E., On the early history of the non-euclidian geometry.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 144—147.

Meyer, F., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Jahresbericht **1**, 1892, 79—289.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Галилео Галилей, его жизнь и научная дѣятельность.
Vjestnik elem. matem. **13**, 1893, 217—222, 248—254. — PERGAMENT, O., GALILEO GALILEI, sa vie et son action scientifique. (Fin.)

Pressland, A. J., On the history and degree of certain geometrical approximations.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **10**, 1892, 23—34.

Rebière, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893.
8°, (4) + II + 566 p. — [5 fr.]

Reyes Prosper, V., La lógica simbolica en Italia.
El progreso matem. **3**, 1893, 41—42.

СУВОРОВЪ, Ѳ. М., В. Г. Имшенецкій.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Izviestia $\mathbf{2}_2$, 1892, B: 15—18. — SOUVOROFF, TH. M., V. G. Imchenetskij. (Nécrologie.)

Sturm, R., Heinrich Schröter.
| Chronik der Universität zu Breslau für 1891—92. 10 p. — Nécrologie.

Suter, H., Zur Geschichte der Trigonometrie.
Biblioth. Mathem. 1893, 1—8.

Tannery, P., La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, VII + 94 + (1) p. — [2 fr.] — Réimpression d'une série d'articles publiés dans le Bulletin des sciences mathématiques $\mathbf{15}_2$ (1891) et $\mathbf{16}_2$ (1892).

Tannery, P., Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires $\mathbf{1}_4$, 1893. VIII + 370 p.

°**Théon de Smyrne,** Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, traduite pour la première fois du grec en français par J. DUPUIS. Paris, Hachette 1892.
8°, 28 + 404 p. — [7·50 fr.]

Weissenborn, H., Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus.
Biblioth. Mathem. 1893, 21—23.

Zanotti Bianco, O., Sulla scoperta del potenziale.
Rivista di matem. **3**, 1893, 56—60. — [Résumé:] Nature (London) **47**, 1893, 510. — [Remarque:] Nature (London) **47**, 1893, 510. (E. J. ROUTH.)

Zeuthen, H. G., Note sur l'histoire des mathématiques.
| *Kjöbenhavn*, Vidensk. Selskab, Oversigt 1893. 17 p.

Question 41 [sur une récréation mathématique].
Biblioth. Mathem. 1893, 31—32. (G. ENESTRÖM.)

DIOPHANTI ALEXANDRINI Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Volumen I. DIOPHANTI quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 24—25. (G. ENESTRÖM.)

MUIR, TH., The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. London, Macmillan 1890. 8°.
Nature **45**, 1892, 481—482. (P. A. M.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 63—64. (CANTOR.) — Mathesis 3_2, 1893, 66.

Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam. I: 1. Amsterdam 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 25—27. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis 3_2, 1893, 92. (P. M. et J. N.) — *New York*, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 190—192. (A. ZIWET.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 4_7, 1893, 829—837. (A. FAVARO.)

RUDIO, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 64—65. (CANTOR.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Bullet. des sc. mathém. 17_2, 1893, 47—50. (P. TANNERY.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 28—31. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893 Hist. Abth. 79—80, 119—120.

Osservazione intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' Algebra del Bombelli.

A rettificazione di quanto afferma l'egregio mio collega ed amico prof. FAVARO (Biblioth. mathem. 1893, p. 15) intorno alla mia opinione che le due pubblicazioni dell' *Algebra* del BOMBELLI fatte nel 1572 e 1579 costituissero due distinte edizioni dell' opera stessa, faccio osservare che al seguito di quanto ne scrisse il GHERARDI espressi già nell' *Appendice* (serie II, col. 96) della mia *Biblioteca matematica italiana* l'avviso che gli esemplari della pretesa 2ª edizione non siano che copie della 1ª, alle quali venne sostituito il frontispizio con la data posteriore e la dedicatoria. (P. Riccardi.)

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

42. Plusieurs auteurs ont proposé, pour l'ajustement d'une série de valeurs observées, la formule

$$u'_x = \frac{17}{35}u_x + \frac{12}{35}(u_{x+1} + u_{x-1}) - \frac{3}{35}(u_{x+2} + u_{x-2})$$
$$= u_x - \frac{3}{35}\Delta^4 u_{x-2},$$

où u_{x-2}, u_{x-1}, u_x, u_{x+1}, u_{x+2}, sont cinq termes successifs de la série, et u'_x est la valeur ajustée de u_x. On demande une notice historique, aussi complète que possible, sur cette formule. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 7. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 7. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

1. Allgemeines.

Als ich in den Jahren 1844—1847 die Materialien für den Artikel »Jüdische Literatur» in der *Realencyclopädie* von ERSCH und GRUBER sammelte, fand ich für Mathematische Wissenschaften (§ 20 u. 30) keinerlei Hilfsmittel von einigem Belang. Nur Einzelnes konnte ich in der englischen Übersetzung (*Jewish Literature,* London 1857; der ungenannte Übersetzer ist WILLIAM SPOTTISWOODE) aus bodleianischen Büchern und Manuscripten berichtigen oder hinzufügen. Seit jener Zeit sind wenige hiehergehörende Abhandlungen und Notizen erschienen; im Ganzen fehlt es noch an einer Monographie eines Fachmannes für das bedeutende Material. Allerdings müsste der Bearbeiter einer solchen auseinanderliegende Kenntnisse und Mittel vereinigen. Die betreffende Literatur umfasst Schriften in orientalischen und occidentalischen Sprachen, liegt meistens in Handschriften, grossenteils in Übersetzungen, die eventuell mit Rücksicht auf ihre Originale zu prüfen und zu beurteilen sind. Welche Aussicht auf Veröffentlichung und Verbreitung ermutigt zu einer solchen anstrengenden, langwierigen Arbeit? Und doch ist sie ein wohlbegründetes Desideratum; das lehren uns die Resultate ausgeführter Untersuchungen, wie zum Beispiel betreffs der Übersetzungen (vergl. Biblioth. Mathem. 1893, S. 51).

»Wenn du die Arbeit nicht ausführen kannst, so ist das kein Grund, dich ihr gänzlich zu entziehen», lehrt der Talmud. So erachte ich es, ohne Fachkenner zu sein, für meine Aufgabe, meine Aufzeichnungen im Laufe eines halben Jahrhunderts in chronologischer Ordnung als Material für fachmännische Bearbeitung niederzulegen. Sie betreffen hauptsächlich die Kenntnis der Bücher und Manuscripte in allen Sprachen, welche von Juden verfasst oder übersetzt sind.

2. Grenzen.

Die Grenze, welche ich der eigentlichen, möglichst genauen und vollständigen Zusammenstellung gesetzt habe, beruht auf einer Eigentümlichkeit der jüdischen Literatur, welche in neuerer Zeit vielfach geschildert worden, auch für den Titel des Buches »*Jewish Literature from the eighth ... century*» maassgebend war, und hier in Kürze erledigt werden muss. Das eigentliche Judentum, im Gegensatze zum alten Hebräertum, gestaltete sich in den Kämpfen während des 2. Tempels, insbesondere in den letzten vergeblichen Auflehnungen gegen die Römerherrschaft unter HADRIAN (130). Von da an sind die Juden eine Nation »in partibus» wie ZUNZ sie sinnig bezeichnet. Der Geist ist nicht bloss *räumlich* anderswo magnetisch angezogen, auch *zeitlich;* Vergangenheit (Bibelstudium) und Zukunft (Eschatologie) verdrängen die Sorgen um die Gegenwart, nach den Worten des Talmuds: »man lässt das Leben der Stunde bei Seite und befasst sich mit dem der Ewigkeit». Unter den Eigentümlichkeiten der Literatur kommt hier nur eine einzige aber hochbedeutende in Betracht. Das Studium des Gesetzes erzeugt eine in Schulen fortgepflanzte Autorität (Tradition, hebr. *Kabbala,* ein Namen, welchen im XIII. Jahrhundert eine dem Judentum fremde Theosophie sich missbräuchlich anmaasste). Die Tradition leitet ihren Ursprung von einem sogenannten *mündlichen* Gesetze (»Lehre Mosis vom Sinai») her; dennoch wurde die Codification dieser Erweiterung des schriftlichen Gesetzes, die sich zuletzt bis zum offnen Widerspruch gegen letzteres erhebt, streng verboten; Mündliches sollte nur mündlich fortgepflanzt werden. Allein das Leben tötet Alles, was Menschen aufbauen, um dem Laufe des Lebens Grenzen zu setzen. Auch die mündliche Lehre wurde codificirt und die Inconsequenz mit der Verdrehung eines Bibelverses (Ps. 119, 16) gerechtfertigt. Das geschah aber erst nach Jahrhunderten, und die eigentliche Schriftstellerei, als selbstbewusste, den Stoff nach freier Wahl und mit Sinn für die Formenschönheit bildende Kunst, wurde

auf lange Zeit verdrängt. Die herrschende Art der Compilationen liess mitunter die Autorität für's Einzelne nicht zum rechten Ausdrucke kommen, so dass man oft nicht weiss, wo die Rede des Einen aufhört, die des Gegners beginne! Dazu noch die weithergeholten Deutungen der alten Documente, die Verbindung zufälliger Nebendinge, an welche sich Abschweifungen knüpfen. Dieses »Ein und All«, dessen Ausläufer man noch in den gelehrten Abhandlungen des jüngst verstorbenen PAULUS (als Jude: SELIG) CASSEL bedauert, erschwert ganz besonders das Studium der *Geschichte* irgend eines Gegenstandes in jener *Collectivliteratur*, welche man *Mischna, Gemara, Talmud, Midrasch,* u. s. w. nennt, teilweise noch in späteren, ohne strenge Zucht der Methode verfassten, hebräischen Schriften. Es hat für den Historiker stets etwas Missliches aus einer Sammlung von Ansichten und zufälligen Äusserungen, die Jahrhunderte aus einander liegen und oft ganz gelegentlich vorkommen, eine Entwicklung zu construiren, die so leicht dem *circulus vitiosus* anheimfällt. Dem Mathematiker vom Fach ist dergleichen naturgemäss zuwider, und der Laie erkennt nlcht die Bedeutung mancher hingeworfenen Bemerkung.

So liegt denn ein weites Terrain vor uns, welches erst, man möchte sagen *geologisch* zu analysiren ist. Es ist allerdings viel bequemer *das* Geschichte, welches *die* Geschichte sondern soll, als ein Ganzes anzusehen; man spricht von *Talmud* oder den *Rabbinen,* die zu Hunderten existirten, und fertigt damit die verschiedenartigen Erscheinungen beinahe eines Jahrtausends oder noch mehr ab. — Dieses Gebiet wird hier nur als *Einleitung* behandelt, die Zeit von 1801—40 nur als *Anhang,* weil mir die Literatur nicht genug bekannt ist. — Ehe wir die Literatur verzeichnen, ist noch eine innere Seite des ganzen Thema's zu beleuchten.

3. Motive.

Wenn man bei den Juden irgend eine geistige Thätigkeit gewahrte, die nicht direct mit der Bibel zusammenhing, oder zusammenzuhängen schien, so glaubte man dieselbe auf die Beschäftigung zurückführen zu müssen, welche ihnen im Mittelalter (allerdings nur in gewissen Gegenden) ganz besonders in späterem Mittelalter, das für die Juden bis in die neueste Zeit hineinreicht, allein gestattet wurde: Handel, Wucher und Heilkunst. Selbst der unbefangene Historiker G. LIBRI (*Histoire des sciences mathématiques* I, 153; cf. II, 265) knüpft die literarische Vermittlung der Juden an ihre Handelsreisen. Der

deutsche Literaturhistoriker GRÄSSE hat sich nicht entblödet, die Mathematik bei den Juden, von der er Nichts gelesen hat und Nichts verstanden hätte, auf Handel und Wucher zurückzuführen. Ein ähnlicher Gedanke schwebte noch WEISSENBORN[1] vor, als er in dem, von GERBERT angeführten »JOSEPHUS *sapiens*» oder »*hispanus*» nach vergeblichem Umhersuchen auf einen jüdischen »Handelsmann» geriet, den er allerdings nicht nachweisen konnte. Es ist aber höchste Zeit, derartigen unklaren Vorstellungen und Hypothesen vom Standpunkte der wirklichen Literatur aus ein Ende zu machen. Es wird sich zeigen, dass die Juden ihre Studien vorzugsweise der *Astronomie* und der engverwandten Astrologie, ferner der Geometrie, Algebra, allerdings auch der Arithmetik, zuwandten. Wann haben Handelsleute und Wucherer irgend einer Nation zu den schwierigsten Problemen der Mathematik sich je verstiegen?! Die wahren Motive sind in den Schriften selbst gegeben, und wenn die besondere Neigung und Befähigung der Juden für Mathematik in ihrer äusseren Geschichte einen Grund oder Antrieb zu suchen hat, so führt uns schon der gänzliche Mangel an Schriften über *Mechanik* auf die rechte Fährte. Menschen, die vom öffentlichen Leben ausgeschlossen sind, teilweise vom socialen (letzteres auch durch gewisse Ceremonialgesetze), wenden sich naturgemäss mehr *abstracten* Gegenständen zu; bis heute beschäftigen sich russische Juden gern mit Erfindung von Rechenmaschinen, und in der brotlosen Kunst des Schachspiels, also der abstracten Combination, zählt noch die neueste Zeit nicht wenige jüdische Matadore.[2]

Dass schliesst aber nicht aus, dass einzelne Disciplinen oder besondere Themen von alter Zeit her durch eigentümliche, religiöse und practische Verhältnisse in einem höheren Grade gefördert worden. So zum Beispiel war für Bibelerklärer ein geometrisches Problem geboten in dem sogenannten »Meer Salomo's» (1 Kön. 7, 26);[3] man erinnert sich dabei an das berühmte griechische Problem der Verdopplung des Altars, angeblich von PLATO gelöst. — Eine bedeutende Anregung zur Beobachtung des Mondlaufes und dann der Himmelsbewegungen überhaupt bot der hebräische *Kalender*, der noch heute jüdische Federn beschäftigt. Der Kern der Frage führte auch zu einer Controverse mit und unter Christen. Das Passah (Osterfest) soll in einem Mondjahre stets am 15. des *Frühlings*monats (Nisan) gefeiert werden, was in einer noch nicht genau ermittelten Zeit zur Annahme des METON'schen Cyclus von 19 Jahren mit 7 Schaltmonaten führte.[4]

Die weitere Entwicklung des Kalenders gehört in eine

spätere Zeit und wird an der betreffenden Stelle zur Sprache kommen; hier galt es nur ihn als Motiv hinzustellen. Die Feststellung und Verkündigung des Neumondes geschah ohne Zweifel sehr lange nach Zeugenaussagen; als aber die Berechnung zu Ansehn gelangte, vindicirte man ihrer Autorität auch ein höheres Alter — dergleichen findet sich überall — man ging so weit, in der »Einsicht in die Zeiten«, welche das 1 Buch Chron. (12, 32) an den Söhnen ISACHAR's rühmt, die Kalender- und Sternenkunde zu sehen.[5] Ein anderes Motiv war die Beobachtung des Sonnenuntergangs für den Anfang von Sabbat und Fasttagen, für Datirung von Ereignissen und Documenten. — Ein anderweitiges Motiv für Geometrie war das, wovon diese Wissenschaft selbst ihren Namen erhielt, das Messen von Erdflächen, Äckern und dergl. Das Verbot der Saatenmengung (Levit. 19, 19; Deuteron. 22, 9) führte schon die Lehrer der Mischna (Tractat Kil'ajim 1, 3) auf geometrische Betrachtungen des »Beetes« (*Aruga*). Es mag hier gelegentlich bemerkt werden, dass die Abhängigkeit der römischen *Agrimensoren* von Ägypten — welche CANTOR in seiner berühmten Monographie aufgestellt hat, — im Midrasch in seiner eigentümlichen Weise ausgedrückt scheint, es habe ESAU (sinnbildlich für Rom) das »Groma« aus Egypten geholt.[6] — Untergeordneter Art sind die beliebten Wort- und Zahlspielereien, welche sich im Hebräischen um so enger verbinden, als die Buchstaben selbst bekanntlich auch *Zahlzeichen* (Ziffern) sind, wie im Griechischen und fast in derselben Reihenfolge. Nur für 100—400 galten ursprünglich die letzten Buchstaben. Ich weiss nicht, zu welcher Zeit die 5 *Endbuchstaben* für 500—900 eingeführt worden, welche allerdings selten angewendet werden (s. oben Anm. 5). Sie sind erwähnt in einer mystischen Auslegung der Buchstaben, welche wahrscheinlich von JEHUDA B. SALOMO aus Toledo (in Toscana 1259) herrührt,[7] auf welchen wir noch zurückkommen. Buchstaben für Zahlzeichen mit *Positionswert* werden wir zuerst bei ABRAHAM IBN ESRA (XII. Jahrh.) finden. Derselbe hat in seinem Buche der Zahl bereits einen hebräischen Namen (*Galgal*, Rad) für *Null* neben ספרא (*Sifra*), welches auch in einem Manuscript des Vereins *Talmud Thora* in Rom vorkommt, wovon später die Rede sein wird; ELIA MISRACHI (Buch der Zahl, fol. 5) erklärt das Wort *Sifra* ausdrücklich für arabisch.[8] ABRAHAM B. CHIJJA (um 1116—1136) kennt nur 9 Zahlzeichen.[9]

Kehren wir nach dieser kurzen Abschweifung zu ihrem Ausgangspunkte zurück. Die Deutung biblischer Wörter durch die Anwendung des *Zahlwertes* der Buchstaben wird vielleicht

schon in der Mischna mit einem Worte bezeichnet, welches man bisher »*Geometria*» las, aber nicht erklären konnte. MICHAEL SACHS sieht in jenem Worte eine Corruption von *γραμματεία*, d. h. Auflösung der Wörter in Buchstaben; dann muss die weitere Verwertung der Buchstaben als Ziffern eine jüngere Verengung des Begriffes sein.[10] Zu dieser Art von Spielerei gehört eine Bemerkung in dem ziemlich jungen Midrasch zu Exodus (Cap. 15, f. 100, col. 2, Ed. 1732) über den Vers in Num. 23, 9, wo das Wort הן (siehe) aus den 2 Buchstaben besteht, welche als Ziffern 5 und 50 bedeuten, isolirte Zahlen, die sich im Decadenssystem nicht paaren, um 10 zu bilden, wie 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6. Hier ist wahrscheinlich eine Spur griechischer Arithmetik.

Es genügt an dieser Stelle auf einige besondere Motive hinzuweisen; andere werden sich gelegentlich aus Inhalt und Behandlung der Schriften selbst ergeben. Im Allgemeinen ist aber auf die *Bedeutung des Forschens und Wissens* hinzuweisen, welche bei den Juden allmälig von dem Studium der Bibel auf das Studium überhaupt überging und ebenfalls in dem engen Spielraum für den Ehrgeiz eine mächtige Stütze erhielt.

Gegenüber den eigentlichen religiösen und geschichtlichen Förderungen der Beschäftigung mit der Mathematik steht die Aufgabe zu erforschen, in wie weit mathematische Begriffe, Lehrsätze und Anschauungen in *das religiöse Denken und Handeln* der Juden eingedrungen sind. Dieses, meines Wissens hier zuerst präcisirte Thema ist natürlich nur wegen seiner Verwandtschaft mit dem unsrigen angedeutet und mit Angabe weniger Beispiele für uns erledigt. Wie es scheint, hat die in Persien herrschende Teilung der Grössen in Sechzigstel (Sexagesimalsystem), bekanntlich in der Zeitteilung noch immer nicht ganz vom Decadenssystem überwunden, sich in die jüdische Gesetzkunde und Legende eingeschlichen.[11] Die Astrologie drang selbst in die Gebete ein.[12]

[1] H. WEISSENBORN, *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern* etc. (Berlin 1892); S. 24 wird mein Einwand auf einen Grund zurückgeführt, der auch für mich nicht entscheidend gewesen wäre. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich neuerdings Nichtorientalisten vor dem Vertrauen zu CASIRI warnen, welchen Herr WEISSENBORN (S. 83) nicht genügend benützt glaubt.

[2] S. mein: *Schach bei den Juden*, in VAN DER LINDE, *Geschichte des Schach* (Berlin 1873; I, 194).

[3] B. ZUCKERMANN, *Das jüdische Maassystem in seinen Beziehungen zum griechischen und römischen* (Breslau 1867), S. 3; *Das Mathematische im Talmud* (1878; s. unten) S. 23; *Hebr. Bibliogr.* XV, 127; vgl. HERZFELD, *Metrolog. Voruntersuch.* II, 8—11.

[4] Die Nachrichten in AL-BIRUNI's (BÉRUNI bei SACHAU) Chronologie sind wegen ihres hohen Alters wichtig, aber noch nicht beachtet. — S. unten § 4, C).

[5] SAADIA GAON (gest. 941) hat jedenfalls aus diesem Vers die Zeitrechnung bewiesen (*Ozar Nechmad,* herausg. v. BLUMENFELD, Wien 1863, IV, 27); eine junge Quelle (ms. Hamburg n. 294 meines Catalogs) findet in dem hebr. Worte *Ittim* die Zahl 1080 (indem das Schlussmem 600 bedeutet; wie alt ist diese Anwendung der Endbuchstaben für 500—900?), also die Zahl der Stundenteile, nach welchen das Sonnenjahr berechnet wird. Dass ISACHAR in einer Himmelfahrt diese Stundenteilung mitgebracht, erzählt schon die Baraita des SAMUEL JARCHINAI (s. unten § 7), wenn man dem Citat eines Anonymus trauen darf, der noch zu ermitteln ist; ZUNZ (*Hebr. Bibliogr.* V, 19; *Gesamm. Schriften* III, 248) citirt ABR. SACUT f. 40 (eigentl. 39), ed. Cracau (s. auch ed. London, S. 46), welcher kurz vorher angegeben, dass seit PTOLEMAEUS 1370 Jahre verflossen sind. SACUT hat das wohl in einem älteren Buch *Ibronot* gelesen; ich finde es vollständig in dem anonymen Kalenderwerk bei MÜNSTERUS, *Calend.* p. 56. — Christliche Quellen über die 1080 Teile hat B. BONCOMPAGNI in seiner Abhandlung über ein altes Rechenbuch sehr fleissig gesammelt (*Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **16**, 1862—1863); vgl. ABRAHAM B. CHIJJA, *ha-Ibbur* (hebr.) S. 37. — Auch ABRAHAM, der Patriarch, soll in Aegypten »in cathedra» Astronomie gelehrt haben (SACUT f. 135^b Crac., 233 Lond.; vgl. B. BEER, *Das Leben Abrahams,* S. 25, 207; cf. PETR. APPIANUS bei D. GANS, Chron. zu 1906). — Christliche Quellen legen dem KAINAN BEN ARPAKHSCHAD astronomische Kenntniss bei (WOLF, *B. H.* I, n. 1885; vgl. *Hebr. Bibliogr.* III, 119, IV, 22).

[6] *Hebr. Bibliogr.* XIX, 76.

[7] *Hebr. Bibliogr.* VI, 52 zu ms. Almanzi 283, wo als Autor: MOSES B. JEHUDA.

[8] Die Ableitung des Namens *Zero* vom arab. *Sir* (*estremità*) (S. CUSA, im *Archivio storico siciliano* I, 19) ist nicht wahrscheinlich.

[9] *Hebr. Bibliogr.* XVII, 88.

[10] J. LEVY, *Neuhebr. Wörterb.* I, 324 giebt keine Begriffsentwickelung.

[11] Im Gesetz im Aufgehen von Unerlaubtem in 60-facher Quantität; s. *Hebr. Bibliogr.* XVII, 92 A. 2.

[12] Zum Beispiel Planetenbeherrschung der Tage im Gebetbuche aus dem XV. Jahrh. (*Catal. Bodl.* p. 357, n. 2384; auch im span. Ritus ed. 1581, f. 81^{b}; vgl. ms. Schönblum 67). Der Zodiak spielt eine Rolle in den Gebeten um Regen und Thau an 2 Festen. In dem Hymnus, anf. *As be-'hot'enu* (Span. Rit. ed. 1581 f. 331) klagen die Sternbilder. Vgl. auch M. SACHS, *Die relig. Poesie d. Juden* etc. S. 229 die Schilderung des Universums, welche auch v. HUMBOLDT im *Kosmos* erwähnt ist.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

12. Kurze Bemerkungen zur Beschreibung eines hebräischen Manuscripts von Herrn P. Riccardi.[1]

Der Copist Mordechai Finzi war ein Mathematiker von Fach, wahrscheinlich auch Übersetzer, wie ich in meinem Werke über die hebräischen Übersetzungen[2] angebe; Näheres verspare ich für den Artikel: »Mathematik bei den Juden» *suo loco.*

I. Der Übersetzer Jakob ben Machir ist nicht in Cordova geboren; übrigens s. *H. Übs.* 506.

II. Die Recension vom J. 1148 ist miserabel gedruckt: Königsberg 1845; es giebt auch eine Nebenrecension; s. mein: *Abraham ibn Esra* in Supplement zur hist.-liter. Abtheilung der Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, S. 125.

Der Verfasser der Schlussbemerkung soll ein Sohn des Übersetzers sein — von welchem Nichts bekannt ist. Offenbar ist hier eine inconsequente Confusion mit dem »ammanuense» Emanuel ben Jakob und eine irrtümliche Conjectur zu berichtigen. Immanuel ben Jakob ist nicht ein Sohn Jakobs ben Machir, sondern ein späterer sehr bekannter Autor (um 1365), auf welchen ich ebenfalls in dem unter der Feder befindlichen Artikel zurückkomme. Er hat gleichfalls eine Schrift über das Astrolab verfasst, wovon mss. in Paris und London; es handelt sich wohl in unserem ms. um Höhe und Entfernung der *Sterne*, und wäre ms. De Rossi 336^{b}, in Parma zu vergleichen.

III. a) ist von dem Araber ibn al-'Saffar; s. *H. Übs.* S. 580 und 581.

b) wird dem Ptolemaeus nicht streng genommen beigelegt, aber von einem »*Buche*» der 7 Klimata als Quelle ist nicht die Rede; ein solches wird auch sonst nicht erwähnt; s. *H. Übs.* S. 537.

IV. Die Scheibe des Zarkali darf nicht »*Zeppichà*» umschrieben werden, sondern lautet *Safi'ha;* die Lateiner schreiben »*Safeha, Saphea*» und dergl.; daher emendire ich (*H. Übs.* S. XXX zu S. 628) den Titel: »conclusiones *sophiae*» von Guilelmus Badecomius *Anglus* (um 1420) bei allen Bibliographen[3] in »*sapheae*». Über Zarkali s. meine *Études* (Rome 1884) und *H. Übs.* S. 592; Bartolòmeo degli Orologi(?) ist identisch mit »dei Manfredi»; s. *H. Übs.* S. 626.

V. Muss heissen: »Trattato del globo» und in letzt. Zeile »Hasmon» lies »ABU'L HASSAN»; s. *H. Übs.* S. 552.

VI. »Modo . . . *Mappamondo*» scheint nicht richtig; es scheint vielmehr identisch mit dem, anderswo auf COSTA folgenden Stücke über Anfertigung des *Globus* (*H. Übs.* S. 553).

Sollte Jemand Etwas aus dem wertvollen ms. bearbeiten wollen, so wird er die, in meinem Werke angegebenen mss. möglichst benützen müssen.

[1] P. RICCARDI, *Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.* Biblioth. Mathem. 1893, 54—56.

[2] Ich verweise, der Kürze halber, darauf mit der Abbreviatur »*H. Übs.*».

[3] LELAND, *De scriptoribus Britannicis* (Oxoniae 1709) Cap. 309, p. 428, eben so wie Io. BALEUS, *Scriptores Britannici* (Basil. 1559), VII, 67, p. 559, und Io. PITS, *Relationes de rebus Anglicis* (Parisiis 1619) p. 608; letztere beiden citirt FABRICIUS, *Bibliotheca latina medii aevi* sub voce *Guilelmus.*

Nota storica sulla variazione delle latitudini.

Di OTTAVIO ZANOTTI BIANCO a Torino.

EULERO fu il primo a dimostrare che le latitudine dei luoghi terrestri potevano essere variabili, in causa di uno spostamento del polo alla superficie terrestre. Dopo di lui LEGENDRE giunse a risultati analoghi. Ma di LEGENDRE, i molti astronomi che si sono in questi ultimi tempi occupati della variabilità e variazione delle latitudini, o ignorarono o tacquero. Due soli, per quanto io so, e questi sono Italiani, ne fanno menzione; essi sono i signori NOBILE[1] ed ANGELITTI,[2] astronomi all' Osservatorio di Capodimonte in Napoli. I due astronomi napoletani attinsero le loro informazioni, studiando i lavori dell' astronomo C. BRIOSCHI, primo direttore dell' osservatorio di Napoli. Il BRIOSCHI misurò la latitudine di Capodimonte e pubblicò i suoi lavori in un' opera intitolata: Commentarij astronomici della Specola Reale di Napoli.

Nel volume primo, parte seconda, pag. 165 si trova quanto riguarda la variabilità della latitudine. Ecco il passo.

Invariabilità della latitudine.

L'insigne geometra LEGENDRE nei suoi *Exercices de calcul intégral* ec. ec. (Tom. II, p. 363) applicando alla Terra le teorie generali del moto di rotazione, propende a credere che l'asse di rotazione della medesima sia soggetto ad una specie di nutazione, o piuttosto variazione intrinseca, dipendente dalle circostanze primitive del moto medesimo, le quali è ben poco probabile che siano state tali da far coincidere quell' asse con uno degli assi principali, o vero da qualche grande catastrofe avvenuta nel decorso de' secoli, che possa averne alterata la coincidenza perfetta, se mai prima esisteva, ed assegna anche presso a poco il periodo di tale nutazione di giorni 300 o 320. In conseguenza di queste congetture la latitudine sarebbe variabile (ciò che da qualcheduno anche in altri tempi fu opinato, senza però assegnarne positivamente alcuna causa), e quella da noi poco fa trovata non dovrebbe considerarsi che come un medio corrispondente alla totalità delle osservazioni impiegate, siccome si è praticato finora. Prima adunque di progredire ad altro argomento, sarà utile di esaminare siffatto punto, e vedere se le nostre osservazioni indichino la

necessità di tener conto della congetturata variabilità della latitudine, o pure se si può continuare a considerarla come costante.

A tale oggetto paragoneremo fra loro le latitudini date dalle distanze dal zenit della Polare e della Spica etc. etc. (Vedasi il riassunto di questi confronti che dà il Dr. ANGELITTI a pag. 108 della sua memoria citata alla nota [1]).

Le seguenti parole chiudono il paragrafo.

»La latitudine potrebbe anche essere variabile indipendentemente dalle circostanze primitive del moto di rotazione della Terra, se la direzione della gravità fosse soggetta a mutazioni, in conseguenza del traslocamento di grandi masse nell' interno od alla superficie della medesima, ma secondo le osservazioni più esatte, pare che tale variazione, se mai esiste, non sia sensibile nel giro di qualche anno, e forse nemmeno di qualche secolo».

È curioso l'avvertire come BRIOSCHI non nomini EULERO; giova però notare che neppure LEGENDRE lo nomina, nel capitolo ove tratta dell' argomento; solo nella prefazione al tomo secondo dei suoi *Exercices de calcul intégral* (edizione del 1817) lo cita genericamente.

Non sappiamo poi a chi alluda BRIOSCHI quando scrive a proposito della variabilità delle latitudini: »ciò *che da qualcuno anche in altri tempi fu opinato, senza però assegnarne positivamente una causa*». Non si allude certo ad EULERO, perchè egli non solo assegnò la causa ma ne diede la teoria.

Il tomo VII del Bulletin astronomique (1890) nelle pagine 449—452 contiene una bibliografia che porta questo titolo: *Rotation d'un corps de forme variable. — Variation de la latitude ou de la verticale. — Influence des phenomènes géologiques, des marées, etc.* In questa bibliografia mancano per tacere di molti altri i nomi di EULERO, LEGENDRE, BRIOSCHI, ANGELITTI.

Assai probabilmente la frase di BRIOSCHI si riferisce a quei matematici, WITZEL, REISEL, FABER, CASSINI (GIAN DOMENICO), BODE, ZACH ed altri, che prima di lui ebbero a considerare la variabilità delle latitudini. Anche questi nomi mancano nella citata bibliografia del Bulletin astronomique.

Ecco ora i brani principali che si trovano in LEGENDRE concernente la variabilità della latitudine (*Exercices de calcul intégral*, tomo II, 1817, p. 363).

»Remarque sur le mouvement de l'axe de la Terre».

67. Comme il est infiniment probable que l'axe de rotation

primitif de la Terre n'a pas coïncidé exactement avec un axe principal, ou du moins que ces deux axes se sont séparés par quelque variation arrivée à la surface ou à l'intérieur du globe, il est à présumer que les inégalités qu'on vient de calculer ont lieu effectivement dans le mouvement de rotation de la Terre. Mais comme elles sont extrémement peu sensibles et que la quantité ε beaucoup plus grande que a' ne peut monter tout au plus qu'à quelques secondes, ce n'est que par une longue suite d'observations très délicates qu'on pourra s'assurer de leur existence.»

Segue un breve calcolo, dopo il quale si legge quanto segue.

»D'où il suit que la distance du zenith au pole variera pour un lieu quelconque depuis[3] $p-\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$, jusqu'à $p+\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$. Donc si par des observations exactes de la hauteur du pole dégagées de la réfraction, de l'aberration et des nutations dues aux causes externes, on trouve que cette hauteur n'est pas constante, ce sera une preuve qu'il y a un mouvement naturel dans l'axe terrestre, mouvement dont la cause est dans la Terre même et qui doit être distinguée de la nutation causée par l'attraction de la lune et des planètes. C'est peut-être par ce mouvement qu'on pourrait expliquer la petite différence que des observateurs exacts ont trouvée dans l'obliquité de l'ecliptique déduite des solstices d'hiver et l'obliquité déduite des solstices d'été».

»On peut remarquer que depuis la plus grande jusqu'à la plus petite hauteur du pole, pour un lieu quelconque, la Terre fait une demi-revolution autour de son axe principal. Le nombre des jours écoulés dans cet intervalle est donc d'après nos formules $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{B+A}{B-A}\cdot\frac{C+A}{C-A}}$ ou $\frac{1}{2}\frac{C+A}{C-A}$, si l'on admet, ce qui est fort vraisemblable, que C diffère beaucoup moins de B que de A. D'un autre côté il paraît, par le phénomène de la précession des équinoxes, que la valeur de $\frac{C}{A}$ est comprise entre $\frac{302}{300}$ et $\frac{322}{320}$; donc le temps dont il s'agit est d'environ 150 ou 160 jours. Ces résultats auraient encore lieu, quand même on aurait exactement $B=C$, ce qui est le cas de l'art. 13.»

[1] NOBILE, *Terza determinazione della latitudine geografica del R. Osservatorio di Capodimonte* (Napoli 1883) pag. 5. Questo

valente astronomo italiano ha con una serie di profonde memorie e discussioni di sue osservazioni, contribuito largamente e potentemente allo studio delle variazioni delle latitudini, a cui con lavori di grandissima importanza attesero, pure in Italia, gli astronomi SCHIAPARELLI, FERGOLA, ANGELITTI, PORRO.

[2] ANGELITTI, *Distanze zenitali circummeridiane di alcune stelle principali osservate nell' anno 1821 dal astronomo Carlo Brioschi* (Napoli 1889) p. 108.

[3] A, B, C sono tre integrali (p. 317 del volume citato nel testo) a mezzo dei quali i momenti d'inerzia del corpo rispetto ai suoi tre assi principali sono dati rispettivamente da $B + C$, $A + C$, $A + B$. ε è l'angolo fatto dall' asse di massimo momento (di stabile rotazione) coll' asse di rotazione iniziale (d'istantanea rotazione).

Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana.

Di Gino Loria a Genova.

Erodoto e Platone[1] assicurano che nell' antico Egitto il calcolo numerico era cosa generalmente conosciuta e l'aritmetica pratica uno dei temi svolti nel più elementare insegnamento. Ma l'aritmetica che aveva corso sulle rive del Nilo aveva una fisonomia spiccatamente caratteristica specialmente per l'uso (che, da un certo punto di vista, potrebbe riattaccarsi alla rappresentazione dei numeri reali in frazioni continue ordinarie) di frazioni (»fondamentali» cioè) aventi per numeratori l'unità;[2] nè essa perdette i propri lineamenti quando, subendo l'influenza degli abitatori dell' Ellade, divenne quella che noi chiamiamo *logistica greco-egiziana,*[3] e nella quale si incontrano ed hanno capitale importanza dei problemi che la nostra aritmetica ignora o di cui sdegna di occuparsi, problemi che sono per la maggior parte difficili e suscettibili di infinite soluzioni.

I documenti sui quali si fonda la nostra conoscenza dell'aritmetica pratica che i Greci ereditarono dagli Egiziani sono: il Papiro Rhind (scritto circa 1700 anni a. C.), le *Opere* superstiti di Erone d'Alessandria (I Sec. a C.)[4] è le Lettere scritte nel 1341 dallo Smirnese Nicola Artasvade detto il Rhabdas.[5] Queste ultime, a differenza delle altre citate scritture, somministrano ampi schiarimenti non soltanto intorno ai metodi, adoperati dai Greci per risolvere i problemi di algebra elementare, ma eziandio sui modi in cui si eseguivano le operazioni aritmetiche (sino all' estrazione della radice quadrata inclusivamente) sui numeri interi e frazionarii. Sfortunatamente però queste lettere, malgrado preziose doti di cui riboccano, porgono ben poco ajuto a chi voglia ricostruire la tecnica aritmetica greco-egiziana; gli è che desse furono scritte in un momento in cui, non incontrandosi più alcun ostacolo al concepire e trattare le frazioni più generali, non era più esclusivo l'uso delle frazioni fondamentali; anzi, quando si vede il Rhabdas restringersi ad usare le anzidette frazioni nell' enunciare le questioni e formularne le risposte, si sarebbe tentati di credere che egli di malavoglia si addattasse alle consuetudini avite.

In tale stato di cose è pertanto di inestimabile valore l'acquisto del nuovo documento il cui esame è lo scopo precipuo del presente scritto. È il *Papiro matematico d'Akhmîm*[6] le cui interpretazione e pubblicazione sono dovute ad uno dei membri della missione archeologica francese al Cairo.[7]

Il nuovo papiro per la forma in cui è redatto si avvicina tanto a quello di cui l'EISENLOHR rivelò il contenuto, quanto a quello (scritto in Egitto fra il 193 ed il 165 a. C.) che LETRONNE decifrò e chiamò *Didascalie céleste de Leptine* e che BRUNET DE PRESLE pubblicò intitolandolo *Art d'Eudoxe:*[8] giacchè se questo venne con ragione assomigliato ad un quaderno scolastico, il nuovo papiro apparve al suo editore come »le cahier net et soigné d'un élève moyen». Esso venne scritto (in greco) fra il VII e l'VIII secolo dell'èra nostra da un cristiano, ma è probabilmente la copia di altro più antico che, per l'epoca a cui appartiene, s'interporrebbe certamente fra il papiro Rhind e le lettere del RHABDAS (forse anzi fra quello e le opere di ERONE). Non rappresenta probabilmente lo stato di perfezione massima a cui giunsero i metodi egiziani, è tuttavia sintomo di una scienza più progredita di quella che viene attestata dal papiro Rhind, non foss' altro sembra che quando venne compilato si fosse più prossimi ad emanciparsi dall' impiego costante di frazioni fondamentali[9] e per fermo si era così progrediti nella teoria della divisibilità da essere in grado (non solo di distinguere, come AHMES, i numeri pari dai dispari, ma anche) di assegnare i vari modi di decomporre un intero in due fattori.

Il papiro di cui il sig. BAILLET arrichì la letteratura storica è oggi il più antico documento sull' insegnamento dell' aritmetica pratica presso i Greci; tuttavia non è ancora sufficiente a colmare le lacune che presenta la collezione delle nostre cognizioni su questo argomento, perchè (a somiglianza del Papiro Rhind) contiene delle tabelle numeriche di cui ignoriamo il metodo di costruzione e dei problemi aritmetici di cui viene dogmaticamente esposta la soluzione.[10] Rimandando alla pubblicazione originale chi desiderasse leggere una particolareggiata descrizione del nuovo papiro, vederne anche la riproduzione fotolitografica, conoscere il modo con cui venne scoperto e venire istruito intorno alle questioni paleografiche e filologiche[11] a cui esso dà luogo, noi, colla scorta dell' eccellente commento fatto del prelodato editore, tenteremo di determinare il valore del nuovo documento confrontandolo con i congeneri.[12]

Le tavole numeriche che dicemmo esistere nel papiro

d'Akhmîm hanno uno scopo identico a quello della tabella con cui comincia il papiro Rhind e di cui recentemente ci occupammo;[13] esse possono anzi qualificarsi siccome un ulteriore svolgimento di questa.[14] Esse infatti porgono da principio la decomposizione in frazioni fondamentali dei numeri della forma $\frac{2}{3} \cdot 10^k \cdot l$ e $\frac{1}{m} \cdot 10^k \cdot l$ ove k prende successivamente i valori $0, 1, 2, 3$, l i valori $1, 2, \ldots, 9$ e m i valori $3, 4, \ldots, 10$. Sembra che il calcolatore, arrivato a questo punto, siasi finalmente accorto di sobbarcarsi ad un lavoro assai più esteso di quanto fosse strettamente necessario, dal momento che dalla decomposizione in frazioni fondamentali di un numero si deducono subito le decomposizioni dei numeri frazionari i cui numeratori sono congrui al numeratore di quello rispetto al comune denominatore; perciò nella parte rimanente delle tabelle egli si limita a registrare le decomposizioni delle frazioni $\frac{1}{m} n$, ove m prende successivamente i valori $11, 12, \ldots, 20$ ed in corrispondenza n successivamente i valori $1, 2, \ldots, m$.

Nei casi in cui il numero delle parti in cui deve scomporsi il numero considerato sia non grande od eguale col prodotto di pochi numeri piccoli, la scomposizione riesce agevole per chiunque, senza possedere estese cognizioni aritmetiche, abbia una certa famigliarità con i numeri, onde non è difficile immaginare in qual modo l'abbia eseguita l'autore (o gli autori?) del papiro d'Akhmîm. In molti altri casi meno semplici essa viene operata in modo tale da porgere delle novelle conferme alle nostre congetture sul concetto che servì di guida nella costruzione delle tabelle consegnate nel papiro Rhind.[15] In altri casi si esegue spezzando il numero frazionario proposto in parti facilmente decomponibili in fondamentali applicando il precitato concetto. L'esame di altre decomposizioni induce finalmente ad ammettere che tale concetto sia stato svolto ed ampliato in due differenti direzioni: seguendo l'una o l'altra si giunge ad un procedimento di calcolo nel quale si tenta di sottrarre dalla frazione data $\frac{n}{m}$ tante frazioni della forma $\frac{1}{km}$ finchè si arrivi a $\frac{2}{3}$ o ad una frazione di cui lo spezzamento sia già noto oppure immediatamente assegnabile. Il lettore propenso a giudicare verosimili le nostre supposizioni precedenti, non farà certo il viso dell' arme a queste aggiunte, la prima delle quali anzi non presenta nulla di essen-

zialmente nuovo vista la posizione eccezionale della frazione $\frac{2}{3}$ nel sistema egiziano e la seconda si offre spontanea a chi avverta le relazioni che intercedono fra certe decomposizioni;[4] tanto più che delle traccie di queste generalizzazioni esistono nello stesso *Manuale del calcolatore egiziano* e nelle *Collezioni eroniane;* cfr più avanti, come emerge dalla seguente tabella in cui sono riunite alcune relazioni rilevate da AHMES nel risolvere i problemi da lui trattati:[17]

$\frac{2}{[illegible]}=\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{14}$	$\frac{5}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}$	$\frac{[illegible]}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{[illegible]}$
$\frac{[illegible]}{[illegible]}=\frac{1}{3}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{21}$	$\frac{[illegible]}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$	$\frac{[illegible]}{33}=\frac{1}{4}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}$
$\frac{[illegible]}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{[illegible]}$	$\frac{[illegible]}{33}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{[illegible]}{[illegible]}=\frac{1}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{[illegible]}$
$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{[illegible]}$	$\frac{13}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$	$\frac{56}{[illegible]}=\frac{1}{3}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}$
$\frac{[illegible]}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{5}{[illegible]}=\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}$	

Le tavole con cui comincia il papiro d'Akhmîm non si possono in alcun modo designare come rappresentanti la totalità delle decomposizioni note a chi le ha redatte: a dimostrarlo basti dire che durante un calcolo viene usata la decomposizione $\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$ a preferenza della $\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$ in esse tavole contenuta e che vengono citate come note le relazioni

$$\frac{11}{120}=\frac{1}{15}+\frac{1}{40}, \qquad \frac{155}{3080}=\frac{1}{55}+\frac{1}{56}+\frac{1}{70}$$

e la seguente complicatissima

$$[illegible] = \frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}+\frac{1}{40}+\frac{1}{44}+\frac{1}{50}+\frac{1}{[illegible]}$$
$$+\frac{1}{80}+\frac{1}{88}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{55}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{99}+\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}$$

L'accordo fra i due papiri è frequente ma non senza eccezioni: esso ha luogo nelle decomposizioni di $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, [illegible], ed è percepibile in quelle (che il nuovo papiro insegna) di $\frac{[illegible]}{11}$ e $\frac{13}{15}$: ma esso non si riscontra nelle decomposizioni di [illegible], $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{19}$.

E siccome per formarsi un concetto almeno approssimato delle successive fasi di sviluppo della logistica greco-egiziana ci sembra di capitale importanza il seguire l'evoluzione successiva che subì la collezione degli spezzamenti in fondamentali delle frazioni che fondamentali non sono, così crediamo prezzo dell'opera l'istituire un confronto anche fra quanto è racchiuso nel papiro di Akhmîm e i risultati aritmetici sparsi nelle opere che

vanno sotto il nome di ERONE. Questi risultati si possono riassumere nel quadro seguente.

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$

$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$

$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{2}{3} + \frac{1}{21}$

$\frac{6}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$

$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$

$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

$\frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22}$

$\frac{9}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{44}$

$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$

$\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$

$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$

$\frac{8}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{26}$

$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}$

$\frac{10}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{39}$

$\frac{12}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$

$\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$

$\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$

$\frac{11}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}$

$\frac{3}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{40}$

$\frac{5}{21} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

$\frac{11}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$

$\frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$

$\frac{16}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$

$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$

$\frac{6}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$

$\frac{8}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50}$

$\frac{12}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}$

$\frac{16}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25}$

$\frac{21}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$.

$\frac{4}{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

$\frac{25}{28} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28}$

$\frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$

$\frac{13}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$

$\frac{17}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$

$\frac{20}{33} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$

$\frac{23}{33} = \frac{2}{3} + \frac{1}{33}$

$\frac{19}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}$

$\frac{31}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

$\frac{19}{50} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{200}$

$\frac{31}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50}$

$\frac{39}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{200}$

$\frac{19}{51} = \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$

$\frac{31}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51}$

$\frac{35}{51} = \frac{2}{3} + \frac{1}{51}$

$\frac{39}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}$

$\frac{41}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{61} + \frac{1}{68}$

$\frac{35}{66} = \frac{1}{2} + \frac{1}{33}$

$\frac{37}{84} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}$

$\frac{71}{84} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{84}$

$\frac{61}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{90}$

$\frac{17}{112} = \frac{1}{7} + \frac{1}{112}$

$\frac{73}{112} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{112}$

$\frac{104}{125} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{125} + \frac{1}{250}$

$\frac{101}{132} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{66}$

$\frac{57}{175} = \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{28}$

$\frac{116}{175} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{50}$

$\frac{163}{224} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{112}$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}$.[18]

Orbene il confronto fra questo quadro ed il papiro pubblicato dal Sig. BAILLET dimostra che i due scritti si trovano d'accordo negli spezzamenti delle frazioni

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{7}{10},\ \frac{6}{11},\ \frac{9}{11},\ \frac{7}{12},\ \frac{11}{12},\ \frac{4}{13},\ [illegible],\ [illegible]$$
$$\frac{9}{13},\ \frac{12}{13},\ \frac{11}{14}\ \text{e}\ \frac{39}{51}=\frac{13}{17};$$

mentre l'accordo non si verifica nei sei casi seguenti che segnaliamo al lettore come prove della superiorità dei risultati eroniani in semplicità ed eleganza:

$$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18} \qquad \frac{3}{14}=\frac{1}{5}+\frac{1}{70} \qquad \frac{11}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$$
$$\frac{10}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{52} \qquad \frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56} \qquad \frac{3}{20}=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}.$$ [19]

Sebbene, come già avertimmo, sia dogmatica la forma prescelta da chi scrisse il nuovo come l'antico papiro, pure un accurato esame dei calcoli eseguiti nel corso dei problemi di cui consta il papiro d'Akhmîm permise al Sig. BAILLET di projettare qualche raggio di luce sull' antica tecnica aritmetica. Così egli ha avvertito che, per risolvere la questione di dividere un numero per un altro maggiore, viene spesso applicato un procedimento uniforme del quale il lettore potrà formarsi un' immagine sufficientemente chiara notando attentamente i vari momenti del seguente calcolo:

$$\frac{239}{6460}=\frac{239}{76\times 85}=\frac{1}{85}+\frac{239-76}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{163}{98\times 95}=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{163-68}{68\times 95}$$
$$=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{1}{68}.$$

E quando si tratta di decomporre in due fondamentali una frazione del tipo $\frac{a}{bc}$ ove $b+c$ sia un multiplo di a serve la formola

$$\frac{a}{bc}=\frac{1}{b\frac{b+c}{a}}+\frac{1}{c\frac{b+c}{a}};$$ [20]

che se l'anzidetta condizione non è soddisfatta si tenta di sottrarre dalla frazione $\frac{a}{bc}$ tante frazioni fondamentali finchè

nella frazione residua $\frac{a'}{b'+c'}$ sia $b'+c'$ multiplo di a'; oppure si osserva essere

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b\frac{b+mc}{ma}} + \frac{1}{c\frac{b+mc}{a}}$$

e si sceglie m per modo che sia $b+mc$ multiplo di ma: se ad es. è $b = b_1 b_2$ e si prende $m = b_2$, risulterà la formula

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b_1 b_2 \frac{b_1+c}{a}} + \frac{1}{cb_2 \frac{b_1+c}{a}}$$

che condurrà alla decomposizione voluta ogni qualvolta $b_2(b_1+c)$ sarà un multiplo di a. Il costruttore (od i costruttori?) delle tavole del papiro d'Akhmîm sembra usufruire promiscuamente di questi artifici (non omettendo di ridurre ai loro minimi termini le frazioni succettibili di tale riduzione) nell' intento di giungere per la via più breve e meno disagiosa al risultato più elegante o conveniente. E si avverta che tali artifici o analoghi espedienti entrano in gioco, non soltanto per surrogare una frazione con la somma di più altre, ma anche quando si tratti di combinare mediante una delle prime quattro operazioni aritmetiche due o più frazioni o numeri frazionari.

Le operazioni aritmetiche di cui sopra, o sono lo scopo dei problemi contenuti nel papiro Akhmîm oppure fungono da ausiliari nelle soluzioni di quelli fra essi (analoghi ai problemi del Papiro Rhind) ove fa mestieri dividere un dato numero in parti proporzionali a numeri dati[21] o determinare una incognita x in base a condizioni che si traducono in un' equazione della forma

$$x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{c}\left[x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right)\right] - \ldots = k,$$

o si riferiscono ad calcolo d'interessi, alla regola del tre o alla determinazione di volume.[22] Sfortuna volle che di questi ultimi, uno soltanto (e precisamente il primo della collezione) ci pervenisse con un enunciato completo sulla cui interpretazione non può cadere dubbio di sorta. Esso non somiglia ad alcuna delle questioni risolte da AHMES, avendo per iscopo la ricerca della capacità V di una cisterna tronco-conica di cui si conoscono le

periferie p_s e p_i delle basi (superiore ed inferiore) e l'altezza. E chiaro che l'espressione esatta di V è

$$V = \frac{h}{12\pi}(p_s^2 + p_s p_i + p_i^2);$$

invece il calcolatore egiziano applica una regola equivalente alla formola

$$V = \frac{h}{36}\left(\frac{p_s + p_i}{2}\right)^2,$$

la quale non si può giustificare neppure considerandola come approssimativa e prendendo in conseguenza l'antico valore $\pi = 3$, a meno che non si ammetta col sig. BAILLET[23] si sia usata una espressione approssimativa di V di cui gli scritti eroniani offrono delle applicazioni[24] e poi ad un certo punto del calcolo sia stato fatto tacitamente un cambiamento di unità di misura.

L'angustia dello spazio non ci consente di aggiungere altro intorno al nuovo documento che viene ad arrichire in modo così notevole le notizie sicure intorno all' antica logistica greco-egiziana; ma il fin quì detto è a parer nostro sufficiente a dimostrare come non fossero infondate le speranze che i cultori delle matematiche riponevano nello studio degli antichi papiri: una nuova volta è dimostrato che ogniqualvolta uno di questi monumenti scritti è decifrato e spiegato, viene sollevato un lembo di quel fitto velo che tuttora avvolge la misteriosa terra de' Faraoni.

[1] In due passi ricordati da M. CANTOR a p. 20 dei *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle 1863).

[2] È fatta un eccezione a favore della frazione $\frac{2}{3}$, della quale però non era ignota la decomponibilità in $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

[3] In un importante passo di PLATONE (sul quale P. TANNERY rivolse l'attenzione degli storici nell' Introduzione al lavoro citato nella nota seguente) si scorge la schietta distinzione che si faceva ai suoi tempi fra i metodi di calcolo greci e gli egiziani.

[4] Cfr. P. TANNERY, *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de la société des sciences de Bordeaux **4**$_2$, 1882, p. 161—194) e *Questions héroniennes* (Bulletin des sciences mathém. **8**$_2$, 1884).

[5] P. TANNERY, *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas* (Notices et extraits de la Bibliothèque nationale, **32**: 1, Paris 1886, p. 121—252).

[6] Così denominato perchè venne scoperto nell' alto Egitto, entro la necropoli di Akhmîm (l'antica Panopoli). Ora è conservato nel Museo di Gizeh.

[7] Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire sous la direction de M. U. BURIANT. T. IX. I Fascicule, Paris 1892. J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmîm,* p. 1—89 con 8 tavole in fototipia.

[8] Notices et extraits des manuscrits etc. T. **18**, II Partie, p. 25 e seg.

[9] Cfr. BAILLET, l. c., p. 37.

[10] Si potrebbe dubitare di quest' analogia di forma fra i due documenti percorrendo la traduzione del Papiro Rhind fatta dall' EISENLOHR ove la parola »Vorschrift« s'incontra ad ogni piè sospinto. Ma »Vorschrift« è per l'EISENLOHR equivalente ad una parola che L. RODET (Journal asiatique **18**$_7$, 1881, p. 191), E. & V. REVILLOUT (v. la Nota *Sur l'équerre égyptienne et son emploi dans le papyrus mathématique* inserita a pag. 304—314 del T. II, 1882, della Revue égyptologique) tradussero per »articolo«; d'altronde che la parola »Vorschrift« porgesse un' idea del contenuto del Papiro anzidetto difforme dal vero era già stato avvertito da M. CANTOR (*Vorlesungen,* T. I, p. 20).

[11] Perciò passeremo sotto silenzio un' espressione singolare (v. BAILLET, l. c., p. 17—20) la cui interpretazione non influisce in alcun modo sul significato matematico del Papiro.

[12] Nella trascrizione delle tavole in cifre arabiche incorsero alcune sviste che non è inutile segnalare:

p. 23:	$\frac{1}{3}\,400 = 133\frac{2}{3}$	invece	di	$133\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}\,500 = 166\frac{1}{3}$	»	»	$166\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{7}\,80 = 11\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{42}$	»	»	$11\frac{1}{3}\frac{1}{14}\frac{1}{42}$
p. 27:	$\frac{1}{7}\,100 = 14\frac{1}{4}\frac{1}{18}$	»	»	$14\frac{1}{4}\frac{1}{28}$
	$\frac{1}{7}\,4000 = 571\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{42}$	»	»	$571\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{42}$
	$\frac{1}{8}\,700 = 86\frac{1}{2}$	»	»	$87\frac{1}{2}$.

[13] *Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.* Biblioth. mathem. **6**$_2$, 1892, 97—109. — Colgo con piacere quest' occasione per rilevare che non esiste fra il Prof. FAVARO e me quella divergenza di opinioni che egli credette additare in una sua recente pubblicazione (Atti del R. Istituto Veneto **4**$_7$, 1893, p. 407—408).

[14] Nella nota intitolata *Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache* (Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. p. 81—87) M. CANTOR segnalò delle analogie fra esse ed il *Calcolo di Vittorio.*

[15] E qui, a complemento delle nostre anteriori ricerche e congetture, osserveremo come il primo germe del concetto da noi ritenuto per fondamento delle decomposizioni riportate da AHMES esista forse nel loro sistema di misure di capacità. Essi infatti avevano per misura fondamentale la *bescha* di cui consideravano i multipli secondo 10 e 100 e le frazioni di denominatori 2, 4, ..., 64; la 320 parte della *bescha* era una nuova unità, il *ro*, di cui venivano considerati tutti i summultipli. Perciò gli Egiziani, quando avevano una frazione di *bescha*, cercavano quali e quante delle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$ fossero in essa contenute, cioè *sottraevano da quella frazione di bescha tanti termini della serie* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$ *finchè ottenessero un resto minore di* $\frac{1}{64}$; *questo multiplicavano per 320 e riducevano il risultato in interi e frazioni di ro* (cfr. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, 2e Aufl. [1891], p. 96—98, 191—192 e problemi 82—85). Orbene, la sottrazione indicata nelle precedenti parole sottosegnate non è forse analoga a quella di $\frac{n}{m}$ di tante frazioni del tipo $\frac{1}{mx}$ che noi supporremmo ajutare nella decomposizione delle frazioni qualunque in fondamentali?

[16] Queste relazioni si rilevano con una semplice ispezione del papiro Akhmîm.

[17] Val la pena di notare che nel papiro Rhind s'incontrano anche le seguenti espressioni di frazioni fondamentali come somme di altre:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{192} \qquad \frac{1}{9}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42} \qquad \frac{1}{81}=\frac{1}{108}+\frac{1}{324}.$$

[18] Inoltre in ERONE si trova la formola seguente

$$\frac{327}{512}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{73};$$

essa è evidentemente approssimata; la formola esatta sarebbe

$$\frac{327}{512}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{73+\frac{1}{7}}.$$

[19] Del resto la superiorità del formulario eroniano su quello racchiuso nel papiro di cui ci stiamo occupando è confermata dall' osservazione che delle frazioni $\frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}$,

$\frac{5}{21}$ e $\frac{11}{21}$ vengono indicate due differenti decomposizioni in fondamentali e tre ne vengono suggerite per la frazione $\frac{163}{224}$.

20 Supposto $a=2$ e $b=5$, $c=7$, oppure $b=13$, $c=7$ si ottengono da questa le due formole

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \qquad \frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$$

che, come si sa, nel papiro Rhind formano un gruppo isolato.

21 Ossia risolvere dei sistemi del tipo seguente

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots, \qquad x+y+z+\ldots=s.$$

22 È noto che questa classe di problemi diede origine ad una discussione fra L. Rodet da un lato (Journal asiatique **18**$_7$, 1881, p. 184—232, 390—459), M. Cantor, A. Eisenlohr, Eugenio e Vittorio Revillout (Revue égyptologique, T. II, 1881, p. 287—303) dell' altro. Non è questo il momento di entrare in merito della questione; osservo soltanto che le idee del Rodet sembrano condivise dal sig. G. Milhaud (v. Leçons sur les origines de la science grecque, Paris 1893, p. 91 e seg.), ed aggiungo essere generalmente errata la seguente proposizione che il Rodet per ben tre volte ripete (l. c., p. 395, 399 e 424): »Toutes les fois qu'on fait subir à différentes quantités une même opération arithmétique, les résultats obtenus sont proportionels aux quantités dont on est parti«. Se ciò fosse vero si avrebbe, qualunque fossero i numeri a e b, $\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a}{b}$, f rappresentando un' operazione aritmetica o un complesso di tali operazioni. Ora da tale eguaglianza emerge che $\frac{f(x)}{x}$ ha un valore costante k; allora si deduce $f(x)=kx$, onde quella proposizione vale soltanto se l'operazione è una semplice moltiplicazione, nel qual caso essa è di verità intuitiva ed è appunto in quest' unico caso che viene applicata da Ahmes.

23 Op. cit. p. 35.

24 Il lettore a cui non è ignoto il papiro Rhind ricorderà che ostacoli somiglianti presenti l'interpretazione di alcuni calcoli ivi eseguiti per risolvere certe questioni di geometria metrica: v. Eisenlohr, l. c., p. 76—77 e 86—91.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

W. W. R. Ball. A SHORT ACCOUNT OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. Second edition. London, Macmillan 1893. In-8°, XXIV + 520 p.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1888, et elle a été analysée par M. LORIA dans la Bibliotheca Mathematica 1889, p. 56—58. A la fin de cette analyse nous nous permîmes d'exprimer le désir que M. BALL entreprit une révision complète de son ouvrage afin que les erreurs qui s'y étaient glissées malgré lui fussent corrigées. Maintenant nous sommes bien content de pouvoir constater que, dans la nouvelle édition, M. BALL a introduit un grand nombre de corrections; néanmoins, on trouve aisément qu'il y a encore certaines rectifications à faire pour la troisième édition. Ci-dessous nous nous permettons de signaler quelques-uns des passages où des modifications nous semblent nécessaires.

P. 127: »There are no Greek abaci now in existence». Dès en 1863, M. CANTOR appelait l'attention (*Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker*, p. 132) sur un grand *abacus* en marbre, trouvé en 1846 à Salamis, et il donnait une description détaillée de cet *abacus*.

P. 170: »GEBER IBN APHLA seems to have discovered the theorem that the sines of the angles of a spherical triangle are proportional to the sines of the opposite sides». M. SUTER (*Zur Geschichte der Trigonometrie;* Biblioth. Mathem. 1893, p. 7) a fait observer que ce théorème doit avoir été connu par plusieurs mathématiciens antérieurs à DSCHABIR BEN AFLAH.

P. 177. Le petit traité: *De similibus arcubus* n'a pas pour auteur JORDANUS, mais AHMED BEN JUSUF (voir STEINSCHNEIDER, Biblioth. Mathem. 1888, p. 114).

P. 256. WILLEBRORD SNELL naquit 1581, non 1591 (voir VAN GEER, *Notice sur la vie et les travaux de W. Snellius;* Arch. néerl. d. sc. exactes **18**, 1883, 453—468).

P. 277: »I think also that DESCARTES was the first to realize that his letters might represent any quantities, positive or negative». Autant que je sache, DESCARTES n'a pas employé des lettres (sans signe) pour désigner indifféremment des quantités positives ou des quantités négatives (voir p. ex. *La géométrie,* éd. HERMANN [1886] p. 76—79; cf. MANSION, Biblioth. Mathem. 1888, 63—64).

P. 349, 354. La *Methodus differentialis* n'a pas été publiée pour la première fois en 1736, mais déjà en 1711; STIRLING l'a

commentée en 1719 (*Methodus differentialis Newtoniana illustrata;* Philos. Trans. 1719, 1050—1070). On y lit (p. 1052): Anno vero 1711. tandem prodiit, inter alios ejusdem Authoris tractatus, ipsa Methodus Differentialis plenius quam ante exposita, cum fundamento ejus demonstrato.

P. 377, 389. »NICOLE was the first to publish a systematic treatise on finite differences. TAYLOR ... had been led to give a sketch of the subject in his *Methodus.* — TAYLOR ... is usually recognized as the creator of the theory of finite differences». Dans mon mémoire: *Differenskalkylens historia.* I. (Upsala universitets årsskrift 1878), j'ai démontré que TAYLOR est le véritable inventeur de la théorie des différences finies; NICOLE n'a que donné une exposition de la partie la plus élémentaire de cette théorie. Le »well-arranged *book*» publié par NICOLE en 1717, dont parle M. BALL, est un petit traité inséré dans les Mémoires de l'académie des sciences de Paris et contenant 13 pages in-4°.

Le style de M. BALL est en général soigné, mais parfois on trouve dans son livre des expressions plus ou moins inexactes. Ainsi p. ex. le *Triparty* de CHUQUET est appelé (p. 210) »a *small* treatise» (il contient environ 200 pages imprimées in-4°), et le traité *De triangulis* de REGIOMONTANUS est dit (p. 206) »printed in five *volumes*»; de même, M. BALL indique (p. 167) que la *Scientia stellarum* d'ALBATEGNI fut »published by REGIOMONTANUS at Nuremberg in 1537» (REGIOMONTANUS mourut déjà en 1476, et c'était MELANCHTON qui publia le traité d'après le manuscrit laissé par REGIOMONTANUS). — Parmi les fautes de plume nous signalons »Maralois» (p. 238, 512) au lieu de MAROLOIS.

Les nombreuses citations d'écrits historiques et biographiques insérées dans l'ouvrage de M. BALL seront sans doute très utiles pour les lecteurs auxquels il s'adresse en premier lieu. Ces citations montrent aussi que M. BALL poursuit lui-même avec ardeur son étude de l'histoire des mathématiques; nous regrettons seulement qu'il n'ait pas jugé convenable de signaler aucun des importants écrits de M. LORIA (p. ex. à la page 450 la monographie: *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung* [1888]).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1893: 2. — [Analyse de l'année 1892:] Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 63—68. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
1892: 2; 1893: 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
38 (1893): 4—5. — [Analyse de l'année 1891:] Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 84—88.

Baillet, J., Le papyrus mathématique d'Akhmîm.
Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire **9**, 1892, 1—89 + 8 pl.

Berthold, G., Notizen zur Geschichte der Physik.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 121—125.

Bertrand, J., Michel Chasles.
Revue scientifique **50**, 1892, 801—807.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи расвитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣйствія развитію научныхъ знаній.
Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 67—83. — BOBYNIN, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque de l'appui du gouvernement pour le développement des connaissances scientifiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Преподаваніе ариѳметики въ индусскихъ школахъ.
Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 58—62. — BOBYNIN, V. V., L'enseignement de l'arithmétique dans les écoles indiennes.

Cantoni, G., Sul valore filosofico degli scritti di Galileo Galilei.
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 1_5: 2, 405—410.

°**Cleomedes,** De motu circulari corporum caelestium libri duo. Ad novorum codicum fidem edidit et latina interpretatione instruxit H. ZIEGLER. Leipzig, Teubner 1891.
8°, VI + 258 p. — [2·70 Mk.]

Favaro, A., Delle case abitate da Galileo Galilei in Padova.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **9**, 1893, 225—268.

Galdeano, Z. G. de, Ernesto Eduardo Kummer. Necrologia.
El progreso matem. **3**, 1893, 234—236.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume III. Parte prima. Firenze 1892.
4°, 399 p. — Edition publiée sous la direction de M. A. FAVARO.

°**Goldbeck, E.**, Descartes' mathematisches Wissenschaftsideal. Berlin 1893.
8°, 42 p. — [1·20 Mk.]

Heppel, G., The use of history in teaching mathematics.
Association for the improvement of geometrical teaching, Report **19**, 1893, 19—32.

Hultsch, F., Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1893, 367—428 + 2 pl.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome cinquième. Correspondance 1664—1665. La Haye, Nijhoff 1893.
4°, 625 p. + 3 pl.

°**Jamblichus**, De communi mathematica scientia liber. Ad fidem codicis Florentini edidit N. FESTA. Leipzig, Teubner 1891.
8°, X + 153 p. — [1·80 Mk.]

Karagiannides, A., Die Nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie. Berlin, Mayer & Müller 1893.
8°, (2) + 44 p. — [1·60 Mk.]

Lampe, E., Ernst Eduard Kummer. Nachruf.
Naturwissenschaftliche Rundschau (Braunschweig) **8**, 1893, 361—364.

Loria, G., L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche.
Biblioth. Mathem. 1893, 39—46. — Résumé d'un discours prononcé en 1892 au congrès historique italien (cf. ci-dessus p. 61).

Loria, G., Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1893, 47—50. — Rivista di matem. **3**, 1893, 105—108.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri greci precursori di Euclide.
Modena, Accad. d. sc., Memorie $\mathbf{10}_2$, 1893. 168 p. + 2 pl.

Mittag-Leffler, G., Sophie Kovalevsky.
Acta Mathem. **16**, 1893, 385—392 + portrait.

°**Obenrauch**, Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie. Eine historische Studie. I. Brünn 1893.
8°. — [1·50 Mk.]

Ovidio, E. d', Sopra alcune classi di sizigie binarie.
| *Torino*, Accad. d. sc., Atti **28**, 1893. 8 p. — Note historique.

Riccardi, P., Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.
Biblioth. Mathem. 1893, 54—56.

Riccardi, P., Osservazione intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' Algebra del Bombelli.
Biblioth. Mathem. 1893, 64.

Ritter, F., François Viète, inventeur de l'algèbre moderne.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 17—25.

Ritter, F., L'algèbre nouvelle de François Viète.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 177—182.

Ritter, F., La trigonométrie de François Viète.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 208—212.

РОЗЕНБЕРГЕРЪ, Ф., **Очеркъ исторіи физики. III: 1. Переводъ подъ ред. И. Сѣченова. Санктъ-Петербургъ** 1892.
8°, 326 p. — ROSENBERGER, F., Aperçu de l'histoire de la physique. III: 1. Traduction rédigée par I. SJETCHENOFF.

Steinschneider, M., Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen.
Biblioth. Mathem. 1893, 51—53.

°**Sterner, M.**, Principielle Darstellung des Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. I. Geschichte der Rechenkunst. München 1891.
8°, XII + 533 p. — [6 M.]

Studnicka, F. J., Algorismus prosaycus Magistri Christiani anno fere 1400 scriptus. Prag 1893.
8°, 17 p. — [0·50 Mk.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 198—199. (CANTOR.)

Suter, H., Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vice-königlichen Bibliothek in Kairo. Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen. (Schluss.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 161—184.

Suter, H., Nachtrag zu meiner Übersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadim.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 126—127.

Valentin, G., Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482.
Biblioth. Mathem. 1893, 33—38.

Zanotti Bianco, O., Sulla scoperta del potenziale.
Rivista di matem. **3**, 1893, 114.

Question 42 (sur une formule pour l'ajustement d'une série de valeurs observées).
Biblioth. Mathem. 1893, 64. (G. ENESTRÖM.)

BALL, W. W. R., Mathematical recreations and problems of past and present times. London, Macmillan 1892. 8°.
New York Mathem. soc., Bulletin **2**, 1892, 37—46. (J. E. OLIVER.) — Mathesis **3**$_2$, 1893, 65—66.

BURKHARDT, H., Bernhard Riemann. Vortrag, bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages. Göttingen 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 66. (CANTOR.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 57—65. (P. TANNERY.)

FAVARO, A., Per il terzo centenario dalla inaugurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Firenze 1892.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 197—198. (CANTOR.)

GRAF, J. H., Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jacob Huber aus Basel (1733—98). Bern 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 63. (CANTOR.)

LAMPE, E., Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Rede. Berlin 1893. 8°.
El progreso matem. **3**, 1893, 64. — Jornal de sc. mathem. **9**, 1893, 126. (G. T.)

MEYER, F., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **1**, 1892.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 141—144. (H. BURKHARDT.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 108—110. (P. TANNERY.)

Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario dalla inaugurazione del suo insegnamento nel Bò pubblicati per cura della R. Accademia di Padova. Padova 1892. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 197—198. (CANTOR.)

REBIÈRE, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 57—60. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis $\mathbf{3}_2$, 1893, 132—133. (P. M.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1892. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 149—160.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 60—63. — Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 89—112; **12**, 1893, 69—80. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 146—148, 199—200.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

43. Dans son ouvrage *Mathématiques et mathématiciens* (2e éd., Paris 1893, p. 273—274), M. A. Rebière a donné quelques petites notices sur les mathématiciennes décédées; pour ce qui concerne les mathématiciennes vivantes, les matériaux semblent lui avoir manqué. Mais comme il est sans doute d'un certain intérêt d'apprendre quel rôle jouent actuellement les femmes dans le domaine des mathématiques, j'ai réuni tous les renseignements sur les mathématiciennes vivantes que j'ai pu trouver. Il est néanmoins à présumer que ces renseignements sont très incomplets et pour y remédier je me permets de faire appel aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica et aux mathématiciennes elles-mêmes. Pour chacune d'entre elles, je désire avoir une petite notice biographique et une liste des écrits qu'elle a publiés.

En ce moment j'ai des renseignements plus ou moins complets sur les mathématiciennes suivantes:

Amort, Anna (Jicin?, Bohème).
Blackwood, Elisabeth (London?).
Bortniker, L. (Paris?).
Bouwmeester, S. (Rotterdam?).
Bryant, Sophia (London?).
Gaio, Olimpia (Firenze?).
de Haas, Carolina (Rotterdam).
Ladd-Franklin, Christine (Baltimore).
Marks, Sarah (London?).
Perrin, Emily (Cheltenham?, England).
Pompilianu, Mlle (Bukarest).
Prime, F. (Bruxelles).
Scott, Charlotte A. (Bryn Mawr, U. S. A).
Wijthoff, A. G. (Amsterdam).

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. Nº 4.

NEUE FOLGE. 7. Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. NOUVELLE SÉRIE. 7.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède.

Par H. G. Zeuthen à Kjöbenhavn.

On sait qu'Archimède, dans son second livre sur la sphère et le cylindre, réduit la question »de diviser une sphère par un plan en deux segments dont le rapport est donné» à la proportion suivante:

(1) $$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ,$$

D, B, T et Z étant des points connus d'une droite et X un point inconnu qui doit se trouver sur le segment DB de la même droite.[1] Dans le manuscrit conservé par Eutocius dont je vais parler, cette proportion est remplacée par l'égalité de deux parallèlépipèdes

(2) $$DB^2 . TZ = DX^2 . XZ.$$

L'une et l'autre de ces deux formes n'est que la représentation familière aux anciens de l'équation qu'en conservant la homogénéité nous écririons

(3) $$x^2(a-x) = b^2c$$

ou

(4) $$x^3 - ax^2 + b^2c = 0.$$

Archimède promet de résoudre »à la fin» cette équation; sa remarque que la question générale a un diorisme (c'est à

dire: condition de possibilité), qui n'entre pas en vigueur par la question particulière sur la division de la sphère, notre bien qu'il veut traiter la question générale.

La résolution promise manque à la fin du livre qui nous est conservé, mais on admet assez généralement qu'un manuscrit trouvé par EUTOCIUS[1] a contenu la véritable fin du livre. Malheureusement le texte trouvé était alors assez maltraité, et EUTOCIUS ne nous en communique que sa propre réstitution; mais on voit, en tous cas, que la valeur de x a été déterminée comme abscisse d'un point d'intersection de la parabole

$$x^2 = \frac{b^2}{c} y$$

et de l'hyperbole

$$y(a-x) = cc,$$

et que le diorisme a dépendu du contact ayant lieu entre ces deux courbes, au point $x = \frac{2}{3} a$, dans le cas où $b^2 c = \frac{4}{27} a^3$; la condition d'intersection des deux courbes est $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$.

Hésitant — de même que M. CANTOR, qui en est un meilleur juge que moi — à regarder les raisons philologiques et historiques comme absolument décisives pour regarder le manuscrit comme une copie plus ou moins directe de la fin du livre d'ARCHIMÈDE, j'ai étudié, dans mon livre déjà cité, les raisons qu'on pourrait tirer de la connexion mathématique. Grace aux remarques déjà citées d'ARCHIMÈDE sur le diorisme de la question générale et aux remarques qu'on trouve ailleurs dans les oeuvres d'ARCHIMÈDE sur certaines autres questions qu'il se déclare capable de résoudre, j'ai constaté qu'ARCHIMÈDE devait être en possession de la résolution et du diorisme, non seulement de l'équation en question, mais aussi de celle que nous écririons

(5) $$x^3 + ax^2 - b^2 c = 0,$$

et qui ne différerait de celle à laquelle ARCHIMÈDE a réduit la division de la sphère que par l'ordre des points donnés D, B, T et Z. Vu que la résolution et la discussion communiquées par EUTOCIUS correspondent exactement à ces exigences, et qu'elle a bien le caractère des mathématiques d'ARCHIMÈDE et de ses contemporains, il est peut-être rendu assez probable que la résolution d'EUTOCIUS est en vérité celle qu'a donnée ARCHIMÈDE »à la fin» du livre. La seule doute qui me restât encore provenait du fait que déjà DIOCLES, ne sachant rien sur

cette solution donnée à la fin, reproche à ARCHIMÈDE de s'être borné à réduire la question à une autre qu'il ne résout pas. Il serait donc possible que la promesse d'ARCHIMÈDE fût une interpolation au moyen de laquelle un éditeur aurait essayé d'expliquer cette omission d'une manière moins défavorable pour ARCHIMÈDE. Regardant comme certain qu'ARCHIMÈDE n'aurait été satisfait que d'une résolution complète du problème qu'il s'est posé, j'ai donc émis la conjecture qu'un travail antérieur de lui-même ou d'un autre — et alors probablement celui qu'a retrouvé EUTOCIUS — lui permettait de regarder comme connue la solution de l'équation cubique à laquelle il réduit ce problème. Alors sa réduction suffirait et serait analogue à celle du problème suivant du même livre, qu'il réduit à la construction bien connue des deux moyennes géométriques.

Cette conjecture deviendra superflue si l'on peut trouver des raisons particulières pour expliquer la place de la résolution de l'équation cubique *à la fin* du second livre sur la sphère et le cylindre. A cet effet, je me suis demandé les motifs qui auraient pu porter ARCHIMÈDE à remettre cette solution. Il y en a un qui se présente immédiatement: celui qu'elle demande l'usage des sections coniques et qu'elle diffère ainsi des autres recherches consignées dans ce livre. En considérant les propositions suivantes du livre j'en ai trouvé un autre qui rendrait encore plus naturelle la place de la solution. On verra en effet qu'au nombre des questions sur les segments de sphère qui occupent ARCHIMÈDE, il y en a une dont il commence à traiter à la fin du livre conservé mais dont la solution complète demande et la résolution et le diorisme de son équation cubique.

Selon un manuscrit arabe conservé,[3] le geomètre ALKÛHÎ commence un travail, auquel j'aurai à revenir toute à l'heure, par la remarque qu'il y a une lacune à combler dans le livre d'ARCHIMÈDE qui nous occupe. ALKÛHÎ a dit »qu'il y a là trois constructions qui rentrent dans la même catégorie, dont la première est celle d'un segment de sphère qui, de deux autres segments de sphères, est égal à l'un et semblable à l'autre. La seconde, celle d'un segment de sphère dont la surface est égale à celle d'un autre segment de sphère, et qui est semblable à un second segment de sphère. La troisième, celle d'un segment de sphère égal à un autre segment de sphère, et dont la surface est égale à celle d'un segment de sphère. ARCHIMÈDE — continue ALKÛHÎ — résolut les deux premiers problèmes (sphère et cylindre II, 5 et 6) sans s'occuper du troisième qui ne fut pas ajouté non plus aux deux autres par les geomètres qui lui succédèrent.»

Le passage cité ici montre que je ne suis pas le seul qui trouve que la question d'un segment de sphère dont le volume et la surface courbe sont donnés s'impose aux lecteurs du livre d'ARCHIMÈDE; mais ALKÛHÎ a tort en niant nettement qu'ARCHIMÈDE s'en soit occupé. En effet, l'usage des géomètres grecs ne permettait pas même d'énoncer un problème qui devenait impossible dans certaines conditions, sans y ajouter le diorisme dont la *nécessité* devait être démontrée dans une proposition précédente. La résolution du problème devait servir de son côté à montrer la *suffisance* de la condition énoncée dans le diorisme.[2] Dans le cas actuel, le diorisme du problème de construire un segment de sphère égal à un segment donné, A, et ayant la même surface courbe qu'un autre, B, doit demander que le segment A ne soit pas plus grand qu'un hémisphère à la même surface courbe que le segment B. La nécessité de cette condition est démontrée dans la 9ème et dernière proposition du livre d'ARCHIMÈDE qui énonce que l'hémisphère est le plus grand des segments de sphère qui ont une surface courbe donnée.

De l'autre côté, les propositions énonçant des théorèmes de *maximum* ou de *minimum* sont toujours, dans la géométrie ancienne, suppléées par les problèmes conduisant aux constructions qui en démontrent la suffisance. Le théorème 20 du premier livre des éléments d'EUCLIDE, qui énonce les conditions auxquelles doivent satisfaire les côtés d'un triangle, est suppléé par la construction d'un triangle à côtés donnés qui satisfont à ces conditions (22). Le théorème VI, 27 sur le parallélogramme maximum à un angle donné et à une somme donnée des côtés est suppléé par la construction VI, 28 du parallélogramme dont encore l'aire est donnée. Dans le 5me livre des Coniques APOLLONIUS trouve les conditions auxquelles doit satisfaire un point d'où sortent des normales à une [partie bien déterminée d'une] conique avant d'en indiquer la construction;[3] et APOLLONIUS nous apprend expressément dans la préface du 7me livre que les valeurs *maximae* et *minimae* qu'il y établit seront utiles aux diorismes des problèmes qu'il va résoudre dans le huitième livre, remarque qui a fait la base de la réstitution de ce livre par HALLEY.[4]

Suivant l'usage ordinaire des anciens, le 9me théorème du second livre sur la sphère et le cylindre demande donc un supplément contenant la construction dont ce théorème établit le diorisme.

ARCHIMÈDE a voué à ce théorème maximum un intérêt tout particulier; il suffit de rappeler à cet egard qu'en envoyant premièrement un faux résultat à Alexandrie, il réussit à con-

fondre les géomètres qui essayaient de s'approprier les propositions trouvées par lui en les démontrant.[7] Il n'aura donc pas, certainement, oublié son obligation de le suppléer par la résolution du problème qui s'y attache. Alors il aura eu à sa disposition les équations exprimant que le volume et l'aire courbe du segment ont des valeurs données:

$$(6) \qquad \left(\frac{3}{2}x-y\right)y^2=d^2f, \qquad xy=g^2,$$

où j'ai désigné par x et y le diamètre de la sphère et la hauteur du segment cherché, par d et f le rayon de la base et la hauteur du cône auquel le segment doit être égal, et par g le rayon du cercle auquel sa surface courbe doit être égale. Les différentes transformations exécutées par ARCHIMÈDE dans le même livre nous garantissent qu'il a bien été en état d'en déduire l'équation suivante:

$$(7) \qquad x^2\left(\frac{3}{2}g^4-d^2fx\right)=g^6,$$

ou bien l'équation (3) dont nous nous sommes déjà occupé

$$x^2(a-x)=b^2c,$$

où

$$a=\frac{3}{2}\frac{g^4}{d^2f}, \qquad b^2c=\frac{g^6}{d^2f},$$

exprimée, bien entendu, dans son langage géométrique ordinaire. De cette façon le problème sera réduit précisément à celui dont ARCHIMÈDE nous promet la résolution »à la fin», et il présente une véritable application du diorisme dont il parle aussi. On en déduit que la résolution sera possible si

$$g^3 \geqq \sqrt{2}\,.\,d^2f,$$

et que dans le cas limite $x=\sqrt{2}\,.\,g$, $y=\frac{g}{\sqrt{2}}$, ce qui correspond au cas où le segment est un hémisphère.

Selon nous, ARCHIMÈDE a donc remis la résolution à la fin, parce que le dernier problème dont il devait s'occuper — celui qui nous est annoncé par le dernier théorème du texte conservé — en dépend aussi et en demande même une discussion plus complète que la division de la sphère. Il est vrai que la communication d'EUTOCIUS ne contient rien sur cette application; mais vu l'état du manuscrit qu'il a retrouvé et le fait

qu'il ne se présentait pas immédiatement comme un appendice au livre d'ARCHIMÈDE, il n'en est permis de conclure rien. L'appendice promis doit avoir contenu en tout cas le supplément nécessaire au théorème 9.

Qu'on n'objecte pas que dans le n° 9 de son livre ARCHIMÈDE ait démontré ce théorème, que nous regardons ici comme une conséquence du diorisme de la construction des racines de l'équation cubique, sans faire aucun usage de coniques et du contact devant avoir lieu entre elles dans le cas du segment maximum. Il suffit, pour y répondre, de renvoyer à l'autre résolution d'un problème solide qui nous est conservée complètement: la construction d'APOLLONIUS des normales menées d'un point donné à une conique (5e livre des Coniques). Sans doute la condition de sa possibilité a été trouvée par la même analyse qui a conduit à la construction: elle est une conséquence de la condition de contact de la conique donnée avec l'hyperbole servant à déterminer les points auxquels appartiennent les normales; mais l'auteur ne fait pas usage de cette hyperbole dans la démonstration de la nécessité de la condition de possibilité — ou plutot dans la démonstration de l'impossibilité dans le cas où le point donné ne satisfait pas à cette condition (Coniques V, 51 pour la parabole, et 52 pour les autres coniques).[8] Il n'est donc pas moins naturel que, dans sa démonstration du théorème 9, ARCHIMÈDE a évité de faire usage des coniques, quand même il aurait *trouvé* ce théorème par la même analyse qui a conduit à la construction d'un segment dont le volume et l'aire courbe sont donnés.

La démonstration de ce théorème est du reste incomplète dans le texte conservé; mais elle est très facile à restituer. Abstraction faite des détours qui résultent de la circonstance qu'ARCHIMÈDE indique le volume d'un segment en déterminant la hauteur d'un cône sur la même base qui a le même volume, on peut la rendre de la manière suivante dans le langage algébrique moderne.

Il résulte de la seconde équation (6) que

$$\left(g\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{x}{2}\cdot y, \tag{8}$$

et que, par conséquent, si y n'est pas égal à $g\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{x}{2} > g\sqrt{\frac{1}{2}} > y \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} < g\sqrt{\frac{1}{2}} < y.$$

On en conclut que

$$(9)\qquad g\sqrt{\frac{1}{2}}\left(x-g\sqrt{\frac{1}{2}}\right)>y(x-y)$$

(ce qu'on voit immédiatement par la construction ordinaire des moyennes géométriques des facteurs des deux membres de l'inégalité). On trouve ensuite par l'addition des deux membres de l'équation (8) à ceux de l'inégalité (9) que

$$(10)\qquad g\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\,x>y\left(\frac{3}{2}x-y\right)$$

et, comme

$$\frac{g^2}{x}=y,$$

$$(11)\qquad g^3\sqrt{\frac{1}{2}}>y^2\left(\frac{3}{2}x-y\right).$$

En divisant par 3 on voit que l'hémisphère au rayon $g\sqrt{\frac{1}{2}}$ est plus grand que le segment à la hauteur y de la sphère au diamètre x. Cette démonstration[9] est assez simple pour la préférer à celle qui dépend de l'usage de coniques dont il n'y aura besoin immédiat que dans la construction devant suivre, selon l'usage des anciens, au théorème. De l'autre côté elle n'explique pas si bien la découverte de son résultat que l'analyse qui a dû conduire à cette construction.

Nous devons encore dire quelques mots sur la résolution du même problème stéréométrique trouvée par ALKÛHÎ. Ce savant arabe ne le réduit pas à l'équation cubique (3), bien que sa résolution lui fût connue par EUTOCIUS. Il déduit immédiatement des deux équations (6) l'équation suivante:

$$(12)\qquad y^2=\frac{3}{2}g^2-\frac{d^2f}{g^2}x$$

qu'on obtient en multipliant la première équation par x et en la réduisant ensuite au moyen de la seconde. L'équation (12) représente une parabole; en la combinant avec l'hyperbole représentée par la seconde équation (6), on trouve les valeurs cherchées de x et y. Les deux courbes étant exactement de la même nature et ayant, l'une par rapport à l'autre, la même position que celles dont se sert ARCHIMÈDE selon EUTOCIUS, ALKÛHÎ a pu profiter de l'étude géométrique de leur contact

contenue au manuscrit conservé par le dernier auteur, pour trouver les conditions de possibilité.

La construction d'ALKÛHÎ est essentiellement identique à celle que, dans l'antiquité, DIONYSODORE a inventée [10] des racines de l'équation d'ARCHIMÈDE, mais comme l'auteur arabe ne réduit pas son problème à cette équation, il le doit probablement à sa propre invention guidée seulement par les suggestions puisées à l'étude d'ARCHIMÈDE et d'EUTOCIUS. Elle lui fait donc beaucoup d'honneur, et quoique il ait pu puiser immédiatement dans EUTOCIUS sa recherche de la condition de possibilité, il se sépare avantageusement de la plupart de ses compatriotes, en ne négligeant pas ce diorisme. Cependant ses mérites ne doivent pas nous faire oublier ceux de son grand modèle. Bien que nous ne possédions immédiatement de la main d'ARCHIMÈDE aucune résolution du problème dont nous avons parlé ici, son 9ᵉ théorème contient le résultat qui en serait le meilleur fruit, et la résolution que nous lui avons attribuée, n'est qu'une application très simple de ce que nous trouvons dans son second livre et dans le manuscrit d'EUTOCIUS.

[1] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, p. 214. Voir encore mon travail: *Keglesnitslæren i Oldtiden* dans les Mémoires de l'académie royale des sciences et des lettres du Danemark 6ᵉ série, t. III, p. 157 et suiv., ou l'édition allemande: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* p. 238 et suiv. Dans les citations suivantes je désignerai ces deux livres respectivement par Z_1 et Z_2.

[2] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. III, p. 152—181.

[3] Voir l'édition de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî* par WOEPCKE, p. 104.

[4] Dans un livre qui vient de paraître: *Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder*, je montre (p. 78—79) qu'un but essentiel des constructions des anciens est de servir de démonstrations d'existence.

[5] Voir Z_1, p. 187 et suiv.; Z_2, p. 288 et suiv.

[6] Voir Z_1, p. 257, 258; Z_2, p. 403 et suiv.

[7] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. II, p. 6.

[8] Voir Z_1, p. 189; Z_2, p. 292.

[9] Dans le texte conservé l'inégalité (9) n'est enoncé que pour le dernier des alternatives qui la précèdent ici.

[10] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. III, p. 180. Z_1, p. 164; Z_2, p. 250.

Die Mathematik bei den Juden.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

4. Literatur.

Allgemeine Schriften, welche insbesondere für unsere *Bibliographie* zu benutzen wären, giebt es kaum. Poggendorff's *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften* (Leipzig 1858) reicht selbst für europäische Literatur nicht aus,[13] geschweige für hebräische, wie für arabische.[14] Dieses Werk ist jedoch überhaupt dem Plane nach nicht auf minder bedeutende, entlegene, dunkle und zweifelhafte Stoffe eingerichtet. Hingegen ist die weitschichtige *Bibliographie générale de l'astronomie par* Houzeau *et* Lancaster (T. I, Bruxelles 1887) auf Vollständigkeit berechnet, ermangelt aber leider in Bezug auf Hebräisches und Arabisches der Specialkenntniss, — die allerdings nur unter Mitwirkung eines Fachmannes erreichbar ist — daher auch meist aus veralteten, nicht mehr brauchbaren Quellen ohne Kritik zusammengelesen; ein grosses in neueren Katalogen und Abhandlungen niedergelegtes Material blieb unberührt.[15] Es wird sich nicht lohnen, im Verlauf der gegenwärtigen Abhandlung dieses Buch überhaupt zu berücksichtigen, da in unserem engeren Kreise, so weit ich gesehen, nicht einmal die Fehler originell sind.

Die *biblische* Zeit ist hier von vorne herein ausgeschlossen, und sei nur ausnahmsweise eine Monographie erwähnt: J. J. Schmidt, *Biblischer Mathematicus, oder Erläuterung der H. Schrift aus den mathematischen Wissenschaften,* Lüttichau 1763, 8° (*Catalogue de la Bibliothèque* etc. *du feu Joseph Almanzi,* Padoue 1864, n. 1914).

Eine streng wissenschaftliche *Einteilung* der wenigen Schriften, die hier folgen sollen,[16] ist nicht gut ausführbar; es wird unsere Übersicht nach gewissen *Gruppen* auch nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen dürfen.

A) *Zusammenstellungen* von jüdischen Schriften enthält der erwähnte Artikel »Jüdische Literatur« in der *Realencyclopädie* von Ersch und Gruber, oder die englische Übersetzung *Jewish Literature,* wozu eben ein Autorenregister (Frankfurt a/M. bei J. Kauffmann) erschienen ist. — Die vollständige Literatur der *Übersetzungen* ins Hebräische habe ich in meiner Preisschrift darüber gegeben; s. die Notiz darüber in dieser Zeitschrift (1893, S. 51). — 77 hebräische Druckwerke, und einige Ar-

tikel in Zeitschriften, hauptsächlich über Chronologie und Kalenderwesen und einiges über Mathematisches, verzeichnet Ch. J. GURLAND in seinem hebräisch-russischen Kalender für das Jahr 643 (1882—83) Jahrgang VI, Seite 112—118. — Werke über vergleichende Berechnung, insbesondere Kalender-*Tafeln* verzeichnet ISIDORE LOEB (leider so früh verstorben) in seinen vorzüglichen *Tables du Calendrier juif* (Paris 1886, in 4°).[17]

Ich stelle noch hierher die hebräische Schrift *Bikkure ha-Limmudijjot* (Erstlinge der Mathematik), von BARUCH LEWENSTEIN B. SALOMO, Erklärung der mathematischen Stellen in den Schriften von ABRAHAM IBN ESRA, MAIMONIDES und JOSEF DEL MEDIGO, Warschau 1863, 37 S. u. Kupfertaf. (*Hebr. Bibliogr.* X, 91).

B) Kürzere Angaben von mathematischen Schriften überhaupt (auch griechischer und arabischer Autoren) finden sich in Encyklopädien, methodologischen Anweisungen und dergl., wie bei ABRAHAM BAR CHIJJA (um 1116—1130) in seiner mathematischen Encyklopädie; die betreffende Stelle ist in der *Hebräischen Bibliographie* VIII, 84 behandelt; vgl. Zeitschrift f. Mathematik **10**, 1865, 466; **12**, 1867, 10. — JOSEF IBN AKNIN, geboren im Magreb, später Schüler des MAIMONIDES, gestorben 1226 in Aleppo, verfasste ein arabisches Sittenwerk worin ein Kapitel eine Anleitung zum Studium überhaupt, also auch zur Mathematik enthält. Dieses Kapitel, auch in hebräischer Übersetzung handschriftlich erhalten, ist 1874 von GÜDEMANN edirt und deutsch übersetzt; die literarischen Nachrichten habe ich wiederholt besprochen (Zeitschr. f. Mathem. **10**, 1865, 465; *Hebr. Bibliogr.* XIV, 38; cf. *Hebr. Übersetz.* S. 33). — JEHUDA SAMUEL ABBAS (wahrscheinlich im XIII. Jahrh. in Spanien) widmet ebenfalls ein Kapitel seiner hebräischen Schrift einem Wegweiser für das Studium, welcher zusammen mit dem des IBN AKNIN edirt, übersetzt und besprochen ist (*Hebr. Übersetz.* S. 35). — Der Warnung halber sei hier ein Autor genannt, dessen vielleicht nicht unverschuldete Confusion anderswo besprochen ist (Magazin f. die Wissenschaft des Judenth. [Berlin] **3**, 1876, S. 196). Die betreffende Stelle findet sich in einem unedirten Commentar zum Pentateuch, von JEHUDA (oder *Leon*) MOSCONO aus Ochrida (Bulgarien) verfasst (1362—1370).

C) Schriften über Mathematik im *Talmud.*[18] ADAM ANDREAS CNOLLEN (gest. 1714) versprach in einer Recension des Buches von JAKOB B. SAMUEL (s. unten Jahr 1593) in den Unschuldigen Nachrichten eine *Mathesis Biblico-Talmudica* (*Hebr. Bibliogr.* XIV, 103; XV, 128; XVII, 88 A. 1). POGGENDORFF's *Handwörterbuch* I, 458 citirt: »De geometria talmudica«

und »De algebra Hebraeorum« ohne nähere Nachweisung. Ich kenne keine Schrift eines anderen christlichen Gelehrten über Mathematisches im Talmud. Hingegen haben Juden, abgesehen von Commentaren zu den betreffenden Stellen des Talmuds, auch in anderen Schriften diese Themen behandelt. Schon ABRAHAM BAR CHIJJA bespricht in dem von mir edirten Epilog zu seiner hebräischen Geometrie (1864) das im Talmud angegebene Maass der Diagonale des Quadrates $= 1\frac{2}{5}$ der Seite;[19] doch ist aus dem Mittelalter keine Monographie bekannt. Der Verfasser der ältesten bekannten, JACOB B. SAMUEL, sagt in seinem Commentar zu JOSEF ALBO's Grundlehren (des Glaubens) I, 17 (f. 10, ed. 1584): »Wer diese Wissenschaft erlernen will, der lese ihre [der Christen] Bücher, worin sich bewährt [der talmudische Spruch]: »Ich habe mich bemüht und gefunden«, denn nur sehr Weniges blieb bei uns [Israeliten] in dieser Zeit, weil in der langen Zeit des Exils diese Wissenschaft mit den anderen Wissenschaften uns fast gänzlich verloren gegangen ist.« Andere von da ab lebende Verfasser hebräischer Schriften, welche an ihrem Orte näher besprochen werden sollen, sind: 1599: SAMUEL EDELS; 1617: MOSES CASES; 1708: JEHUDA B. CHANOCH; 1712: MOSES EISENSTADT; 1741: ISRAEL SAMOSC; 1775: SERACH EIDLITZ; 1777: GEDALJA LIPSCHÜTZ; 1796: DAVID FRIEDENHEUSSEN; 1807: TOBIA LEVI; 1815: FRIZZI; s. auch unter 1765. Erklärungen talmudischer Stellen enthält ein *arabisches* Manuscript in hebräischer Schrift in der hiesigen königl. Bibliothek (n. 108 S. 78 meines Catalogs).

Nachdem PH. L. HURWITZ (1809) in einem Artikel über die Wissenschaften im Talmud auch die mathematischen besprochen hatte, und D. EHRMANN letztere insbesondere in einem Artikel der Allgemeinen Zeitung des Judentums (1852, S. 128 ff.), haben es namentlich zwei Männer von *Fach* unternommen, den Stoff in wissenschaftlicher Methode und technischer deutscher Form zu behandeln. B. ZUCKERMANN (Lehrer am jüdisch-theolog. Seminar in Breslau; gest. am 17. December 1891)[20] hatte schon in der von GRAETZ herausgegebenen Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums, **4**, 1855, S. 156 ff. Einiges berührt; der Jahresbericht jenes Seminars (Breslau 1878) enthält eine Abhandlung: *Das Mathematische im Talmud, Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhalts* (64 S. und XXXIV Figuren).[21]

Da die Abhandlung keine Inhaltsübersicht bietet, so mag hier eine solche folgen. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen ohne Bedeutung behandelt diese Monographie: I. Quadrat-

wurzel (S. 6); II. Verhältniss des Flächeninhalts eines Kreises und des ihm eingeschriebenen Quadrats zum Flächeninhalt des diesem Kreise umschriebenen Quadrates (S. 11); III. Verhältniss des Umfanges eines Kreises zu dem des ihm umschriebenen Quadrates (S. 63); daran schliesst sich (S. 25) das Thema des Salomonischen Meeres, ferner (S. 34) die Bestimmung des Sabbatweges, der kubische Inhalt eines Hohlmasses (S. 51).

Hr. EDUARD MAHLER in Wien hat einiges Hierhergehörige behandelt,[22] nämlich *Die Irrationalitäten der Rabbiner* in Zeitschr. f. Mathem. **29**, 1884, Hist.-lit. Abth. S. 41—43; *Zur Thalmudischen Mathematik*, daselbst **31**, 1886, S. 121—131, auch im Sonderabdruck, behandelt vom historischen Gesichtspunkt einige Stellen, welche sich auf die Quadratwurzel beziehen.

Die von AD. BRÜLL herausgegebenen Populärwissenschaftl. Monatsblätter v. J. 1892, S. 262, berichten, dass Prof. HOCHMANN in Odessa in der dortigen mathematischen physikal. Gesellschaft Vorträge über Mathematik und Physik im Talmud gehalten habe, ohne anzugeben, ob dieselben irgendwo gedruckt erschienen sind.

Über *einzelne Lehrer* (sogenannte »Rabbinen«), welche eine Bekanntschaft mit mathematischer Wissenschaft bekunden, muss man diejenigen Quellen benutzen, welche von den Talmudlehrern überhaupt handeln, dazu gehören einige biographische Monographien aus der neuesten Zeit.[23] Ich habe selbst angefangen, die Namen dieser Lehrer und die entsprechenden Quellen zusammenzustellen, kann aber die Notizen im Augenblick nicht auffinden. Der gegenwärtige Artikel hat mit ihnen direct Nichts zu schaffen, mit Ausnahme von zweien: dem SAMUEL BEN ABBA[24] (gest. 254—255) genannt *Jarchinai*, dem Kenner des Mondes (Mondlaufes), wird eine Schrift beigelegt, welche am Anfange unserer eigentlichen Abhandlung (§ 7) näher besprochen wird. Ein anderer Talmudlehrer namens ADA (oder ADDA?) soll der Begründer oder Einführer des, der jüdischen Chronologie zu Grunde liegenden Sonnenjahres sein und bildet hier einen Übergang zu der letzten Schriftengruppe.

D) Schriften über *Chronologie* und *Kalenderwesen*. Es versteht sich von selbst, dass hier nicht die Schriften von Juden zusammengestellt werden sollen, welche einzeln nach ihrer Zeitfolge den Gegenstand der Abhandlung selbst bilden. Es sind auch die *tabellarischen* Anweisungen ausgeschlossen, deren Literatur oben unter A) berührt worden. Hier sind nur einige *allgemeine* Schriften von Christen erwähnt, welche die Grundregeln des jüdischen Kalenders behandeln,[25] wie SEB. MÜNSTERUS,

Kalendarium Hebr., ex Hebraeorum penetralibus jam recens in lucem aeditum (Basil. 1537, 4°), worin p. 56—106 ein anonymes hebräisches Werk über Kalender mit MÜNSTER's lateinischer Übersetzung; s. unten unter dem Jahr 1521. — JAC. CHRISTMANN, *De Calendario Hebraeorum*, im Anhange zur lateinischen Übersetzung von ALFRAGANI, *Chronologica et astron. elementa* (Francof. 1590) p. 223—265. — AEG. STRAUCH, *Diss. de Computo Talmudico-Rabbinico* (Witteb. 1661), kenne ich nur aus WOLF, *Bibl. Hebr.*, wo II, 1302 und IV, p. 1048 einige nur versprochene Abhandlungen anderer Gelehrten. — JO. GER. PAGENDARM citirt seine handschriftlichen »Praelectiones in Calendarium judaicum« in seiner Abhandlung über ein gedrucktes Bibelfragment in Oels (*De Codice Judaeorum Oelsnensium*, Jenae 1730, p. 32); cfr. WOLF, IV, p. 1048 n. 286ᵇ.

Ich habe bereits oben (§ 3) angedeutet, dass die Feststellung des jüdischen Kalenders nach dem METON'schen Cyclus von 19 Jahren[26] mit 7 Schaltmonaten nach je 3 oder 2 Jahren (die jetzt giltige Reihenfolge ist 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19)[27] mit der genauen Berechnung des Sonnenjahres zusammenhängt; nach der alten Tradition gab es neben den »Quatembern« des SAMUEL, welche man als exoterisch bezeichnete, die Quatember eines R. ADA, dessen Persönlichkeit streitig ist, als esoterische.[28] Die Einführung des exacten Sonnenjahres ist zuerst kritisch behandelt in einer in 3 Auflagen erschienenen hebräischen Schrift (*Jesode ha-Ibbur*, zuerst Zitomir 1865, zuletzt Warschau 1889) von dem scharfsinnigen Kenner der Astronomie, CHAJJIM SELIG SLONIMSKI, welche jedoch teilweise bekämpft worden ist. Eine Übersicht des Themas, wenn auch ohne kritische Schärfe, bietet ADOLF SCHWARZ: *Der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht* (Breslau 1872; 136 S. incl. Tabellen).

Um nicht aus einem einzigen Buche eine neue Rubrik zu bilden, schliesse ich hier an eine Abhandlung von WACKERBARTH: *Views of the ancient Rabbies relative to the Dimension of the earth* (in Monthly notices of the r. astronom. society, **33**, p. 671; cf. *Hebr. Bibliogr.* XVII, 92, aus GÜNTHER, mir selbst nicht zugänglich).

5. Methode.

Über die Methode der nachfolgenden Aufzeichnungen, deren verschiedenartige Natur von der Zugänglichkeit der Quellen und des Stoffes abhängt, soll hier nur das Nötigste zusammengefasst sein. Die Mitteilungen umfassen vorzugsweise vorhandene, meist *handschriftliche* Werke, welche von Juden *verfasst* oder *übersetzt*

sind; die Übersetzungen werden sehr kurz mit Hinweisung auf meine Monographie (Biblioth. Mathem. 1893, S. 51) erledigt. *Biographische* Nachrichten über die Verfasser sind, mit seltenen Ausnahmen, sehr spärlich vorhanden, da die jüdischen Autoren in der Regel ein stilles Gelehrtenleben führten, wenn nicht Verfolgung, oder Not, sie hinaustrieb.

Die allgemeine Anordnung ist die chronologische; was sich nicht wenigstens auf ein Jahrhundert begrenzen liess, kommt zuletzt, und zwar zuerst Autoren, dann Anonyma, oder andere unser Thema berührende Notizen.

Für den Gebrauch in weiteren Kreisen sind die hebräischen *Werktitel* — meist, wie die arabischen, symbolischer Art, vorzugsweise Bibelphrasen — mit lateinischen Lettern umschrieben, und zwar in der Regel ohne besondere unterscheidende Zeichen.

Das Verzeichniss der, für die gewöhnlichsten Quellen gebrauchten *Abkürzungen* folgt zuletzt, damit es vollständig sei. —

Bis hieher reicht dasjenige, was als *Einleitung* zur eigentlichen Abhandlung bezeichnet werden könnte.

[13] So z. B. über BIANCHINO S. 182, s. meinen *Catal. Codd. mss. Lugd. Bat.* p. 377.

[14] So z. B. fehlt unter PETRUS ABANO eine Verweisung auf ABRAHAM IBN ESRA, dessen astrologische Schriften er lateinisch [aus dem Französ. des Hagins] übersetzt. S. 30 unter ALFONS: ISAAC ABEN SAID [lies *Cid*] ist nicht ein Araber, sondern ein Jude. S. 26 ALCABITIUS, unrichtig ein Homonymus in Toledo. S. 30 ALFRAGANUS, Nichts von Textausgabe, Ungenügendes über die Übersetzungen. Der Übers. CALO CALONYMUS ist nur unter ALPETRAGI S. 34 genannt.

[15] Es genügt hier eine Vergleichung der Artikel JOSEF B. ISAK (S. 374, 481). MAIMONIDES (477), MASCHALLAH (465, 700. 702, n. 3811), SAHL = ZAEL (489, 523, 699, 717, 720, JACOB B. MACHIR (484, vgl. 595) mit meinem Werke, *Die hebr. Übersetz.* Anmerk. Reihe [9] n. 8^b, 18, 25, 54, 81.

[16] S. die Stelle bei JAKOB B. SAMUEL (1584) zu JOSEF ALBO I, 17, welche weiter unten (§ 5) mitgeteilt ist. JAKOB war allerdings ein Deutscher, der die Schriften der südlichen Juden nicht kannte.

[17] Bei LOEB sind genannt (ich ordne die Autoren hier chronologisch): 1838: E. H. LINDO; 1842: B. GOLDBERG (auch 1844); 1844: PHILIPPOWSKI; 1848: I. MONTEL; 1849: S. D. LUZZATTO; 1854: A. I. WUNDERBAR; 1855: MAHMUD EFFENDI; 1856: G. A. JAHN; 1863: RENÉ MARTIN; 1868:

Jos. Engel und Ulysse Bouchet. — Ich füge hinzu: 1811: M. E. Fürth, *Entwurf zur Selbstverfertigung eines immerwährenden Kalenders* etc., mit hebr. Titel: *Peripheraot* etc. Leipzig. — 1840: M. Kloppstock, *70-jährige Vergleichungstabellen der jüd. mit der üblichen Zeitrechnung*, Berlin (dann Wollstein 1844 in: »Notiz und Erinnerungsbuch»). — 1845: Israel Lüpschütz (vulgo *Lipsch.*) *Schewili* [sic! lies *Schebile*] *de Rakia* [aus der Einleitung zum Mischna-Commentar] *oder Chronologie* etc. *Anweisung zur Anfertigung eines Kalenders* etc. *ins Deutsche übersetzt von* M. Michaelis, Lehrer, Danzig, 44 S. kl. 8°; der Umschlagtitel lautet etwas abweichend. — 1856: S. M. Landsberg, *System der math. und theolog. Chronologie, 1741—1900*, Altona, quer-4°. — 1856: L. M. Lewisohn, *Geschichte und System des jüdischen Kalenderwesens*, mit 7 Tabellen, Leipzig. — 1860: Abraham Jehuda Elbinger, *Tif'eret Zebi* (hebr.), Warschau. — 1879: Cohn, *Mafteach* etc. *Schlüssel zur sofortigen Umwandlung jüd. bürgerlichen Datums* etc. *für die Jahre 1750—1950*, Rees. — 1880: David Friedländer, *Sod Haibur* [lies *ha-Ibbur*] *Grundlage und Fortsetzung der Zeitberechnung bis 1930*, Budapest. — 1882: Zuckermann, s. weiter unten. — 1883: B. Goldberg, *Notes sur le Calendrier juif*, Paris (16 p.). — 1883: F. S. Brochmann, *System der Chronologie*, Stuttgart. — 1889: M. Simon, *220-jähriger Kalender zur Umvandlnng des jüd. Datums etc. 1781—2000*, Berlin, und 1891 desselben Verf. *Grundzüge des jüd. Kalenders und . . . Anleitung zu seiner Berechnung*, Berlin.

18 H. Strack, *Einleitung in den Talmud* (Leipzig 1887), S. 75, erwähnt nur Zuckermann.

19 Bei Zuckermann, *Das Mathematische im Talmud* unter Quadratwurzel, S. 6. Über die anonyme Erklärung in ms. Paris 1005[8a] erfährt man aus dem Catalog nichts Näheres. — Eine anonyme Schrift über die Kenntniss der Mathematik bei den Rabbinen, ms., citirt Ch. Horowitz, *Bet Nechot*, Frankf. a/M. 1882, II, 62.

20 Jahresber. des jüdisch-theolog. Seminars 1892, S. 1.

21 Vgl. meine Anzeige in der *Hebr. Bibliogr.* XVIII, 12. — Zu dem »Fernrohr ohne Gläser» des Gamaliel vgl. Houzeau *et* Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie* I, 173 über den Unterschied des Tubus und Telescops.

22 S. Günther, *Gesch. der Mathem.* S. 146 citirt *Beiträge zur Mathematik der Hebräer* in Zeitschr. für Realschulwesen IX, 465—471; sie behandeln Annäherungswerte bei Maimonides.

[23] Einige sind in dem chronol. Verzeichniss der bedeutendsten Lehrer bei STRACK, *Einleitung* etc. (s. Anm. 18), S. 53 f. angegeben.

[24] Zu den Quellen über ihn bei STRACK, l. c., S. 58, kommt A. GEIGER, in Forschungen des wiss. talmud-Vereins etc. Beil. der Zeitschr. Ben Chananja (Szegedin 1866), S. 69.

[25] DETLEV (oder DETLEF) CLÜVER, Mitglied der K. Societät zu London (gest. in Hamburg 21. Februar 1708, s. *Allgem. Deutsche Biographie*, Leipzig 1876, Bd. IV, S. 351) verfasste nach POGGENDORFF's *Handwörterbuch* I, 458: *Tabulae astronomicae in R. Mos. Maimonidis librum de consecratione calendarii etc. additae* (London 1683), über deren Charakter ich Nichts auffinden konnte. In den Angaben lateinischer Bearbeitungen dieses klassischen Abschnittes bei WOLF, *Bibl. Hebr.* I, p. 843, III, 776, IV, 915, sind diese Tafeln nicht erwähnt; sie scheinen äusserst selten zu sein. Derselbe »Cluverus« verfasste eine *Geologia, sive Philosophemata de genesi ac structura globi terreni, oder Natürliche Wissenschaft von Erschaffung* etc. (Hamburg 1700) in einem kaum verständlichen Deutsch; Capp. IX u. X behandelt die Mosaische Urkunde und der Juden Unfähigkeit, den natürlichen »Bericht davon einzunehmen und zu verstehen«.

[26] *The Metonic Cycle und Calippic Period.* Reprinted from the Journal of Sacred Literature etc. Jan., April and July 1865 (London). — Die jüdischen Cyclen (*Mahazir*, arab. Plural des hebr. *Ma'hzor*, vulgo *Machsor*) etc. citirt CYRIANUS (1480) bei NICOLL, *Catal. Codd. arab. Bodl.* II, 244.

[27] Drei Arten der Reihenfolge erwähnt ISAK ISRAELI, *Jesod Olam* (hebr.), IV, 2 f. 1; vgl. meine Bemerkung in *ha-Jona* von S. SACHS (Berlin 1851), S. 28, wo ich als Quelle die *Baraita* des SAMUEL vermute, die allerdings in einem ms. genannt ist.

[28] Der Kalender oder, nach SLONIMSKI (l. citando, ed. Warschau S. 36) das den Kalender bestimmende Collegium, wird als *Sod* (Geheimniss, Geheimer Rath) bezeichnet. Auch die Brahminen hielten den Kalender geheim (HOUZEAU et LANCASTER, *Bibliogr. gén. de l'astron.* I, 158). Persönliches Interesse ist es, wenn SAMUEL CHAKIM (Hakim) seinem Lehrer ABRAHAM B. NATAN schwören muss, dass er die Berechnung des »mittleren Neumonds« Niemand lehren werde (Gutachten des ISAK B. SCHESCHET, I, 103).

Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung.

Von G. VALENTIN in Berlin.

Die Kgl. Bibliothek zu Berlin ist kürzlich in den Besitz eines Buches gelangt, das mir, trotzdem es erst am Ende des vorigen Jahrhunderts erschienen ist, ziemlich selten geworden zu sein scheint. Der Titel desselben lautet:

Principj di analisi geometrica necessarj o per accignersi a sciogliere i due Problemi della Duplicazione del cubo e della Trisezione dell' angolo per mezzo della retta e del cerchio, o per dimostrarne l'impossibilità. Lettera dell' Abate FRANCESCO BOARETTI a sua Eccellenza il Sig. Bernardo Memmo Senatore amplissimo. In vigore di cui si rendono affatto superflui tutti gli Esami che venissero pubblicati in opposizione all' Opuscolo de' *Pensieri sulla Trisezione dell' angolo.* Venezia MDCCXCIII. Presso Domenico Fracasso. Con Licenza de' Superiori.

Das Buch besteht aus 32 Seiten in 8°, von der 3^{ten} an bis 32 numeriert. Auf Seite 3—6 spricht sich BOARETTI über einige allgemeinere Gesichtspunkte in Bezug auf seine Schrift: *Pensieri sulla trisezione dell' angolo* und die dadurch hervorgerufenen Gegenschriften aus; auf Seite 7—17 folgen in 7 Paragraphen einige speciellere Entwickelungen, welche mehrere in den *Pensieri* benutzten Sätze weiter ausführen und sich hauptsächlich gegen DANDOLO's Entgegnung wenden. Es folgt dann auf Seite 28—30 unter der Überschrift: »ABC geometrico per il Sig. VINCENZO DANDOLO» noch eine scharfe Auseinandersetzung mit DANDOLO und auf Seite 31 einige Worte gegen ANTONIO ROMANÒ und unter der Überschrift »Avvertimento» eine kurze Schlussbemerkung. Auf Seite 32 endlich sind »Opere finora pubblicate dell' autore» angezeigt.

Wie man sieht, gehört das eben beschriebene Buch zu der Reihe von Gegenschriften, welche die anonym erschienene Schrift: *Trisectio anguli et cubi duplicatio aliaque geometrica problemata ope solius circini ac regulae resoluta, & demonstrata.* Roma 1792 (RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* II, 558) hervorrief. Auf diese antwortete BOARETTI mit seinen *Pensieri* etc., deren Titel ausführlicher wie bei RICCARDI (I, 138) auf S. 32 der *Principj* folgendermassen angegeben ist:

Pensieri sulla Trisezione dell' angolo, all' occasione d'un recente opuscolo stampato in Roma col titolo: Trisectio

anguli &c. ope solius circini ac regulae resoluta ac demonstrata, che si convince manifestamente di errore.

Hierauf veröffentlichten DANDOLO und ROMANÒ die ebenfalls bei RICCARDI (I, 138) angegebenen Entgegnungen. Diesen erwiderte alsdann BOARETTI mit zwei Schriften, zuerst mit der oben angeführten und kurz darauf mit den auch von RICCARDI (I, 138) citierten, unter dem Pseudonym »Piroforo Zanzara» (fieberbringende Mücke) erschienenen *Ottave rime ossia Progetto secondo di Piroforo Zanzara intitolato a quei geometri etc.*[1] Der Titel dieser Schrift zeigt selbst schon deutlich, dass sie erst die *zweite* Entgegnung ist, denn »Progetto *secondo* intitolato a quei geometrici etc.» ist auf BOARETTI's *Principj di analisi geometrica*, welche sich ebenfalls gegen DANDOLO und ROMANÒ (»a quei geometrici») richtet, und nicht auf seine *Pensieri* zu beziehen. Ausserdem schliesst das Verzeichniss der Werke BOARETTIS auf S. 32 mit den beiden Schriften *Pensieri* und *Principj*.

Es ist mir nun bei Durchsicht der mir zu Gebote stehenden bibliographischen Hülfsmittel und Litteraturgeschichten nicht möglich gewesen, die oben angeführte Schrift BOARETTIS nachzuweisen und desshalb hielt ich eine Anzeige dieser, wie es scheint, bisher unbekannten Streitschrift für den Bibliographen nicht für uninteressant.

[1] Abweichend hiervon finde ich übrigens bei FERRARI, *Vitae virorum seminarii Patavini* (1815), bei VEDOVA, *Scrittori Padovani* (1832), bei LANCITTI, *Pseudonimia* (1836), bei TIPALDO, *Biografie* (1837) den Titel folgendermassen angegeben: *Ottave rime o sia Cinque progetti di Piroforo Zanzara, intitolati a quei geometri* etc. — Warum mag BOARETTI überhaupt diese Schrift unter einem Pseudonym herausgegeben haben? und warum wählte er dieses Pseudonym? Giebt etwa der *Elogio di Franc. Boaretti* (Venezia, Rosa 1815), welcher mir nicht zugänglich war, darüber Aufschluss?

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. G. Zeuthen. FORELÆSNING OVER MATHEMATIKENS HISTORIE. OLDTID OG MIDDELALDER. Kjöbenhavn, Höst 1893. 8°, (12) + 292 p.

Dans le numéro précédent de la Biblioth. Mathem. nous avons fait mention (p. 90—91) de l'aperçu de l'histoire des mathématiques publié par M. BALL. Maintenant nous avons le plaisir d'appeler l'attention de nos lecteurs sur un autre ouvrage de la même nature. En effet, le livre de M. ZEUTHEN dont nous venons de transcrire le titre, contient un aperçu de l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge. Cependant le plan de ce livre est en quelque sorte différent de celui de l'ouvrage de M. BALL. Dans la préface, M. ZEUTHEN fait observer que, son but ayant été en premier lieu d'être utile aux mathématiciens et aux professeurs de mathématiques, il a omis tous les détails historiques qui ne soient pas nécessaires pour donner une idée du développement des notions et des méthodes mathématiques. Il s'en suit qu'on y trouve peu de renseignements biographiques et peu de notices relatives à l'histoire de la littérature mathématique.

Après une brève introduction (p. 1—12) sur les mathématiques préhistoriques ainsi que sur l'état des mathématiques chez les Egyptiens et les Babyloniens, l'auteur passe (p. 13—227) à une exposition historique des mathématiques grecques. Cette exposition comprend 29 chapitres, savoir: 1. Aperçu général des mathématiques grecques. — 2. Les mathématiques pythagoriciennes. — 3. L'arithmétique géométrique. — 4. L'algèbre géométrique. — 5. Equations numériques de second degré. — 6. La considération de l'infini. — 7. La quadrature du cercle. — 8. La trisection d'un angle; les problèmes de directions. — 9. La duplication du cube. — 10. Théorèmes et problèmes; la signification de la construction géométrique. — 11. La méthode analytique; la forme d'exposition analytico-synthétique. — 12. Des »éléments»; ressources analytiques. — 13. Aperçu des éléments d'EUCLIDES; système synthétique. — 14. Les fondements géométriques d'EUCLIDES. — 15. Remarque sur les fondements de la géométrie. — 16. La théorie générale des proportions; les livres 5^e et 6^e d'EUCLIDES. — 17. Grandeurs commensurables et leur représentation au moyen de nombres; les livres 7^e—9^e d'EUCLIDES. — 18. Grandeurs incommensurables; la 10^e livre d'EUCLIDES. — 19. Eléments de la stéréométrie; polyèdres réguliers; les livres 11^e et 13^e d'EUCLIDES. — 20. La

méthode d'exhaustion; le 12[e] livre d'EUCLIDES. — 21. Les recherches infinitésimales d'ARCHIMEDES. — 22. La théorie d'équilibre d'ARCHIMEDES. — 23. La théorie des sections coniques avant APOLLONIUS. — 24. Les sections coniques d'APOLLONIUS. — 25. Lieux et problèmes solides. — 26. La géométrie soumise au calcul. — 27. Géométrie sphérique. — 28. La décadence de la géométrie grecque. — 29. L'arithmétique grecque postérieure; DIOFANTOS.

La section suivante (p. 228—253) est consacrée à l'histoire des mathématiques chez les Hindous et contient 4 chapitres, savoir: 1. Aperçu général des mathématiques indiennes. — 2. Noms des nombres, signes numéraux, systèmes de numération et manière de calculer avant et chez les Hindous. — 3. Applications des règles à calculer. — 4. Algèbre et théorie des nombres; géométrie.

Dans la dernière section (p. 254—292), l'auteur expose l'état des mathématiques au moyen âge. Après un aperçu général, il rend compte de l'arithmétique et de l'algèbre des arabes, puis de la trigonométrie des arabes, et enfin de la renaissance des mathématiques en Europe jusqu'à REGIOMONTANUS et CHUQUET.

Bien que l'ouvrage de M. ZEUTHEN s'adresse en premier lieu aux élèves des écoles normales, il peut être recommandé aussi à ceux qui se sont dédiés particulièrement à l'étude de l'histoire des mathématiques, parce qu'il contient une exposition à plusieurs égards originale de l'état des mathématiques dans l'antiquité. Seulement il est à désirer qu'il soit bientôt traduit en une langue plus répandue parmi les savants que le danois.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS DIRIGÉ PAR **C.-A. Laisant** ET **E. Lemoine.** Tome I. N° 1. Paris 1894. 8°.

Le but de ce nouveau journal est de fournir aux personnes qui cultivent habituellement les Mathématiques, ou qui s'y intéressent, des renseignements sur des sujets se rapportant à leurs études, des solutions à des questions posées, ou des indications bibliographiques. *L'intermédiaire des mathématiciens* a donc, pour les mathématiques entières, un but semblable à celui que, depuis 9 ans, nous avons essayé de réaliser pour l'histoire des mathématiques par la section: »Questions» de la Bibliotheca Mathematica.

Le numéro paru de *L'intermédiaire des mathématiciens* contient 38 questions et 12 réponses; il y en a trois à chacune des questions 21 et 30. Parmi les questions, la 5^e^, qui est purement historique, a été proposée par M. MORITZ CANTOR; nous nous permettons de la reproduire ci-dessous:

> La question agitée depuis longtemps sur l'origine des signes + et — est quasi résolue, si je ne me trompe, par les hypothèses de MM. LE PAIGE et ZANGEMEISTER, citées dans la préface (p. V) des mes *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Zweiter Band, Leipzig 1892). Le signe + serait un compendium pour *et*, remontant au moins jusqu'au commencement du XIV^e^ siècle, et le signe — serait l'*obelos* des grammairiens alexandrins. Mais, ces hypothèses admises, c'est une nouvelle question qui se présente: Quand et par qui les *mots* »plus» et »minus» ont-ils été introduits pour *prononcer* les signes + et —?

Parmi les autres questions quatre (n^os^ 2, 13, 30 et 36) sont essentiellement bibliographiques, une (n° 35) historique, et une (n° 19) biographique. — Les réponses aux questions 7 et 8 renferment aussi beaucoup de renseignements bibliographiques.

Par ce qui précède, on voit que l'*Intermédiaire des mathématiciens* peut intéresser aussi les historiens, et c'est pour cette raison que nous avons voulu appeler sur lui l'attention des lecteurs de la Bibliotheca Mathematica.

Parmi les fautes d'impression nous nous permettons de signaler une à la page 12, ligne 22, où il faut lire 1850 au lieu de 1880, et une à la page 16, ligne 6, où il faut lire 530 au lieu de 730.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1893: 3. — [Analyse de l'année 1892 (fin):] Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 163—168. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1893: 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°. **38** (1893): 6.

Ball, W. W. R., An essay on Newton's Principia. London, Macmillan 1893.
8°, X + 175 p. — [6 sh.]

Bellacchi, G., A proposito di un lavoro sulla storia delle matematiche.
Periodico di matem. **7**, 1892, 81—88, 169—171; **8**, 1893, 25—28, 57—62, 113—116, 137—144.

°**Boncompagni, B.,** Catalogo dei lavori di Enrico Narducci. Roma 1893.
8°, 18 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 225. (CANTOR.)

°**Brewster, D.,** Life of sir Isaak Newton. New edition. London, Gall 1893.
8°, 340 p. — [2 sh.]

°**Dreyer, J. L. E.,** Tycho Brahe. Ein Bild wissenschaftlichen Lebens und Arbeitens im 16. Jahrhundert. Übersetzt von M. BRUHNS mit Vorwort von W. VALENTINER. Karlsruhe 1893.
8°, 12 + 434 p. + 6 pl. — [10 Mk.]

ДЮРИНГЪ, Е., Критическая исторія общихъ принциповъ механики. Перевелъ Н. МАРАКУЕВЪ. Москва 1893.
8°, XX + 531 p. — [4 roub.] — DÜHRING, E., Histoire critique des principes généraux de la mécanique. Traduite par N. MARAKOUEFF.

ЭНГЕЛЬГАРДТЪ, М. А., Н. Коперникъ, его жизнь и научная дѣятельность. Санктъ-Петербургъ 1892.
8°, 69 p. — [25 kop.] — ENGELHARDT, M. A., N. Kopernik, sa vie et son action scientifique.

ФИЛИППОВЪ, М. М., Ньютонъ, его жизнь и научная дѣятельность. Санктъ-Петербургъ 1892.
8°, 80 p. — [25 kop.] — FILIPPOFF, M. M., Newton, sa vie et son action scientifique.

°**Frobenius, G.,** Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker. Berlin 1893.
4°, 22 p. — [1·50 Mk.]

Gelcich, E. und **Sauter, F.,** Kartenkunde geschichtlich dargestellt. Stuttgart, Göschen 1894.
8°, 160 p. — [0·80 Mk.]

°**Günther, S.,** Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Zweite neubearbeitete Auflage. München 1893. 8°.

Günther, S., Exakte Wissenschaften.
65. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Festschrift (Nürnberg 1892). 33 p. — Histoire des sciences exactes à Nürnberg.

León y Ortiz, E., Breve reseña de tablas logaritmicas.
La controversia (Madrid) **7**, 1893, 669—671.

Loria, G., Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana.
Biblioth. Mathem. 1893, 79—89.

°**Mach, E.,** The science of mechanics: a critical and historical exposition of its principles. Translated from the second german edition by T. J. Mc Cormack. Chicago 1893.
8°, 538 p. — [2·50 doll.]

M[ansion], P., Albert Ribaucourt (1845—1893).
Mathesis 3_2, 1893, 270—272.

Reyes Prosper, V., Nicolas Ivanovich Lobatchefski. Reseña biográfico-bibliográfica.
El progreso matem. **3**, 1893, 321—324.

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea. Parte quinta.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie 3_3, 1893, 639—694.

СИНЦОВЪ, Д. М., Систематическій указатель книгъ и статей по чистой и прикладной математикѣ напечатанныхъ въ Казани по 1890 годъ. Казань 1893.
8°, 28 p. — Sintzoff, D. M., Liste systématique des écrits de mathématiques pures et appliquées publiés à Kasan jusqu'en 1890.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1893, 65—72.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1893, 73—74.

°**Todhunter, I.** and **Pearson, K.,** A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, from Galilei to the present time. Vol. II: Saint-Venant to lord Kelvin. London, Macmillan 1893.
8°, 1310 p.

°**Tschumi, J.,** Ein Beitrag zur Geschichte und Discussion der Cycliden. Bern 1893.
8°, 48 p. + 1 pl. — [1·50 Mk.]

Wertheim, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt a/M. 1893.
4°, 42 p. — Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M., 1893.

Zanotti Bianco, O., Nota storica sulla variazione delle latitudini.
Biblioth. Mathem. 1893, 75—78.

Zeuthen, H. G., Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn, Höst 1893.
8°, (12) + 292 p. — Leçons sur l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge.

Question 43 [sur les mathématiciennes vivantes].
Biblioth. Mathem. 1893, 96. (G. Eneström.)

APOLLONII PERGAEI quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. I—II. Lipsiæ 1891—1893. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 224—225. (CANTOR.)

BALL, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Second edition. London, Macmillan 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 90—91. (G. ENESTRÖM.)

BESTHORN, R. O. et HEIBERG, J. L., Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. I: 1. Hauniæ 1893. 8°.
Zeitschrift für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 192—195. (H. SUTER.) — Göttingische gelehrte Anzeigen 1893, 828—846. (H. KUNSSBERG.)

HULTSCH, F., Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. (Göttingen 1893. 8°.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 223—224. (CANTOR.)

MANSION, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars 1893. 8°.
Jornal de sc. mathem. **11**, 1893, 158—159. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1892. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 228—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 92—95. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 226—227. — Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 169—192.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

44. Dans sa note *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles* (Biblioth. Mathem. 1890, p. 33—36), VICUÑA a appelé l'attention sur un ouvrage du mathématicien espagnol OMERIQUE cité avec éloge par NEWTON. On demande une petite notice sur la vie et l'action scientifique d'OMERIQUE. (G. Eneström.)

Remarque sur la question 43. Parmi les mathématiciennes vivantes j'ai indiqué aussi »Mme F. Prime» à Bruxelles. M. MANSION a bien voulu me faire savoir que cela est un pseudonyme, sous lequel se cache un de ses anciens élèves. Il faut dont rayer ce nom de la liste des mathématiciennes actuellement vivantes. (G. Eneström.)

Index.